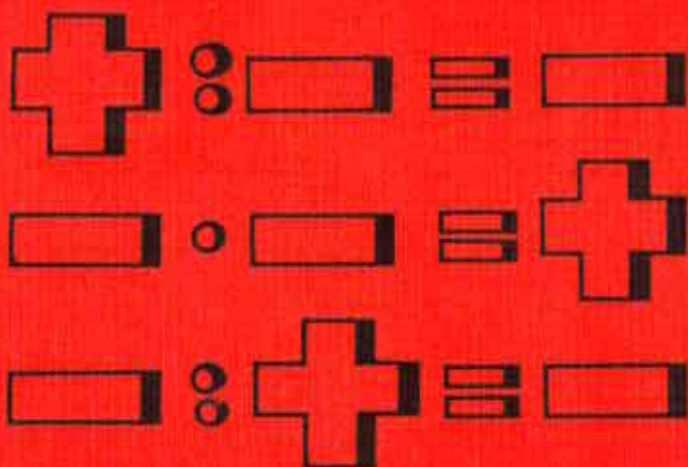


Handbuch der Fernmeldetechnik

Grundreihe



Band 2

Grundkenntnisse der
Mathematik und der Physik

Handbuch der Fernmeldetechnik

— Grundreihe —

13 wichtige Lehr- und Lernwerke (mit Repetitoren) für Auszubildende

Band 1

— Allgemeine Berufskunde

Berufsbildungsgesetz — Berufsausbildungsvertrag — Ausbildungs- und Prüfungsordnung für Fernmeldehandwerker — Jugendarbeitschutzgesetz — Dienstverhältnisse bei der Deutschen Bundespost — Staatsaufbau — Grundrechte und -pflichten des Staatsbürgers — Tarifverträge für Fernmeldelehrlinge und Arbeiter bei der DBP — Sozialeinrichtungen — Personalvertretungsgesetz — Aufbau und Aufgaben der DBP — Fernmelderecht — Verhalten gegenüber dem Kunden, Schadenshaftung — Arbeitsschutz und Unfallverhütung — Schriftformen von Meldungen, Gesuchen und Prüfungsarbeiten

● Repetitor zum Band 1

Band 2

— Grundkenntnisse der Mathematik und der Physik (mit Lösungsheft)

Rechnen mit bestimmten Zahlen — Buchstabenrechnung — Potenzrechnung — Radizieren — Die Lehre von den Gleichungen — Die grafische Darstellung von Funktionen — Proportion — Kreisfunktionen — Dreisatz- und Prozentrechnung — Zahlensysteme — Stabrechnen — Aufbau und Zustandsformen der Körper — Arbeit und Leistung — Einfache Maschinen — Wärmelehre — Akustik — Optik

● Repetitor zum Band 2

Band 3

— Grundlagen der Gleich- und Wechselstromlehre (2 Teile)

Grundlagen der Gleichstromlehre — Wirkungen des Stroms — Das elektrische Feld — Magnetismus — Wirkungen des Magnetismus — Grundlagen der Wechselstromlehre — Die Messung elektrischer Größen — Transformatoren — Fernmeldeübertrager

● Repetitor zum Band 3

Band 4

— Aufgabensammlung zu Band 3 (mit Lösungsheft)

— Weitere Lehrbücher siehe 3. und 4. Umschlagsseite —

Handbuch der Fernmeldetechnik

Grundreihe

Herausgegeben mit Unterstützung
des Bundesministers
für das Post- und Fernmeldewesen

Band 2

(mit Lösungsheft)

Grundkenntnisse der Mathematik und der Physik

2., verbesserte Auflage

Deutsche Postgewerkschaft - Hauptvorstand - Verlag - 6 Frankfurt 71 - Rhonestraße 2

Vorwort

Das insgesamt 13 Bände umfassende „Handbuch der Fernmeldetechnik – Grundreihe“ soll den Auszubildenden während der gesamten Ausbildungszeit ein ständiger Begleiter sein und ihnen in möglichst enger Anlehnung an das in der „VO über die Berufsausbildung zum FHandw“ festgelegte Berufsbild eine umfassende und gute Prüfungsvorbereitung ermöglichen. Damit dieses Ziel erreicht wird, gehen wir von dem in dem Ausbildungsrahmenplan stichwortartig angegebenen Grundlernstoff aus, der dann schwerpunktmäßig in dem notwendigen Ausmaß ergänzt wird. Die Frage nach dem Wie, Warum und Wozu steht hierbei immer im Mittelpunkt der Überlegungen.

In dem vorliegenden Band sollen dem Auszubildenden die erforderlichen mathematischen und physikalischen Grundkenntnisse vermittelt werden. Jedes technische Wissen wird beherrscht durch „Maß“ und „Zahl“. Die hiermit zusammenhängenden Fragen sind deshalb unter Berücksichtigung der Vorkenntnisse des Lesers besonders ausführlich in einfacher Form behandelt worden. Die „Buchstabenrechnung“ und „die Lehre von den Gleichungen“ nehmen in dem vorliegenden Band einen besonders großen Raum ein, weil die Behandlung von algebraischen Formeln für das Verständnis der technischen Vorgänge unerlässlich ist. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben sollen hierbei zur Festigung und Vertiefung des erlernten Wissens beitragen. Mit Hilfe des besonderen Lösungsheftes kann die richtige Ausrechnung der aufgeführten Übungsaufgaben leicht nachgeprüft werden.

Die Verfasser erheben nicht den Anspruch, daß die Bände alle Vorschriften und technischen Einzelheiten sowie auch das in der Praxis selten Vorkommende enthalten. Ihnen ging es vielmehr darum, ein Lehrbuch zu schaffen, das der gestellten Aufgabe ohne unnötigen Ballast im Interesse der Leser gerecht wird.

Wir hoffen, daß sich dieser aus der Praxis für die Praxis geschriebene Band sowohl während der Ausbildungszeit als auch darüber hinaus als Lern- und Nachschlagewerk bewähren wird.

Die Herausgeber

Stand: Frühjahr 1973

Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Mathematik

1. Rechnen mit bestimmten Zahlen

1.1. Allgemeines	9
1.2. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen	9
1.3. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen	12
1.3.1. Allgemeines über die gewöhnliche Bruchrechnung	12
1.3.2. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen	12
1.3.3. Der größte gemeinsame Teiler	13
1.3.4. Das kleinste gemeinsame Vielfache	13
1.3.5. Erweitern und Kürzen von Brüchen	14
1.3.6. Addition und Subtraktion von Brüchen	16
1.3.7. Addition und Subtraktion von gemischten Zahlen	19
1.3.8. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl	24
1.3.9. Multiplikation zweier Brüche	25
1.3.10. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl	27
1.3.11. Division zweier Brüche	29
1.3.12. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch	30
1.4. Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen	31
1.4.1. Addition von Dezimalbrüchen	31
1.4.2. Subtraktion von Dezimalbrüchen	32
1.4.3. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl	32
1.4.4. Multiplikation zweier Dezimalbrüche	32
1.4.5. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl	33
1.4.6. Division zweier Dezimalbrüche	34
1.4.7. Endliche und unendliche Dezimalbrüche	35
1.4.8. Addition und Subtraktion von Brüchen und Dezimalbrüchen	36
1.4.9. Multiplikation und Division beider Brucharten	36
1.4.10. Bruchausdrücke mit Dezimalbrüchen im Zähler und Nenner	37

2. Buchstabenrechnung

2.1. Allgemeines	38
2.1.1. Addition von natürlichen Zahlen	39
2.1.2. Subtraktion von natürlichen Zahlen	40
2.1.3. Relative Zahlen	42
2.2. Addition und Subtraktion von bestimmten und unbestimmten Zahlen, die ein Vorzeichen besitzen (relative Zahlen)	45
2.2.1. Addition von relativen Zahlen	45
2.2.2. Subtraktion von relativen Zahlen	45
2.2.3. Die algebraische Summe; das Rechnen mit Klammern	49
2.2.4. Addition und Subtraktion von Brüchen	53
2.3. Multiplikation	56
2.3.1. Vorzeichenregel bei der Multiplikation	57
2.3.2. Multiplikation von Klammerausdrücken	58
2.3.3. Ausklammern gemeinsamer Faktoren	63
2.3.4. Multiplikation von Brüchen	66

	Seite
2.4. Division	68
2.4.1. Division von Brüchen	69
2.4.2. Division einer mehrgliedrigen Größe durch eine Zahl	69
2.5. Kürzen und Erweitern von Brüchen	73
2.6. Rangfolge der Punkt- und Strichrechnung	74
3. Potenzrechnung	
3.1. Addition und Subtraktion von Potenzen	80
3.2. Multiplikation von Potenzen	81
3.3. Division von Potenzen	82
3.4. Potenzen von Summen und Differenzen	83
3.5. Potenzen von Produkten	83
3.6. Potenzen von Potenzen	84
3.7. Rechnen mit Zehnerpotenzen	87
3.8. Zehnerlogarithmus	90
4. Radizieren (Wurzelrechnung)	
4.1. Allgemeines	94
4.2. Wichtige Regeln	98
4.2.1. Vorzeichen beim Radizieren	98
4.2.2. Addition und Subtraktion von Wurzeln	99
4.2.3. Multiplikation von Wurzeln desselben Grades	99
4.2.4. Radizierung eines Produktes	99
4.2.5. Division von Wurzeln desselben Grades	100
4.2.6. Radizierung von Brüchen	100
4.2.7. Radizierung von Potenzen	100
4.2.8. Potenzieren von Wurzeln	100
4.2.9. Radizierung von Wurzeln	101
4.2.10. Erweitern und Kürzen von Wurzeln	101
5. Zusammenfassung der Grundregeln	103
6. Die Lehre von den Gleichungen	
6.1. Allgemeines	108
6.2. Das Umstellen und Lösen von Gleichungen	113
6.3. Kurze Zusammenfassung der wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Gleichungen	122
6.3.1. Übungsgleichungen mit Klammerausdrücken	125
6.3.2. Übungsgleichungen mit Brüchen und Klammerausdrücken ..	128
6.3.3. Angewandte oder eingekleidete Aufgaben	130
6.4. Das Umstellen von technischen Formeln	131
6.4.1. Anwendungen von Gleichungen in der Elektrotechnik	132
6.5. Die allgemeine Bedeutung der Größen, Formelzeichen, Werte, Einheiten und der verschiedenartigen Gleichungen	139
6.5.1. Größen	139

	Seite
6.5.2. Vorsätze für Vielfache und Teile von Einheiten	139
6.5.3. Strich- und Punktrechnung mit gleich- und ungleichartigen Größen	139
6.5.4. Größengleichung	141
6.5.5. Zahlenwertgleichung	141
6.5.6. Einheitengleichung	141
6.5.7. Faktorengleichung	142
6.5.8. Umrechnungsfaktorengleichung	142
7. Die grafische Darstellung von Funktionen	143
8. Proportion	148
9. Der pythagoreische Lehrsatz	
9.1. Allgemeines	152
9.2. Beweis für die Richtigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes	153
9.2.1. Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes	155
10. Kreisfunktionen	
10.1. Die Kreisfunktionen Sinus und Kosinus	157
10.1.1. Sinus des Winkels α	157
10.1.2. Kosinus des Winkels α	157
10.1.3. Rechtwinkliges Dreieck	158
10.1.4. Sinuskurve	158
10.2. Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck	159
10.3. Beispiele für die Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken	164
11. Dreisatz- und Prozentrechnung	
11.1. Einfacher Dreisatz mit geradem Verhältnis	168
11.2. Einfacher Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis	171
11.3. Prozentrechnung (Allgemeines)	175
11.4. Prozentrechnung mit dem vermehrten und verminderten Grundwert ..	179
12. Zahlensysteme	
12.1. Dezimalzahlensystem	182
12.2. Dualzahlensystem	183
12.3. Umwandlung der beiden Zahlensysteme	184
12.3.1. Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen	184
12.3.2. Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen	185
12.4. Addition von Dualzahlen	185

13. Rechenstab

13.1. Allgemeines	187
13.2. Malnehmen	190
13.2.1. Malnehmen—reziprok	190
13.3. Teilen	191
13.3.1. Teilen—reziprok	191
13.4. Quadratwurzelziehen	192
13.5. Quadrieren	192

Grundkenntnisse der Physik**14. Begriffe und Einheiten**

14.1. Die Grundeinheiten des Internationalen Einheitensystems	196
14.2. Länge	201
14.3. Zeit	202
14.4. Masse und Kraft (Gewichtskraft)	203
14.4.1. MKS-System	206
14.4.2. MKSA-System	206

15. Aufbau und Zustandsformen der Körper

15.1. Feste Körper	207
15.2. Flüssige Körper	208
15.3. Gasförmige Körper	208

16. Mechanik der festen Körper

16.1. Statik der festen Körper	209
16.1.1. Kraft	209
16.1.2. Zusammenwirken mehrerer Kräfte	210
16.1.3. Schwerpunkt	213
16.1.4. Standfestigkeit	214
16.1.5. Gleichgewicht der Kräfte	215
16.1.6. Drehmoment	216
16.1.7. Hebelgesetz	218
16.2. Dynamik der festen Körper	219
16.2.1. Allgemeines	219
16.2.2. Trägheitskraft	219
16.2.3. Gleichförmige Bewegung	220
16.2.4. Kreisbewegung	222
16.2.5. Ungleichförmige Bewegung	222

17. Arbeit und Leistung

17.1. Arbeit	227
17.2. Energie	228
17.3. Leistung	228
17.4. Wirkungsgrad	230

18. Einfache Maschinen

18.1. Allgemeines	234
18.2. Hebel	234
18.3. Seil und Rolle	235
18.4. Flaschenzug	236
18.5. Übertragen von Drehbewegungen	239
18.5.1. Übersetzung durch Riemenscheiben	239
18.5.2. Übersetzung durch Zahnräder	240
18.6. Schiefe Ebene	241
18.6.1. Allgemeines	241
18.6.2. Keil	244
18.6.3. Schraube	245

19. Wärme

19.1. Wärmeempfindung, Temperatur	247
19.2. Absoluter Nullpunkt und absolute Temperatur	250
19.3. Wärmemenge, physikalische Größen der Wärme	251
19.4. Veränderung (Ausdehnung) der Körper durch Erwärmung	252
19.5. Längenausdehnung	253

20. Akustik

20.1. Schallerregung	257
20.2. Schallausbreitung	257
20.3. Physikalische Größen des Schalls	259
20.3.1. Schallgeschwindigkeit	259
20.3.2. Wellenlänge	260
20.3.3. Frequenz	261
20.3.4. Schalldruck	262
20.3.5. Schalldruckpegel	263
20.4. Hörbereich	267
20.5. Schallsender	270
20.6. Schallempfänger	270
20.7. Schallaufzeichnung	271

21. Optik

21.1. Lichtquellen und Lichtausbreitung	273
21.2. Reflexion	275
21.2.1. Reflexion am ebenen Spiegel	275
21.2.2. Reflexion am Hohlspiegel	277

	Seite
21.3. Lichtbrechung	277
21.4. Optische Linsen	279
21.4.1. Sammellinse	279
21.4.2. Zerstreuungslinse	282
21.5. Physikalische Größen des Lichts	283
21.5.1. Lichtstärke	283
21.5.2. Lichtstrom	284
21.5.3. Lichtmenge	285
21.5.4. Beleuchtungsstärke	286
21.5.5. Leuchtdichte	287
21.5.6. Lichtausbeute	288
21.6. Elektronenoptiken	289
 22. Tabellen	
22.1. Allgemeines	293
22.2. Quadrate und Wurzeln	294
22.3. Winkelfunktionen	296

Mathematik

1. Rechnen mit bestimmten Zahlen

1.1. Allgemeines

Die Lehre von den Zahlen und ihren Beziehungen zueinander heißt **Arithmetik** (griech. arithmos = Zahl).

Die Zahlenlehre umfaßt das Rechnen

mit bestimmten Zahlen,

die durch die Reihe der natürlichen Zahlen gegeben sind (1, 2, 3 usw.) und

mit unbestimmten Zahlen,

die auch „**allgemeine**“ Zahlen genannt werden. Als unbestimmte Zahlen verwendet man kleine und große **Buchstaben**, z. B. $a, b, c, x, y, z, R, U, V$ usw.

Ein besonderes Anwendungsgebiet des Buchstabenrechnens ist die **Algebra**. Unter Algebra versteht man das Rechnen mit **Gleichungen**.

Bestimmte und unbestimmte Zahlen können mit **positiven** oder **negativen** Vorzeichen versehen sein. Man nennt sie dann

„**relative Zahlen**“, z. B. (-2) ; $(+a)$; $(-b)$ usw.

Die Erläuterung der relativen Zahlen erfolgt später mit Hilfe der „**Zahlengeraden**“.

Der Wert einer Zahl wird bezeichnet als

„**absoluter Wert**“.

Beispielsweise ist der absolute Wert der Zahl 12 größer als der von 11.

Man unterscheidet 3 Stufen der Rechenarten:

Die **I. Stufe** umfaßt die Addition und Subtraktion (Strichrechnung).

Die **II. Stufe** umfaßt die Multiplikation und Division (Punktrechnung).

Die **III. Stufe** umfaßt die Potenz- und Wurzelrechnung.

Die Rechenarten der I. und II. Stufe nennt man auch die **4 Grundrechnungsarten**.

1.2. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen

Die **Rechenzeichen** der Addition und Subtraktion bestehen aus **Strichen**, daher auch die landläufige Bezeichnung „**Strichrechnung**“.

Bei der Multiplikation und Division spricht man von der **Punktrechnung**, weil hierfür **Punkte** als Rechenzeichen verwendet werden.

Da das Rechnen mit ganzen Zahlen verhältnismäßig einfach ist, sind die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen in der folgenden Aufstellung in übersichtlicher Form zusammengefasst worden.

Rechnungsart	Größen und Begriffe					Rechenvorgang
Addition	Summand 2	plus +	Summand 4	gleich =	Summe 6	addieren (zusammenzählen)
Subtraktion	Minuend 8	minus —	Subtrahend 6	gleich =	Differenz 2	subtrahieren (abziehen)
Multiplikation	Multiplikand Faktor 2	mal mal ·	Multiplikator Faktor 4	gleich gleich =	Produkt Produkt 8	multiplizieren (malnehmen)
Division	Dividend 12	durch :	Divisor 4	gleich =	Quotient 3	dividieren (teilen)

Beachten Sie bitte folgendes:

a) Eine Zahl ist ohne Rest teilbar durch

- 2: wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar oder eine 0 ist;
- 3: wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist;
- 4: wenn die beiden letzten Ziffern durch 4 teilbar sind;
- 5: wenn die letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist;
- 6: wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist;
- 8: wenn die letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar sind;
- 9: wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist;
- 10: wenn die letzte Ziffer eine 0 ist;
- 12: wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist;
- 15: wenn sie durch 3 und 5 teilbar ist;
- 25: wenn die beiden letzten Ziffern durch 25 teilbar sind.

b) Werden zwei gleiche Größen durcheinander geteilt, dann ist der Quotient stets Eins.

Beispiele: $\frac{6}{6} = 1$; $\frac{12}{12} = 1$; $\frac{24}{24} = 1$

c) Wird eine Größe durch Null geteilt, dann ist der Quotient stets Unendlich (∞)

Beispiele: $\frac{6}{0} = \infty$; $\frac{14}{0} = \infty$; $\frac{150}{0} = \infty$

d) Wird eine Null durch eine Größe geteilt, so kann sich keine Größe ergeben, der Quotient bleibt stets Null.

Beispiele: $\frac{0}{4} = 0$; $\frac{0}{20} = 0$; $\frac{0}{100} = 0$

e) Wird eine Größe durch Eins geteilt, dann bleibt die Größe erhalten.

Beispiele: $\frac{12}{1} = 12$; $\frac{35}{1} = 35$; $\frac{180}{1} = 180$

f) Wenn ein Faktor mit Null multipliziert wird, dann ist das Produkt stets Null.

Beispiele: $8 \cdot 0 = 0$; $25 \cdot 0 = 0$; $160 \cdot 0 = 0$

Mathematische Zeichen nach DIN 1302

Mathematische Zeichen

- + plus
- minus
- = gleich
- ≠ nicht gleich
- ≈ nahezu gleich
- ≡ entspricht
- < kleiner als
- > größer als
- ≤ kleiner oder gleich
- ≥ größer oder gleich
- ∞ unendlich
- | | absoluter Betrag von
- Σ Summe
- √ Wurzel aus

Beispiele

- $8 + 7 = 15$
- $6 - 4 = 2$
- $12 = 8 + 4$
- $4 \neq 2$
- $0,499 \approx 0,5$
- $1 \text{ cm} \equiv 1 \text{ kg}$ (in der Zeichnung)
- $2 < 6$
- $8 > 4$
- $2 \leq 2$ und größer
- 4 und größer ≥ 4
- $\frac{1}{0} \rightarrow \infty$
- $|4|$
- $\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$
- $\sqrt{4} = 2$

1.3. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen

1.3.1. Allgemeines über die gewöhnliche Bruchrechnung

Ein Bruch entsteht, wenn man ein Ganzes (1) in eine Anzahl gleicher Teile teilt und einen oder mehrere davon nimmt.

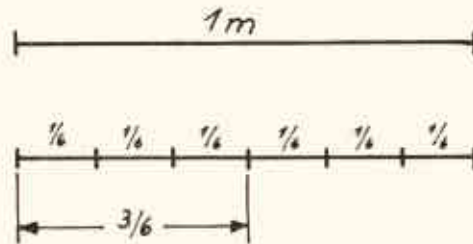


Abb. 1.1

Beispiel eines Bruches:

$$\frac{3}{6} \begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \text{Nenner} \end{array}$$

Der Zähler steht über, der Nenner unter dem Bruchstrich.

Die Zahl, die angibt (**nennt**), in wieviel gleiche Teile das Ganze geteilt worden ist, heißt **Nenner**.

Die Zahl, die besagt, wieviel von diesen Teilen genommen (**gezählt**) werden sollen, heißt **Zähler**.

Man unterscheidet:

a) **echte Brüche**: $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; der **Zähler** ist **kleiner** als der **Nenner**

b) **unechte Brüche**: $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; der **Zähler** ist **größer** als der **Nenner**

c) **gemischte Zahlen**: $2\frac{2}{3}$; $3\frac{4}{5}$; **Ganze** und **Brüche**

1.3.2. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, heißen **Primzahlen**.

Beispiele: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw.

Alle übrigen Zahlen sind **zusammengesetzte Zahlen**; sie lassen sich nämlich als Produkt aus mehreren Primzahlen **zusammensetzen**.

Beispiele: $6 = 2 \cdot 3$; $9 = 3 \cdot 3$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Übungsaufgabe:

1. Schreiben Sie die Primzahlen von 1 bis 100 auf.

1.3.3. Der größte gemeinsame Teiler (g. g. T.)

Für das **Kürzen** der Brüche sucht man den **größten gemeinsamen Teiler** (g. g. T.).

Von den Zahlen 40, 60 und 80 findet man den g. g. T., wenn man sie in ihre **Primfaktoren** zerlegt und die **gemeinsam** vorkommenden Primfaktoren miteinander multipliziert.

$$\left. \begin{array}{l} 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{g. g. T.} \\ 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20 \end{array}$$

Übungsaufgaben:

2. Der **größte gemeinsame Teiler** ist zu bestimmen von:

- | | |
|------------------|--------------------------|
| a) 18 und 42 | e) 96, 144 und 204 |
| b) 128 und 162 | f) 17, 34 und 86 |
| c) 24, 36 und 45 | g) 48, 120, 216 und 288 |
| d) 30, 45 und 75 | h) 126, 154, 378 und 546 |

1.3.4. Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.)

In einfachen Aufgaben kann das **kleinste gemeinsame Vielfache** (k.g.V.) durch Kopfrechnen gefunden werden.

In der folgenden Darstellung sind die **gemeinsamen Vielfache** von 8 und 12 **unterstrichen**:

$$\begin{array}{l} \text{Vielfache von 8 sind: } 16 \quad \underline{24} \quad 32 \quad 40 \quad \underline{48} \quad 56 \quad 64 \quad \underline{72} \\ \text{Vielfache von 12 sind: } \quad \underline{24} \quad 36 \quad \quad \underline{48} \quad 60 \quad \quad \underline{72} \end{array}$$

Von den unterstrichenen gemeinsamen Vielfachen ist 24 das **kleinste gemeinsame Vielfache**, abgekürzt k. g. V. Es wurde durch Probieren gefunden.

Schriftliches Aufsuchen des k. g. V.:

Will man von mehreren Zahlen, z. B. 6, 3, 4, 12, 18, 70, 5, 28 und 25 das k. g. V. aufsuchen, so ist folgendes zu beachten:

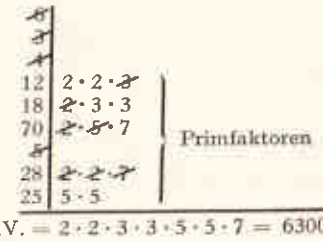
a) Die Zahlen, die in anderen enthalten sind, scheiden aus. 6, 3, 4, 5 werden also gestrichen.

b) Die übrigen Zahlen werden in Primfaktoren zerlegt.

c) Jetzt wird festgestellt, welche verschiedenen Primfaktoren vorkommen (hier sind es 2, 3, 5 und 7).

d) Die festgestellten Primfaktoren bleiben nur in der Zeile stehen, wo sie am häufigsten vorkommen. Die 3 kommt in der Zeile „18“ am häufigsten vor und wird deshalb in der Zeile „12“ gestrichen. Wenn die 2 in der Zeile „12“ und „28“ je zweimal vorkommt, so darf sie nur in einer Zeile stehenbleiben, vielleicht in der Zeile „12“.

e) Aus dem Produkt der stehengebliebenen Primfaktoren findet man das k. g. V.



Im nächsten Abschnitt wird die Ermittlung des k. g. V. beim Suchen des Hauptnenners für ungleichnamige Brüche eine wertvolle Hilfe sein.

Übungsaufgaben:

3. Das k.g.V. wird von folgenden Zahlen gesucht:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------|
| a) 4, 5, 9, 8, 12 | b) 8, 12, 18 | c) 9, 15, 27 |
| d) 5, 6, 8, 9, 15, 25 | e) 28, 42, 63 | f) 8, 9, 12, 18 |
| g) 12, 16, 36, 60, 54 | h) 60, 84, 45, 56 | i) 210, 180, 660 |
| k) 15, 77, 154, 182 | l) 360, 300, 630, 252 | m) 252, 540, 385 |

1.3.5. Erweitern und Kürzen von Brüchen

1.3.5.1. Erweitern

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.

Die Zahl mit der man erweitert, heißt Erweiterungsfaktor.

Wie z. B. aus dem Bruch $\frac{1}{2}$ durch Erweitern die Brüche $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ und $\frac{5}{10}$ entstehen, die trotz unterschiedlicher Zähler und Nenner alle denselben Wert besitzen, lässt sich mit Hilfe einer Strecke erklären, die in 2, 4, 6, 8 und 10 gleiche Teile unterteilt ist. Durch die Multiplikation von $\frac{1}{2}$ mit dem entsprechenden Erweiterungsfaktor im Zähler und im Nenner erhalten wir die gewünschten Brüche, die alle denselben Wert haben.



Abb. 1.2

1.3.5.2. Kürzen

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Die Zahl durch die man kürzt, heißt Kürzungsfaktor.

Zum besseren Verständnis ist auch hierfür eine Strecke in acht gleiche Teile geteilt worden.

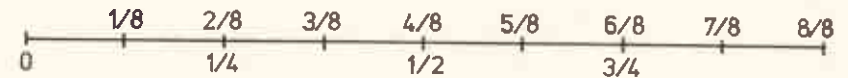


Abb. 1.3

Wenn wir z. B. den Bruch $\frac{2}{8}$ durch den g.g.T. im Zähler und Nenner, also durch 2, kürzen, dann erhalten wir den gekürzten Bruch $\frac{1}{4}$.

Beispiele: Folgende Brüche sind durch den g.g.T. von Zähler und Nenner zu kürzen:

- a) $\frac{2}{8} = \frac{2 : 2}{8 : 2} = \frac{1}{4}$
- b) $\frac{4}{8} = \frac{4 : 4}{8 : 4} = \frac{1}{2}$
- c) $\frac{8}{8} = \frac{8 : 8}{8 : 8} = 1$

1.3.6. Addition und Subtraktion von Brüchen

1.3.6.1. Gleichnamige Brüche

Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner beibehält.

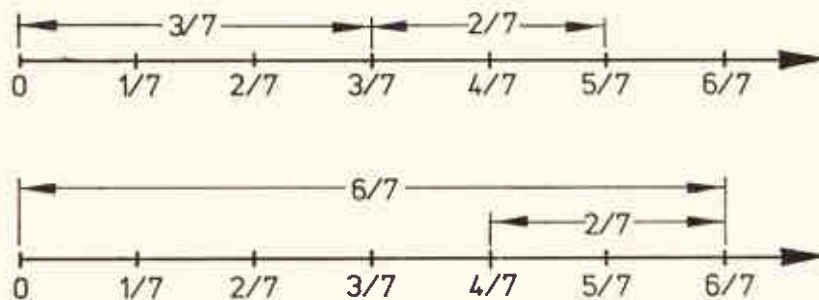


Abb. 1.4

Beispiele:

$$a) \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$b) \frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{6-2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$c) \frac{3}{12} + \frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{3+5-2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$d) 3\frac{1}{6} + 1\frac{5}{6} + 2\frac{4}{6} = 6\frac{10}{6} = 6\frac{5}{3} = 7\frac{2}{3}$$

Unechte Brüche verwandelt man in gemischte Zahlen, z. B. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Gemischte Zahlen werden addiert, indem man die Ganzen und die Brüche

für sich addiert, z. B. $2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{4} = 5\frac{3}{4}$

Übungsaufgaben:

$$4. a) \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \quad b) \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \quad c) \frac{1}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11}$$

$$5. a) \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \quad b) \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7} \quad c) \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8}$$

$$6. a) \frac{1}{7} + \frac{4}{7} \quad b) \frac{4}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \quad c) \frac{5}{14} + \frac{3}{14} - \frac{1}{14}$$

$$7. a) \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \quad b) \frac{12}{8} - \frac{7}{8} \quad c) 1 - \frac{2}{5}$$

$$8. a) \frac{11}{12} - \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \quad b) 17 - \frac{9}{11} \quad c) 32 - 17\frac{3}{4}$$

9. Ein Schüler bezahlte zwei Rechnungen über $5\frac{2}{5}$ DM und $7\frac{4}{5}$ DM. Wieviel DM mußte er zurückbringen, wenn ihm sein Vater 20 DM mitgegeben hatte?

10. Bestimmen Sie die Summe aller echten Brüche:

- a) deren Zähler gerade und deren Nenner 15 ist,
- b) deren Zähler größer als 30 und deren Nenner 40 ist,
- c) deren Zähler eine Primzahl und deren Nenner 50 ist.

11. Zu welchen Zahlen muß man $28\frac{3}{5}$ addieren, um 30, 100, $127\frac{2}{5}$ und $199\frac{4}{5}$ zu erhalten?

12. Subtrahieren Sie die Summe $5\frac{46}{63}$ und $8\frac{55}{63}$ von $20\frac{2}{63}$.

13. Addieren Sie zu $459\frac{91}{97}$ die Differenz aus $6407\frac{73}{97}$ und $6399\frac{67}{97}$.

14. Vermindern Sie die Differenz aus $2095\frac{1}{8}$ und $1999\frac{3}{8}$ um die Differenz aus $124\frac{7}{8}$ und $87\frac{5}{8}$.

1.3.6.2. Ungleichnamige Brüche

Merke:

Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Brüche zunächst gleichnamig macht und dann die Zähler addiert oder subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiel: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = ?$

Gesucht wird für die ungleichnamigen Brüche zuerst der **Hauptnenner**, in dem alle vorhandenen Nenner als Teiler enthalten sind. Der Hauptnenner ist nichts anderes, als das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.) der einzelnen Nenner.

Vielfache von 2 sind: 2 4 6 8 10 12

Vielfache von 3 sind: 3 6 9 12

Vielfache von 4 sind: 4 8 12

Das k. g. V. zu 2, 3 und 4 ist also „12“.

Die ungleichnamigen Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ können jetzt in gleichnamige Brüche mit dem Hauptnenner „12“ umgewandelt werden.

Für die erforderliche Erweiterung der vorstehenden Brüche (auf den

Hauptnenner „12“) muß der Bruch $\frac{1}{2}$ im Nenner mit „6“ multipliziert werden (weil $2 \cdot 6 = 12$ ergibt). Gleichzeitig muß aber auch der Zähler mit derselben Zahl ($\cdot 6$) multipliziert werden, damit der Wert des Bruches sich nicht ändert. Die anderen Brüche werden ebenfalls erweitert:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Lösung: $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$

Folgende ungleichnamige Brüche sind zu addieren:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{18} + \frac{11}{16} + \frac{13}{24} + \frac{5}{9} + \frac{7}{32} = ?$$

In der nebenstehenden Rechnung wird mit Hilfe der Primfaktoren der Hauptnenner (oder das k.g.V.) gesucht.

	Primfaktoren
18	2 · 3 · 3
16	
24	2 · 2 · 2 · 3
9	
32	2 · 2 · 2 · 2 · 2

Hauptnenner = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 288$

Die **ungleichnamigen** Brüche müssen jetzt so erweitert werden, daß sie **gleichnamige** Brüche mit dem Hauptnenner „288“ ergeben.

Merke:

Die **Erweiterungszahl** wird gefunden, indem man den Hauptnenner durch den Nenner des zu erweiternden Bruches teilt.

Die vorstehende Aufgabe nun noch einmal mit der Lösung:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{18} + \frac{11}{16} + \frac{13}{24} + \frac{5}{9} + \frac{7}{32} =$$

Für den ersten Bruch „ $\frac{3}{4}$ “ ergibt sich demnach die Erweiterungszahl aus $\frac{288}{4} = 72$. Für „ $\frac{7}{18}$ “ ergibt sich die Erweiterungszahl aus $\frac{288}{18} = 16$ usw.

Lösung:

$$\frac{3 \cdot 72}{4 \cdot 72} + \frac{7 \cdot 16}{18 \cdot 16} + \frac{11 \cdot 18}{16 \cdot 18} + \frac{13 \cdot 12}{24 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 32}{9 \cdot 32} + \frac{7 \cdot 9}{32 \cdot 9} =$$

$$\frac{216}{288} + \frac{112}{288} + \frac{198}{288} + \frac{156}{288} + \frac{160}{288} + \frac{63}{288} = \frac{905}{288} = 3\frac{41}{288}$$

1.3.7. Addition und Subtraktion von gemischten Zahlen

Merke:

Gemischte Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man zuerst die ganzen Zahlen und dann die Brüche addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel: $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{6} = ?$

a) Wir addieren zuerst die Ganzen: $3 + 4 = 7$

b) Wir stellen die Brüche gleichnamig und addieren die Zähler:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4 + 1}{6} = \frac{5}{6}$$

c) Wir addieren nun die Ergebnisse: $3 + 4 + \frac{5}{6} = 7\frac{5}{6}$

Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiert werden, so verwandelt man vorher einen Einer der ganzen Zahl in einen gleichnamigen Bruch.

Beispiel: $5 - \frac{1}{2} = 4\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Eine gemischte Zahl wird von einer anderen gemischten Zahl subtrahiert, indem man erst die Ganzen und dann den Bruch subtrahiert.

Beispiele: a) $5 - 2\frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

b) $9\frac{5}{12} - 2\frac{7}{12} = 7\frac{5}{12} - \frac{7}{12} = 6\frac{17}{12} - \frac{7}{12} = 6\frac{10}{12} = 6\frac{5}{6}$

Bei schwierigen Aufgaben wird folgender Lösungsgang vorgeschlagen:

1. Beispiel: $9\frac{7}{12} + 6\frac{15}{16} + 5\frac{3}{4} + 3\frac{5}{8} + 2\frac{13}{18} = ?$

Wir suchen zunächst den Hauptnenner für die ungleichnamigen Brüche und kommen dann zur Lösung:

Hauptnenner (H.N.):

12	2 · 2 · 3	Primfaktoren
16	2 · 2 · 2 · 2	
4		
8		
18	2 · 3 · 3	
H. N. = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 3 = 144		

Lösung:

	7	144
9	12	84
15	16	135
3	4	108
5	8	90
13	18	104
25	144	89
		$\frac{521}{144} = 28\frac{89}{144}$

2. Beispiel: $4\frac{37}{120} - 3\frac{99}{100} = ?$

Hauptnenner (H.N.):

120	2 · 2 · 2 · 3 · 5
100	2 · 2 · 5 · 5
H. N. = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 · 5 = 600	

Lösung:

	37	600
4 ·	120	185 785
— 3	99	
	100	594
		191
		600

Ist der Zähler des gleichnamig gemachten Minuendbruches (185) zu klein, so wird ein Einer der Ganzen in einen gleichnamigen Bruch verwandelt; man ersetzt den zu

kleinen Zähler (185) des Minuenden durch den um ein Ganzes $\left(\frac{600}{600}\right)$ vermehrten

Zähler ($185 + 600 = 785$). Durch einen Punkt neben dem Einer (4.) wird angedeutet, daß dieser um 1 vermindert wurde.

Übungsaufgaben:

15. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ c) $\frac{15}{16} - \frac{3}{20}$ d) $\frac{2}{7} - \frac{4}{21}$

16. a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{8} + \frac{4}{7}$ c) $\frac{4}{7} + \frac{5}{9}$ d) $\frac{5}{9} + \frac{11}{3}$ e) $\frac{11}{3} + \frac{4}{7}$

17. a) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

18. a) $\frac{4}{7} + \frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{8} + \frac{11}{16}$ c) $\frac{11}{16} + \frac{27}{35}$ d) $\frac{27}{35} + \frac{120}{15}$

19. a) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{12} + \frac{9}{15}$ c) $\frac{7}{12} - \frac{5}{18}$

20. a) $\frac{3}{4} + \frac{3}{16}$ b) $\frac{1}{6} + \frac{5}{12}$ c) $\frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}$ d) $\frac{2}{9} - \frac{3}{11} + \frac{4}{15}$

21. a) $\frac{3}{25} + \frac{5}{16} + \frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{9}$ c) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$

22. a) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \frac{7}{10}$ c) $\frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12}$

Übungsaufgaben:

23. a) $\frac{7}{72} + \frac{11}{54} - \frac{5}{36}$ b) $\frac{4}{63} - \frac{13}{126} + \frac{47}{196}$ c) $2\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}$
24. a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{5}{18}$ b) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
25. a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{10}$ b) $\frac{7}{9} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ c) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} - \frac{7}{20}$
26. a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ b) $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ c) $1\frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$
27. a) $4\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2}$ b) $3\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8}$ c) $6\frac{3}{5} + 5\frac{1}{3}$
28. a) $1\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5} + 15\frac{4}{7}$ b) $2\frac{1}{2} + 8\frac{1}{4} + 6\frac{3}{4}$ c) $1\frac{7}{12} + 1\frac{3}{5} + 2\frac{3}{3}$
29. a) $9\frac{5}{8} + 2\frac{13}{16}$ b) $20\frac{1}{3} + 2\frac{3}{4}$ c) $5\frac{1}{6} - 2\frac{3}{8}$
30. a) $15\frac{5}{7} + 10\frac{1}{2}$ b) $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$ c) $5\frac{1}{30} - 2\frac{7}{15}$
31. a) $\frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{11}{15} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10}$ c) $3\frac{4}{5} + 4\frac{3}{7}$
32. a) $\frac{7}{12} + \frac{3}{5} - \frac{8}{15} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{25}{36} - \frac{1}{8} - \frac{5}{24} - \frac{2}{9}$
33. a) $4\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ b) $8\frac{5}{12} - \frac{4}{15}$ c) $16\frac{4}{5} - 9\frac{5}{12}$ d) $25\frac{7}{9} - 16\frac{3}{4}$
34. a) $54\frac{3}{4} - 41\frac{7}{9}$ b) $76\frac{2}{9} - 38\frac{5}{6}$ c) $48\frac{3}{7} - 15\frac{3}{4}$ d) $56\frac{11}{15} - 38\frac{17}{20}$
35. a) $9\frac{9}{10} - 3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$ b) $8\frac{5}{6} - 2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2}$ c) $7\frac{3}{4} - 1\frac{5}{9} - 2\frac{2}{3}$
36. a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ b) $8\frac{3}{4} - \frac{4}{15}$ c) $9\frac{17}{20} - 9\frac{3}{12}$

Übungsaufgaben:

37. a) $25\frac{7}{5} - 5\frac{3}{4}$ b) $5\frac{3}{8} - \frac{1}{20}$ c) $6\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} - 3\frac{4}{5}$
38. a) $9\frac{1}{2} - 3\frac{3}{5} - 2\frac{7}{8}$ b) $124\frac{7}{9} - 36\frac{3}{4} - 17\frac{2}{3} - 23\frac{5}{6}$
39. a) $3\frac{1}{8} - \frac{6}{11} - 1\frac{3}{44}$ b) $125\frac{1}{4} - 36\frac{3}{4} - 17\frac{2}{4} - 1\frac{5}{6}$
40. $56\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4} - 1\frac{3}{8} - 12\frac{7}{9}$
41. $120\frac{1}{2} - 18\frac{3}{4} - 32\frac{5}{8} - 11\frac{3}{4} - 15\frac{7}{12}$
42. a) $8\frac{4}{5} + 9\frac{5}{6} + 3\frac{2}{3}$ b) $7\frac{4}{15} + 8\frac{7}{12} + 14\frac{5}{8}$ c) $18\frac{3}{4} + 27\frac{4}{9} + 36\frac{5}{6} + 45\frac{1}{2}$
43. $82\frac{3}{4} + 65\frac{5}{6} + 36\frac{3}{5} + 77\frac{2}{3} + 136\frac{1}{2}$
44. a) $48\frac{9}{10} + 7\frac{19}{24} + 50\frac{3}{4} + 35\frac{5}{6}$ b) $39\frac{37}{60} + 5\frac{11}{15} + 83\frac{13}{20} + 27\frac{23}{45}$
45. Meine Schwester ist 17 Jahre 8 Monate alt, ich bin $2\frac{5}{6}$ Jahre älter. Wie alt bin ich?
46. Unser Vater wollte $\frac{3}{5}$ Sack Mehl kaufen. Wir baten aber so lange, bis er $\frac{3}{4}$ Sack nahm, denn so gab es 6 kg mehr Mehl zum Kuchenbacken. Wieviel kg wog der volle Sack?
47. Wieviel Schüler sind in der Klasse, wenn 6 Schüler, d. h. $\frac{1}{8}$ der Klasse, das Sportabzeichen erworben haben?
48. Ein Zug, der $\frac{3}{4}$ Stunden Verspätung hatte, traf um 17.15 Uhr am Zielort ein. Wann hätte er planmäßig eintreffen müssen?

1.3.8. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

Merke:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit ihr multipliziert.

Beispiele: $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ oder $\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$

Da das Kürzen die Rechnung vereinfacht, kürzt man immer schon das unausgerechnete Produkt.

Beispiele:

$$a) \frac{17}{36} \cdot 24 = \frac{17 \cdot \overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$$

$$b) \frac{47}{306} \cdot 459 = \frac{47 \cdot \overset{3}{\cancel{459}}}{\underset{2}{\cancel{306}}} = \frac{141}{2} = 70\frac{1}{2}$$

$$c) 73\frac{95}{121} \cdot 99 = 73 \cdot 99 + \frac{95 \cdot \overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{11}{\cancel{121}}} =$$

$$7227 + \frac{855}{11} = 7227 + 77\frac{8}{11} = 7304\frac{8}{11}$$

Übungsaufgaben:

$$49. a) \frac{6}{7} \cdot 9 \quad b) \frac{7}{8} \cdot 9 \quad c) \frac{7}{11} \cdot 8 \quad d) \frac{5}{12} \cdot 7 \quad e) \frac{8}{9} \cdot 8$$

$$50. a) 4 \cdot \frac{3}{5} \quad b) 5 \cdot \frac{1}{10} \quad c) 6 \cdot \frac{2}{3} \quad d) \frac{4}{9} \cdot 2 \quad e) \frac{3}{8} \cdot 4 \quad f) \frac{9}{14} \cdot 28$$

$$51. a) \frac{3}{4} \cdot 5 \quad b) \frac{5}{12} \cdot 9 \quad c) \frac{15}{24} \cdot 6 \quad d) \frac{13}{15} \cdot 12 \quad e) \frac{21}{28} \cdot 7$$

Übungsaufgaben:

$$52. a) \frac{5}{9} \cdot 13 \quad b) \frac{7}{13} \cdot 12 \quad c) \frac{2}{5} \cdot 14 \quad d) \frac{5}{14} \cdot 15 \quad e) \frac{16}{17} \cdot 7$$

$$53. a) \frac{11}{12} \cdot 24 \quad b) \frac{9}{16} \cdot 12 \quad c) \frac{17}{36} \cdot 24 \quad d) \frac{25}{72} \cdot 24 \quad e) \frac{5}{12} \cdot 20$$

$$54. a) 13 \cdot \frac{11}{7} \quad b) 19 \cdot \frac{7}{15} \quad c) 11 \cdot \frac{89}{121} \quad d) 16 \cdot \frac{25}{37} \quad e) 16 \cdot \frac{20}{27}$$

$$55. a) \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} \quad b) \frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{2} \quad c) \frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{2} \quad d) \frac{5}{7} \cdot 1\frac{1}{2}$$

$$56. a) \frac{5}{12} \cdot 9 \quad b) \frac{13}{24} \cdot 6 \quad c) \frac{13}{15} \cdot 12 \quad d) \frac{21}{30} \cdot 15 \quad e) 6\frac{3}{8} \cdot 7 \quad f) 9\frac{5}{12} \cdot 15$$

$$57. a) \frac{3}{12} \cdot 2\frac{4}{5} \quad b) \frac{12}{15} \cdot 2\frac{4}{5} \quad c) \frac{12}{20} \cdot 2\frac{4}{5}$$

$$58. a) 7\frac{3}{4} \cdot 4 \quad b) 6\frac{4}{7} \cdot 8 \quad c) 1\frac{4}{5} \cdot 12 \quad d) 6\frac{2}{3} \cdot 3 \quad e) 7\frac{1}{4} \cdot 6$$

$$59. a) 1\frac{7}{12} \cdot 4 \quad b) 2\frac{3}{8} \cdot 6 \quad c) 3\frac{4}{9} \cdot 6 \quad d) 4\frac{5}{6} \cdot 4 \quad e) 10\frac{1}{2} \cdot 10$$

$$60. a) 16 \cdot 4\frac{3}{8} \quad b) 8 \cdot 9\frac{11}{16} \quad c) 7 \cdot 8\frac{13}{14} \quad d) 6 \cdot 5\frac{13}{15} \quad e) 4 \cdot 9\frac{7}{10}$$

1.3.9. Multiplikation zweier Brüche

Merke:

Man multipliziert zwei Brüche miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Gemischte Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man sie erst zu unechten Brüchen macht und dann ebenfalls Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Vor der Ausführung der Multiplikation ist **stets** zu kürzen, z. B.

$$a) \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{4}{5}$$

$$b) 1\frac{11}{64} \cdot \frac{56}{375} = \frac{\overset{1}{\cancel{75}} \cdot \overset{7}{\cancel{56}}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot \underset{5}{\cancel{375}}} = \frac{7}{40}$$

$$c) 6\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{25 \cdot 16}{4 \cdot 5} = 20$$

Hat man mehr als zwei Brüche oder gemischte Zahlen zu multiplizieren, so setzt man alles auf einen Bruchstrich und kürzt erst einmal, z. B.

$$3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{34} \cdot \frac{10}{111} = \frac{17 \cdot 37 \cdot 10}{5 \cdot 34 \cdot 111} = \frac{1}{3}$$

Übungsaufgaben:

$$61. a) \frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{2} \quad b) \frac{5}{4} \cdot 3\frac{3}{4} \quad c) \frac{1}{5} \cdot 2\frac{9}{10} \quad d) \frac{3}{5} \cdot 6\frac{2}{3} \quad e) 1\frac{4}{7} \cdot 6\frac{7}{9}$$

$$62. a) 12\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6\frac{4}{5} \quad b) 4\frac{5}{7} \cdot 8\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \quad c) 6\frac{3}{8} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{10}{12}$$

$$63. a) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \quad b) \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} \quad c) \frac{3}{7} \cdot \frac{12}{13} \quad d) \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{17}$$

$$64. a) \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} \quad b) \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{9} \quad c) \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{8} \quad d) \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \quad e) \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}$$

$$65. a) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \quad b) \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \quad c) \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} \quad d) \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \quad e) \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{9}$$

$$66. a) \frac{3}{20} \cdot \frac{7}{11} \quad b) \frac{6}{11} \cdot \frac{113}{253} \quad c) \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \quad d) \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{9}$$

$$67. a) 1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \quad b) 2\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{22} \quad c) 3\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \quad d) 17\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}$$

$$68. a) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \quad b) \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} \quad c) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

Übungsaufgaben:

$$69. a) \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{11}{12} \quad b) \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{11} \quad c) 4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{3} \quad d) 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{5}{6}$$

$$70. a) 1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \quad b) 2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \quad c) \frac{3}{4} \cdot 1\frac{13}{15} \cdot \frac{5}{7}$$

$$71. a) 2\frac{3}{4} \cdot 5\frac{6}{7} \cdot 8\frac{9}{10} \quad b) 6\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{75} \cdot 4\frac{1}{2} \quad c) 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5}$$

$$72. a) 8\frac{5}{7} \cdot 9\frac{3}{6} \cdot 17\frac{5}{12} \quad b) 2\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \quad c) 12\frac{3}{4} \cdot 5\frac{7}{15} \cdot 2\frac{4}{7} \cdot 8\frac{11}{12}$$

1.3.10. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

Merke:

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner unverändert läßt oder — wenn der Zähler nicht teilbar ist — den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.

Vor dem Ausmultiplizieren ist, falls möglich, zu kürzen.

$$\text{Beispiele: } a) \frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4} \quad b) \frac{14}{15} : 7 = \frac{2}{15}$$

$$c) \frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{12} \quad d) \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$

$$e) \frac{15}{8} : 6 = \frac{15}{8 \cdot 6} = \frac{5}{16} \quad f) \frac{35}{36} : 10 = \frac{35}{36 \cdot 10} = \frac{7}{72}$$

Ersetzt man in den vorstehenden Aufgaben das Rechenzeichen ($:$) durch einen Bruchstrich, so lauten die Aufgaben:

$$\frac{3}{4} = ? \quad \text{oder} \quad \frac{14}{15} = ?$$

Dabei entstehen sog. Doppelbrüche. Der Hauptbruchstrich ist besonders zu kennzeichnen und muß in Höhe des Gleichheitszeichens stehen.

Um die Doppelbruchstriche zu vermeiden, verwendet man unter Berücksichtigung der Bruchregel **einen** gemeinsamen Bruchstrich, z. B.

$$\frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}; \quad \frac{14}{\frac{15}{7}} = \frac{14 \cdot 1}{15 \cdot \frac{1}{7}} = \frac{2}{15}$$

Merke:

Bei gemischten Zahlen sind erst die Ganzen und dann die Brüche zu dividieren.

Beispiel: $4\frac{1}{8} : 2 = 2 + \frac{1}{8} : 2 = 2 + \frac{1}{16} = 2\frac{1}{16}$

Sind die Ganzen zu **klein**, oder bleibt bei der Division der Ganzen ein Rest, so bringt man sie auf den **Nenner** des Bruches und dividiert den **unechten Bruch**.

Beispiele: a) $3\frac{2}{3} : 4 = \frac{11}{3} : 4 = \frac{11 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{11}{12}$

b) $25\frac{1}{2} : 17 = \frac{51}{2} : 17 = \frac{51}{2 \cdot 17} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Übungsaufgaben:

73. a) $\frac{2}{3} : 2$ b) $\frac{6}{7} : 3$ c) $\frac{8}{9} : 2$ d) $\frac{3}{5} : 2$ e) $\frac{2}{3} : 3$
74. a) $\frac{5}{6} : 2$ b) $\frac{6}{5} : 2$ c) $\frac{2}{3} : 5$ d) $\frac{5}{6} : 8$ e) $\frac{7}{12} : 9$ f) $\frac{11}{15} : 12$
75. a) $\frac{3}{5} : 3$ b) $\frac{15}{19} : 5$ c) $\frac{8}{9} : 4$ d) $\frac{12}{13} : 3$ e) $\frac{16}{17} : 4$
76. a) $\frac{6}{7} : 4$ b) $\frac{12}{13} : 9$ c) $\frac{4}{15} : 12$ d) $\frac{5}{13} : 15$ e) $\frac{12}{19} : 8$
77. a) $\frac{38}{35} : 7$ b) $\frac{32}{45} : 8$ c) $\frac{84}{95} : 12$ d) $\frac{135}{148} : 15$ e) $\frac{144}{180} : 16$
78. a) $\frac{21}{25} : 7$ b) $\frac{39}{70} : 52$ c) $\frac{7}{18} : 19$ d) $\frac{256}{363} : 32$ e) $\frac{17}{33} : 15$

Übungsaufgaben:

79. a) $6\frac{2}{3} : 2$ b) $24\frac{8}{11} : 4$ c) $35\frac{14}{15} : 7$ d) $27\frac{2}{3} : 9$
80. a) $3\frac{4}{5} : 8$ b) $7\frac{5}{8} : 12$ c) $10\frac{3}{5} : 15$ d) $18\frac{2}{3} : 24$ e) $23\frac{5}{6} : 32$
81. a) $3\frac{2}{5} : 2$ b) $4\frac{1}{2} : 3$ c) $5\frac{2}{5} : 4$ d) $6\frac{1}{4} : 5$ e) $7\frac{2}{3} : 6$
82. a) $3\frac{1}{3} : 10$ b) $6\frac{2}{3} : 5$ c) $7\frac{1}{2} : 5$ d) $51\frac{1}{3} : 2$
83. a) $15\frac{3}{4} : 7$ b) $11\frac{12}{13} : 14$ c) $29\frac{2}{5} : 9$ d) $36\frac{2}{3} : 45$
84. a) $\left(5\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}\right) : 4$ b) $\left(11\frac{1}{30} - 10\frac{1}{2}\right) : 12$ c) $\left(174\frac{2}{3} - 148\frac{65}{69}\right) : 25$

1.3.11. Division zweier Brüche

Merke:

Man dividiert durch einen Bruch (Divisor), indem man mit dem reziproken (umgekehrten) Wert multipliziert.

Gemischte Zahlen werden vor dem Dividieren in unechte Brüche verwandelt.

Beispiele: a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

b) $3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{7} : \frac{3}{14} = \frac{1}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{2}{3}$

d) $3\frac{1}{5} : 1\frac{7}{25} = \frac{16}{5} : \frac{32}{25} = \frac{16 \cdot 5}{5 \cdot 32} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

1.3.12. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch

Merke:

Man dividiert eine ganze Zahl durch einen Bruch, indem man ebenfalls mit dem reziproken Wert des Bruches multipliziert.

Beispiele: a) $6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ b) $12 : \frac{4}{5} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15$

Übungsaufgaben:

85. a) $\frac{6}{7} : \frac{2}{7}$ b) $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$ c) $1 : \frac{1}{5}$

86. a) $\frac{8}{9} : \frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{12} : \frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{9} : \frac{1}{2}$ d) $\frac{6}{7} : \frac{3}{5}$ e) $\frac{5}{8} : \frac{11}{32}$ f) $\frac{12}{14} : \frac{3}{4}$

g) $\frac{105}{120} : \frac{3}{4}$ h) $\frac{84}{108} : \frac{3}{4}$ i) $\frac{70}{153} : \frac{3}{4}$

87. a) $\frac{75}{98} : \frac{25}{98}$ b) $3\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ c) $7\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2}$

88. a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5} : \frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{7} : \frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5} : \frac{1}{2}$

89. a) $\frac{7}{9} : \frac{4}{5}$ b) $\frac{13}{15} : \frac{7}{12}$ c) $\frac{19}{24} : \frac{14}{15}$ d) $\frac{27}{35} : \frac{19}{21}$

90. a) $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{5} : 1\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{8} : 2\frac{1}{3}$

91. a) $6\frac{1}{2} : 2\frac{3}{5}$ b) $8\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$ c) $5\frac{3}{4} : 3\frac{5}{6}$ d) $7\frac{1}{3} : 2\frac{2}{5}$ e) $12\frac{3}{4} : 10\frac{1}{2}$

92. a) $4 : \frac{4}{7}$ b) $8 : 5\frac{1}{3}$ c) $10 : 7\frac{1}{2}$

93. a) $\frac{5}{8} : 1\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9} : 1\frac{1}{3}$ c) $\frac{10}{22} : 1\frac{1}{3}$

94. a) $3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2}$ b) $4\frac{4}{5} : 3\frac{1}{3}$ c) $4\frac{5}{6} : 5\frac{1}{2}$ d) $5\frac{1}{8} : 2\frac{1}{4}$ e) $17\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}$

95. a) $112\frac{1}{2} : 6\frac{2}{3}$ b) $6\frac{2}{9} : 112\frac{1}{2}$

1.4. Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen

Merke:

Dezimalbrüche sind Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 usw. Links vom Komma stehen die Ganzen, rechts die Dezimalstellen.

Echte Dezimalbrüche haben keine Ganzen ($0,4 = \frac{4}{10}$), unechte Dezimalbrüche bestehen aus Ganzen und einem echten Dezimalbruch.

Beispiele: a) $1,6 = 1\frac{6}{10} = 1 + 0,6$
 b) $\frac{1}{10} = 0,1$ c) $1\frac{7}{10} = 1,7$ d) $\frac{12}{100} = 0,12$
 e) $8\frac{3}{100} = 8,03$ f) $12\frac{50}{1000} = 12,050$

Bei einem Dezimalbruch können beliebig viele Nullen angehängt oder fortgelassen werden.

$$0,2 = 0,20 = 0,200 = \dots \text{ oder } 0,800 = 0,80 = 0,8$$

Dezimalbrüche werden auf eine bestimmte Stellenzahl abgerundet, indem man die übrigen Dezimalstellen fortläßt. Ist die erste fortfallende Ziffer kleiner als 5, so läßt man den Rest ohne weiteres fort; ist sie gleich 5 oder größer, so wird die letzte stehenbleibende Ziffer um 1 erhöht.

Folgende Dezimalbrüche sind erst auf 4, dann auf 2 Stellen abzurunden. Die Abrundung wird durch das Zeichen $\approx$ angedeutet (nahezu gleich):

a) $0,370695 \approx 0,3707 \approx 0,37$
 b) $0,254832 \approx 0,2548 \approx 0,25$
 c) $2,148553 \approx 2,1486 \approx 2,15$

1.4.1. Addition von Dezimalbrüchen

Merke:

Dezimalbrüche addiert man, indem man sie so untereinander schreibt, daß Komma unter Komma steht.

Beispiele:

0,358	oder dafür	0,3580
+ 0,7		+ 0,7000
+ 81,5267		+ 81,5267
+ 0,004		+ 0,0040
82,5887		82,5887

Es ist immer darauf zu achten, daß Einer zu Einern, Zehntel zu Zehnteln, Hundertstel zu Hundertsteln usw. addiert werden.

1.4.2. Subtraktion von Dezimalbrüchen

Bei der Subtraktion von Dezimalbrüchen ist ebenfalls **Komma unter Komma** zu setzen.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 10,14 \\ - 7,28 \\ \hline 2,86 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 0,40 \\ - 0,36 \\ \hline 0,04 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 125,3714 \\ - 74,2906 \\ \hline 51,0808 \end{array}$$

1.4.3. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl

Merke:

Ein Dezimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt werden von rechts nach links so viel Dezimalstellen abgestrichen wie der Dezimalbruch hat.

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 0,7 \cdot 12 = 8,4 & (\text{eine Stelle}) \\ \text{b) } 0,07 \cdot 1 = 0,07 & (\text{zwei Stellen}) \\ \text{c) } 0,008 \cdot 5 = 0,040 & (\text{drei Stellen}) \end{array}$$

Zuerst ist also stets die entsprechende Anzahl Dezimalstellen abzustreichen, dann können die überflüssigen Nullen am Ende fortgelassen werden. Ein Dezimalbruch wird mit **10, 100, 1000**, usw. multipliziert, indem man das Komma ein, zwei, drei bzw. mehr Stellen nach **rechts** rückt.

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 0,152 \cdot 10 = 1,52 & (\text{Komma um 1 Stelle nach rechts}) \\ \text{b) } 0,152 \cdot 100 = 15,2 & (\text{Komma um 2 Stellen nach rechts}) \\ \text{c) } 3,256 \cdot 1000 = 3256 & (\text{Komma um 3 Stellen nach rechts}) \end{array}$$

1.4.4. Multiplikation zweier Dezimalbrüche

Merke:

Dezimalbrüche werden ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt streicht man von rechts nach links so viel Dezimalstellen ab, wie die Faktoren zusammen besitzen.

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 & \text{b) } 0,2 \cdot 0,03 = 0,006 \\ \text{c) } 0,1 \cdot 0,004 = 0,0004 & \text{d) } 0,12 \cdot 0,12 = 0,0144 \\ \text{e) } 0,002 \cdot 0,19 = 0,00038 & \text{f) } 0,123 \cdot 0,9 = 0,1107 \end{array}$$

1.4.5. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl

Merke:

Eine ganze Zahl wird durch einen Dezimalbruch dividiert, als wenn er eine ganze Zahl wäre. Man setzt im Quotienten das Komma, sobald es im Dividenden überschritten wird.

Beispiel: $31,452 : 3 = 10,484$

$$\begin{array}{r} 31,452 : 3 = 10,484 \\ 3 \overline{) 31,452} \\ \underline{30} \\ 14 \\ \underline{12} \\ 25 \\ \underline{24} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

In diesem Beispiel wird wie folgt gerechnet:

$3 : 3 = 1$, dann $1 : 3 = 0$, Rest 1. Nun überschreiten wir das Komma im Dividenden und haben deshalb im Quotienten hinter 10 das Komma zu setzen. Dann wird weiter dividiert $14 : 3 = 4$, Rest 2, $25 : 3 = 8$, Rest 1, $12 : 3 = 4$.

$$\begin{array}{r} 0,2750 : 18 = 0,0152 \approx 0,015 \\ 18 \overline{) 0,2750} \\ \underline{18} \\ 95 \\ \underline{90} \\ 50 \\ \underline{36} \\ 14 \end{array}$$

Geht die Division nicht auf, so hängt man an den Dezimalbruch so viele Nullen an, bis die Rechnung aufgeht oder bis im Quotienten die verlangte Stellenzahl erreicht ist.

Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000 usw. dividiert, indem man das Komma um so viele Stellen nach links rückt, wie die 10, 100, 1000 usw. Nullen besitzen.

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 0,7 : 10 = \frac{7}{10} : 10 = \frac{7}{100} = 0,07 & (\text{Komma um eine Stelle nach links}) \\ \text{b) } 0,7 : 100 = \frac{7}{10} : 100 = \frac{7}{1000} = 0,007 & (\text{Komma um zwei Stellen nach links}) \end{array}$$

1.4.6. Division zweier Dezimalbrüche

Merke:

Man dividiert zwei Dezimalbrüche, indem man zuerst in beiden das Komma um so viele Stellen nach rechts rückt, wie der Divisor besitzt. Dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl.

Beispiele:

$$\begin{array}{l} \text{a) } 0,34 : 2,5 \\ \text{oder } 3,4 : 25 = 0,136 \\ \begin{array}{r} 25 \overline{) 34} \\ \underline{90} \\ 75 \\ \underline{150} \\ 150 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 0,00123 : 0,19 \\ \text{oder } 0,123 : 19 = 0,00647 \\ \approx 0,0065 \\ \begin{array}{r} 19 \overline{) 123} \\ \underline{114} \\ 90 \\ \underline{76} \\ 140 \\ \underline{133} \end{array} \end{array}$$

Übungsaufgaben:

96. $0,29 + 125,2 + 0,6067 + 2,35 + 10,05678 + 167,3044 = ?$

97. $279,5584 - 199,46752 = ?$

98. a) $1,75 \cdot 327$

b) $7,44 \cdot 1,96$

c) $3,77 \cdot 3$

d) $10,63 \cdot 5,6$

e) $0,004 \cdot 8,13$

f) $0,0025 \cdot 0,0007$

99. a) $0,6274 \cdot 319$

b) $1,622 \cdot 0,625$

c) $34,07 \cdot 2,008$

d) $16,19 \cdot 18$

e) $0,34 \cdot 0,49$

f) $64,345 \cdot 199,791$

100. a) $0,000748 \cdot 48$

b) $96,6 \cdot 1,75$

c) $8,61 \cdot 10000$

d) $421,002 \cdot 0,009$

101. a) $0,0364 : 26$

b) $10,894 : 0,13$

c) $614,3 : 10,0$

d) $38,13 : 12,3$

e) $76645,7 : 234,5$

102. a) $27,306 : 36$

b) $25,873 : 9,4$

c) $0,344 : 0,012$

d) $13,3 : 65,15$

e) $0,0024 : 0,6$

103. a) $0,009408 : 98$

b) $0,321 : 0,0002$

c) $8324,6 : 0,24$

d) $426,33 : 14,3$

e) $67200,3 : 24,6$

1.4.7. Endliche und unendliche Dezimalbrüche

Jeder Bruch ist eine unausgeführte Division ($\frac{3}{4} = 3 : 4$). Führt man die Division aus, so entsteht ein Dezimalbruch.

Es gibt Brüche, die nach einer bestimmten Stellenzahl enden ($\frac{1}{8} = 0,125$). Diese Brüche heißen daher **endliche Dezimalbrüche**.

Bei anderen Brüchen kann die Rechnung **nie zu Ende** geführt werden ($\frac{1}{3} = 0,333 \dots$); sie heißen **unendliche Dezimalbrüche**. Dabei kehren gewisse Ziffern oder Ziffernfolgen regelmäßig wieder; man bezeichnet diese Ziffern oder Zifferngruppen als die „**Periode**“ des unendlichen Dezimalbruchs.

Es gibt periodische Dezimalbrüche mit **einstelliger** ($\frac{1}{3}$), **zweistelliger** ($\frac{7}{11}$), **dreistelliger** usw. Periode.

Man braucht stets nur so weit zu rechnen, bis die **Periode** erkannt wird. Die Periode wird nur einmal hingeschrieben und durch einen darübergesetzten **Strich** sowie **drei Punkte** angedeutet.

$$\frac{1}{3} = 0,3\overline{3} \dots \quad \frac{7}{11} = 0,6\overline{36} \dots$$

Brüche, bei denen nur die **Primfaktoren 2 und 5** im Nenner vorkommen, ergeben stets **endliche Dezimalbrüche**.

Alle übrigen Brüche ergeben **unendliche periodische Dezimalbrüche**.

Übungsaufgaben:

Folgende Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln:

104. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{24}{25}$ e) $\frac{3}{18}$ f) $\frac{47}{50}$ g) $\frac{13}{40}$ h) $\frac{117}{300}$

105. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{118}{125}$ d) $2\frac{2}{5}$ e) $9\frac{7}{8}$ f) $7\frac{49}{50}$ g) $12\frac{13}{1000}$

106. a) $\frac{1}{6}$ b) $23\frac{2}{5}$ c) $49\frac{2}{9}$ d) $56\frac{5}{6}$ e) $17\frac{1}{6}$ f) $3\frac{3}{40}$ g) $7\frac{9}{125}$

1.4.8. Addition und Subtraktion von Brüchen und Dezimalbrüchen

Im allgemeinen kann man **Dezimalbrüche leichter addieren und subtrahieren** als gewöhnliche Brüche, weil für die Dezimalbrüche der Hauptnenner nicht erst gesucht zu werden braucht.

Beispiel:

$$2\frac{1}{5} + 0,375 + 4\frac{3}{4} + 3,5$$

a) Umwandlung in Dezimalbrüche:

$$2,2 + 0,375 + 4,75 + 3,5 = 10,825$$

b) Umwandlung in gewöhnliche Brüche:

$$2\frac{1}{5} + \frac{3}{8} + 4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2} = \frac{9}{40} + \frac{15}{40} + \frac{30}{40} + \frac{20}{40} = 10\frac{33}{40}$$

1.4.9. Multiplikation und Division beider Brucharten

Im allgemeinen kann man **gewöhnliche Brüche leichter multiplizieren und dividieren** als Dezimalbrüche.

Beispiel:

$$0,38 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{0,38 \cdot 3}{4} = 0,285 \text{ oder } \frac{19 \cdot 3}{100 \cdot 4} = \frac{57}{200}$$

Übungsaufgaben:

107. a) $\frac{3}{4} + 0,625$ b) $0,8 + \frac{2}{5} + 0,75$ c) $1,48 + 7\frac{1}{2} + 5,9$

108. a) $0,048 \cdot 1\frac{3}{8}$ b) $0,45 \cdot \frac{7}{9}$ c) $\frac{3}{7} \cdot 0,1$ d) $1\frac{1}{7} \cdot 0,7$ e) $7\frac{1}{3} \cdot 0,3$

109. a) $4\frac{4}{5} + 0,4$ b) $10 - 3\frac{3}{4}$ c) $1\frac{1}{2} + 2,5$ d) $0,5 \cdot 1\frac{3}{5}$

110. a) $84,25 : \frac{3}{4}$ b) $0,25 : \frac{5}{10}$ c) $725,40 : \frac{4}{8}$ d) $44,6 : \frac{2}{3}$

e) $2536,0 : \frac{8}{16}$ f) $3,65 : \frac{2}{15}$

1.4.10. Bruchausdrücke mit Dezimalbrüchen im Zähler und Nenner

Sehr oft kommen Bruchausdrücke vor, die Dezimalbrüche im Zähler und im Nenner enthalten:

$$\frac{4,73 \cdot 10}{0,01 \cdot 9}$$

Damit die Dezimalbrüche wegfallen, wird der Ausdruck mit **100 erweitert**, d. h., Zähler und Nenner werden mit 100 multipliziert. Hierdurch wird das **Komma** der Dezimalbrüche im Nenner und im Zähler um **zwei Stellen** nach **rechts** gerückt, damit es wegfällt:

$$\frac{473 \cdot 10}{0,01 \cdot 9} = \frac{4730}{9} = 525,5 \dots \approx 525,56$$

Übungsaufgaben:

111. a) $\frac{21,06 \cdot \frac{3}{4}}{26 \cdot 0,0009}$ b) $\frac{992,1 \cdot \frac{2}{3}}{100\frac{2}{3}}$

112. a) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$ b) $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{15}}$ c) $\frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{9}}$ d) $\frac{12}{\frac{4}{5}}$

113. a) $\frac{3 - \frac{2}{5}}{8}$ b) $\frac{9}{4 - 1\frac{3}{5}}$ c) $\frac{1 + \frac{5}{9}}{21}$

114. a) $\frac{23,75 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{100}$ b) $\frac{7 \cdot 0,6 + \frac{2}{9} \cdot 3,6}{3\frac{1}{6} \cdot 0,27 - 1,24 \cdot \frac{1}{8}}$

115. a) $\frac{\frac{4}{5} \cdot 2,5 + \frac{3}{4} \cdot 0,8}{\frac{4}{5} \cdot 2,5 - \frac{3}{4} \cdot 0,8}$ b) $\frac{\frac{4}{5} \cdot 2,5 - 3,75 \cdot \frac{4}{5}}{4,8 \cdot 2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} \cdot 0,8}$

2. Buchstabenrechnung

2.1. Allgemeines

Eine Vereinfachung von Rechenaufgaben besteht in der Anwendung von Formeln. Besonders in der Technik wird hiervon häufig Gebrauch gemacht. Bekannt ist z. B. für das Ohmsche Gesetz die Formel

$$I = \frac{U}{R}$$

Setzt man für die einzelnen Buchstaben bestimmte Zahlen ein, so wird die Formel zu einer einfachen bekannten Rechenaufgabe mit **bestimmten Zahlen**. Da aber in den Formeln **Buchstaben** verwendet werden, ist eine gewisse Fertigkeit in der Anwendung von Buchstaben als Zahlen unumgänglich. **Buchstaben** werden als **unbestimmte** oder **allgemeine** Zahlzeichen verwandt.

Gewöhnlich rechnen wir nur mit **bestimmten Zahlen**,

1, 2, 3, 4, 5, 6 usw.

man kann aber auch genauso mit **unbestimmten** oder **allgemeinen Zahlen** (Buchstaben) rechnen.

$a, b, c, d, \dots x, y, z, R, U, V$ usw.

Beim Rechnen mit **unbestimmten** oder **allgemeinen Zahlen** (Buchstaben) kann für einen Buchstaben (a) jede beliebige Zahl, z. B. 2 oder 6,5, festgelegt werden. **Innerhalb einer Aufgabe muß jedoch der ausgewählte Buchstabe stets denselben Zahlenwert beibehalten** (z.B. $a = 2$).

Beispiel: $a + b + a + c = ?$

für $a = 2, b = 3, c = 4$ ergibt sich:

$$2 + 3 + 2 + 4 = 11$$

Für das Rechnen mit **unbestimmten** (allgemeinen) **Zahlen** gelten die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit **bestimmten Zahlen**.

Die Aufeinanderfolge der Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. wird als eine **Zahlenreihe** bezeichnet. Sie entsteht durch das wiederholte Hinzufügen der **Zahleneinheit** „1“. Bildlich kann man die **Zahlenreihe** durch eine Reihe von Punkten darstellen, die man auf einem Strahl, dem **Zahlenstrahl**, vom Anfangspunkt 0 an in gleichen Abständen abträgt.

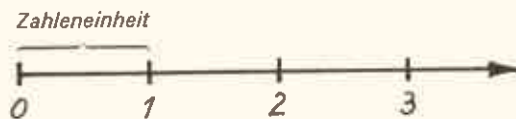


Abb. 2.1 — Zahlenstrahl

2.1.1. Addition von natürlichen Zahlen

Bei der Bildung von Summen entstehen in den folgenden Beispielen keine Schwierigkeiten:

Beispiel: $3 + 4 = 7$ oder $a + b = c$

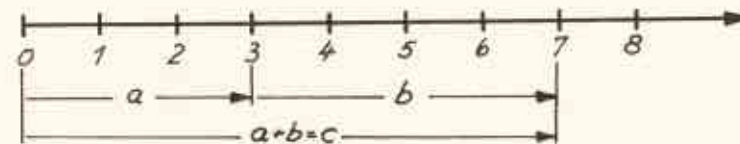


Abb. 2.2 — Bildliche Addition von Summanden

Auf dem Zahlenstrahl werden die Summanden von links nach rechts aneinandergefügt (Abb. 2.2).

Die Zahlen a und b sind die **Summanden** und c ist hieraus die **Summe**.

Beispiel: $a + b + c = ?$

Folgende Werte sind einzusetzen:

1) $a = 2, b = 3, c = 4$

2) $a = 15, b = 20, c = 30$

3) $a = 2,5, b = 4,5, c = 6$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} 1) a + b + c = ? & 2) a + b + c = ? & 3) a + b + c = ? \\ 2 + 3 + 4 = 9 & 15 + 20 + 30 = 65 & 2,5 + 4,5 + 6 = 13 \end{array}$$

Wir erkennen aus diesem Beispiel, daß jeder Buchstabe in **verschiedenen** Rechnungen eine ganz beliebige Größe darstellen kann. Innerhalb derselben Rechnung muß der Wert stets derselbe sein.

Merke:

1. Eine Summe gleicher Summanden

$$\text{wie } a + a + a \quad \text{oder} \quad b + b + b + b$$

$$\text{schreibt man abkürzend: } 3 \cdot a \quad \text{oder} \quad 4 \cdot b$$

2. Die Ziffer (3 bzw. 4) bei einem Buchstaben nennt man **Beizahl** oder **Koeffizient**. Das Malzeichen (den Punkt) zwischen Ziffer und Buchstaben ($3 \cdot a = 3a$) kann man weglassen.

3. Gleichbenannte allgemeine Zahlen mit verschiedenen Beizahlen werden addiert, indem man die Beizahlen addiert.

Beispiel: $2a + 3a = 5a$
für $a = 2$ ergibt sich:
 $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5 \cdot 2$

Bildliche Darstellung:

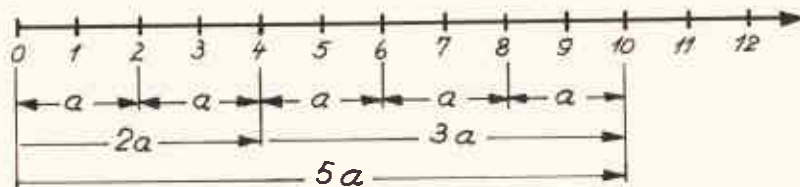


Abb. 2.3 — Addition von Summanden

Auf dem Zahlenstrahl werden die Summanden von links nach rechts aneinandergefügt.

2.1.2. Subtraktion von natürlichen Zahlen

Beispiel: $8 - 3 = 5$
 $a - b = c$



Abb. 2.4

Addition und Subtraktion sind **entgegengesetzte** Rechnungsarten. Deshalb muß der Subtrahend b in entgegengesetzte Richtung, also nach links, an den Minuenden a angetragen werden.

Merke:

1. Bei der Subtraktion von allgemeinen Zahlen werden die Beizahlen subtrahiert.

Beispiel: $12a - 6a = 6a$

2. Es dürfen nur gleichbenannte Zahlen subtrahiert bzw. addiert werden.

Beispiel: $12a - 8a + 6b - 2b = 4a + 4b$

3. Gleichbenannte Summanden in Bruchform müssen vor dem Addieren oder Subtrahieren gleichnamig gemacht werden.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}c + \frac{2}{5}a + \frac{1}{2}c &= \frac{1}{3}a + \frac{2}{5}a + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}c \\ &= \frac{5}{15}a + \frac{6}{15}a + \frac{1}{4}c + \frac{2}{4}c \\ &= \frac{11}{15}a + \frac{3}{4}c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } 4\frac{1}{2}z + 5\frac{2}{3}y - 3\frac{1}{6}z - 4\frac{2}{9}y &= 4\frac{3}{6}z - 3\frac{1}{6}z + 5\frac{6}{9}y - 4\frac{2}{9}y \\ &= 1\frac{2}{6}z + 1\frac{4}{9}y \\ &= 1\frac{1}{3}z + 1\frac{4}{9}y \end{aligned}$$

4. Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert. Der Nenner bleibt unverändert.

$$\text{Beispiel: } \frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} = \frac{a + b + c}{e}$$

Übungsaufgaben:

116. a) $3a + a + 2a$ b) $6a + 9a + 16a$ c) $b + 12b + 3b$
117. a) $2e + 5e + 4e$ b) $2n + 50n + 4n + n$ c) $7b + 0,5b$
118. a) $4a + 7a + a + 8a + 5a$ b) $15a + 32b + 8b + 16a$
119. $12x + 8y + 16x + 15y + 10y$
120. $3x + 4y + 3a + 2x + 4a + 10y$
121. a) $0,8b + 2,2b + 7,6b$ b) $0,4ab + 8,2ab + ab$

Übungsaufgaben:

122. a) $\frac{c}{5} + \frac{c}{10} + \frac{c}{5} + 2\frac{c}{10}$ b) $0,7d + d + 2\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d$

123. a) $3\frac{1}{4}d + 1\frac{1}{2}d + \frac{1}{3}d$ b) $2\frac{1}{4}z + 3\frac{1}{5}z + \frac{1}{10}z$

c) $\frac{1}{4}a + \frac{1}{5}d + \frac{7}{10}a + \frac{3}{4}d$

124. a) $10ab + \frac{a}{4} + 2\frac{1}{2}a + 0,7ab$ b) $10,2bx + 9,6ax + 0,8bx + 0,1ax$

125. a) $4x + \frac{4}{6}y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$ b) $2\frac{1}{4}b + 2\frac{1}{8}c + 2\frac{3}{4}b + 3\frac{3}{8}c + 1\frac{1}{4}c$

126. Setzen Sie in den folgenden Aufgaben für $a = 2$, $b = 3$ und $x = \frac{1}{2}$ ein:

a) $6b + 4a + 3x$ b) $1,2a + 4,2x + 2,5b$ c) $1\frac{1}{3}b + 3\frac{1}{6}a + 2\frac{1}{4}x$

2.1.3. Relative Zahlen

Während die Addition natürlicher Zahlen immer wieder eine natürliche Zahl ergibt, ist das bei der Subtraktion nicht immer der Fall.

Bei der Bildung von Differenzen kommt man sehr bald an einen kritischen Punkt, z. B. $4 - 4 = ?$ oder sogar $4 - 5 = ?$

Die Anwendungsmöglichkeit von **natürlichen Zahlen** stößt hier auf eine Grenze. Man ist deshalb gezwungen, die sogenannten „**relativen Zahlen**“ einzuführen. Der Ausdruck „relativ“ heißt „bezüglich“. Er besagt, daß diese Zahlen Bezug nehmen auf einen bestimmten **Ausgangspunkt**. Dieser Ausgangspunkt ist die **Null**.

Ein lehrreiches Beispiel ist hierfür das **Thermometer**, bei dem sich die Quecksilbersäule bei **Temperaturzunahme verlängert** und bei **Temperaturabnahme verkürzt**. Bei dem Vergleich der augenblicklichen Temperatur mit dem **Gefrierpunkt** (0°) spricht man von **Wärme** oder **Kälte**.

Den Gradzahlen (Wärmegrade), die die Temperaturen „über 0° “ andeuten, gibt man das **Vorzeichen +**, den Gradzahlen „unter 0° “ im Gegensatz dazu das **Vorzeichen —**.

Solche Zahlen, die nur in Bezug auf einen Ausgangspunkt einen bestimmten Sinn haben, heißen „**relative Zahlen**“. Im Gegensatz dazu heißen Zahlen, die für sich allein einen bestimmten Wert darstellen, „**absolute Zahlen**“.

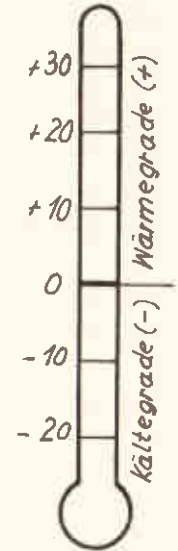


Abb. 2.5 — Relative Zahlen am Thermometer

Ähnliche Fälle, bei denen von einem Nullpunkt nach zwei entgegengesetzten Richtungen gezählt wird, liegen beim Bestimmen der Höhenlagen über und unter dem Meeresspiegel oder bei der Betrachtung von **Vermögen** und **Schulden** vor. Schulden und Vermögen sind **entgegengesetzte Größen**, die bestimmt werden nach einem Besitz von 0 DM.

Auch in der reinen Arithmetik haben wir es mit **relativen Zahlen** zu tun. Ist z. B. in einer Subtraktionsaufgabe der Subtrahend größer als der Minuend (z. B. in der Aufgabe: $5 - 8$), so würde auf unserem **Zahlenstrahl** ein Überschreiten der Null nötig sein. So gelangt man zu Zahlen, die jenseits der Null liegen. Man denkt sich die Zahlengerade von Null aus nach links (in gleicher Weise wie nach rechts) verlängert.

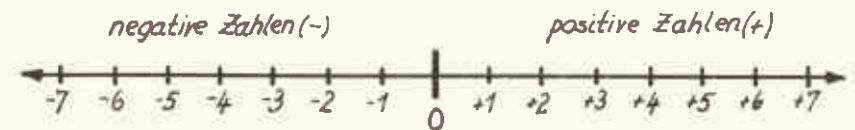


Abb. 2.6 — Relative Zahlen

Die Zahlen **rechts** von Null heißen „**positive Zahlen**“, die Zahlen **links** von Null heißen „**negative Zahlen**“. Um die beiden Arten zu unterscheiden, gibt man den **positiven** das Vorzeichen **+** und den **negativen** das Vorzeichen **—**.

Die **positiven** und **negativen** Zahlen heißen **relative Zahlen**.

Die Plus- und Minuszeichen haben von jetzt ab doppelte Bedeutung. Sie sind **Rechenzeichen** und **Vorzeichen**.

Die **Rechenzeichen** + und — werden bei der **Addition** und **Subtraktion** von Zahlen verwendet.

Die **Vorzeichen** + und — deuten an, ob es sich um **positive** oder **negative** Zahlen handelt. Die Vorzeichen schließt man mit ihrer Zahl in eine Klammer ein (—5). Besitzt eine Zahl kein Vorzeichen, so gilt sie als **positiv**.

Durch die Einführung der **negativen** Zahlen ist es möglich, jede **Subtraktion** als eine **Addition** anzusehen, so ist z. B.

$$12 - 6 + 3 - 4 = 12 + (-6) + 3 + (-4)$$

Aus der Subtraktion — 6 ist also die Addition + (— 6) einer **negativen** Zahl geworden.

Je weiter eine Zahl in der Zahlengeraden **rechts** steht, desto **größer** ist sie.

Beispiel: (—1) ist **größer** als (—2); (—4) ist **größer** als (—6); (+1) ist **größer** als (—1) usw.

Die Beziehungen „größer als“ und „kleiner als“ können auch durch Zeichen ausgedrückt werden:

z. B. statt (+5) ist **größer** als (+3) schreibt man
 $(+5) > (+3)$,

statt (—1) ist **kleiner** als (+1) schreibt man
 $(-1) < (+1)$.

Ähnlich wie **bestimmte** Zahlen kann man auch **unbestimmte** Zahlen (**Buchstaben**) in der Zahlengeraden verwenden und ihre Größen vergleichen:

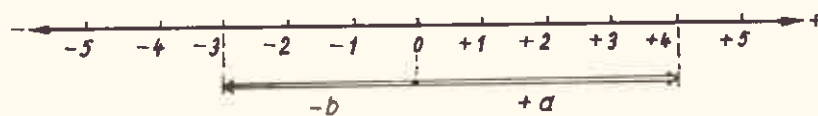


Abb. 2.7

Zum Verständnis für die Anwendung von bestimmten oder unbestimmten Zahlen, die mit **Vorzeichen** versehen sind, stellen wir den Begriff „Vorzeichen“ mit einem **Richtungspfeil** dar. Positive Zahlen erhalten einen Pfeil nach **rechts** (→); negative Zahlen erhalten einen Pfeil nach **links** (←). Die **Länge** des Pfeils entspricht der **Größe** der Zahl. Mit den Richtungspfeilen können wir uns **Additionen** und **Subtraktionen** von **relativen** Zahlen erklären. Hierüber sollen uns die Beispiele in dem nächsten Abschnitt Auskunft geben.

2.2. Addition und Subtraktion von bestimmten und unbestimmten Zahlen, die ein Vorzeichen besitzen (relative Zahlen)

2.2.1. Addition von relativen Zahlen

Bei der **Addition** von **relativen** Zahlen fügen wir einen **Pfeil** an den anderen an. Die **Gesamtlänge** des Summenpfeils ergibt die **Summe**.

1. Beispiel:

$$3 + (+5) = 3 + 5$$

$$a + (+b) = a + b$$

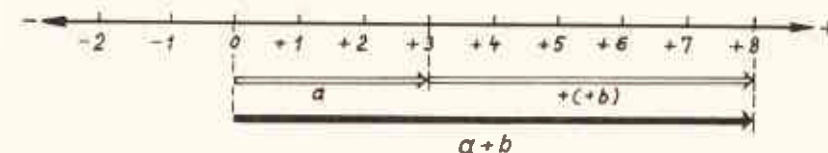


Abb. 2.8

Erläuterung zum 1. Beispiel: Wenn zu 3 DM Vermögen noch 5 DM Einnahmen **hinzukommen**, dann wird das Vermögen um diesen Betrag größer ($3 + 5 = 8$).

Da es sich in dem vorstehenden Beispiel um die **Addition** von **positiven** Zahlen handelt, werden die Summanden von 0 nach **rechts** aneinandergefügt.

Im folgenden Beispiel ist die **Addition** einer **negativen** Zahl vorgesehen. Der anzusetzende Pfeil + (—b) muß wegen der **negativen** Zahl in **entgegengesetzter Richtung** (nach links) an den Pfeil a angetragen werden.

2. Beispiel:

$$6 + (-2) = 6 - 2$$

$$a + (-b) = a - b$$

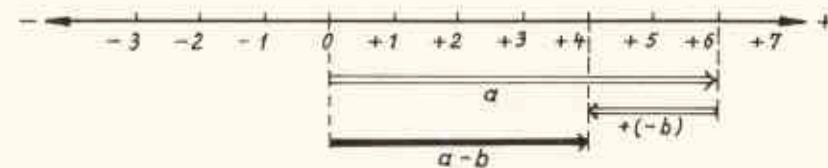


Abb. 2.9

Erläuterung zum 2. Beispiel: Wenn zu 6 DM Vermögen 2 DM Schulden **hinzukommen**, dann wird das Vermögen um diesen Betrag geringer ($6 - 2 = 4$).

2.2.2. Subtraktion von relativen Zahlen

Bei der **Subtraktion** ist zu beachten, daß grundsätzlich die Subtraktion eine **Umkehrung der Addition** ist. Somit wird bei der **Subtraktion** der Pfeil immer in **entgegengesetzter Richtung** als bei der Addition (1. Beispiel), also in diesem Falle nach links, angetragen.

3. Beispiel:

$$3 - (+5) = 3 - 5$$

$$a - (+b) = a - b$$

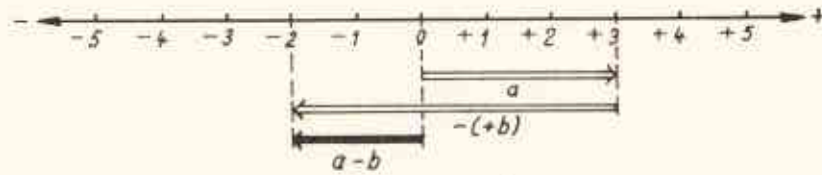


Abb. 2.10

Erläuterung zum 3. Beispiel: Wenn von 3 DM Vermögen 5 DM weggenommen werden sollen, dann wird das Vermögen um diesen Betrag geringer. In diesem Falle entstehen 2 DM Schulden ($3 - 5 = -2$).

Die Subtraktion einer negativen Zahl $-(-2)$ ist schon nicht mehr so leicht verständlich. Hierbei ist zu beachten, daß der Pfeil (-2) nicht nach links (wie im 2. Beispiel bei der Addition einer negativen Zahl), sondern infolge der Subtraktion einer negativen Zahl in entgegengesetzter Richtung, also in diesem Falle nach rechts, angetragen werden muß.

4. Beispiel:

$$6 - (-2) = 6 + 2$$

$$a - (-b) = a + b$$

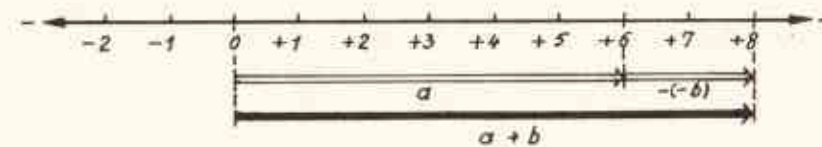


Abb. 2.11

Erläuterung zum 4. Beispiel: Wenn 2 DM Schulden erlassen werden, dann wächst das Vermögen um diesen Betrag ($6 + 2 = 8$).

Wir schreiben die 4 Beispiele noch einmal untereinander und betrachten das jeweilige Ergebnis:

1. Beispiel: $a + (+b) = a + b$
2. Beispiel: $a + (-b) = a - b$
3. Beispiel: $a - (+b) = a - b$
4. Beispiel: $a - (-b) = a + b$

Wie aus den vorstehenden Ergebnissen zu ersehen ist, wird bei der Behandlung von Additions- und Subtraktionsaufgaben, in denen relative Zahlen vorkommen, zwischen Rechen- und Vorzeichen kein Unterschied mehr gemacht. Man kann ja mit Hilfe der Vorzeichenregel

a) die Vorzeichen in einer Aufgabe mit den Rechenzeichen vereinigen, z. B. $6 - (+3) = 6 - 3$

b) Rechen- und Vorzeichen miteinander vertauschen, z. B. $6 - (+3) = 6 + (-3)$

c) jede Subtraktionsaufgabe als Additionsaufgabe schreiben und umgekehrt, z. B.

$$4 - 2 = 4 + (-2)$$

$$4 + 2 = 4 - (-2)$$

Man sieht deshalb bei Aufgaben mit relativen Zahlen von dem Unterschied zwischen Vor- und Rechenzeichen und von dem Unterschied zwischen Addition und Subtraktion ab und spricht lediglich von einer „algebraischen Summe“.

Vorzeichenregel:

Beim Zusammentreffen gleicher Vor- und Rechenzeichen wird addiert und bei ungleichen Vor- und Rechenzeichen subtrahiert.

Rechenzeichen und Vorzeichen	ergibt:
+	(+)
+	(-)
-	(+)
-	(-)
	+

Beispiel: $(-80) - (-50) = ?$

Die Vor- und Rechenzeichen $-(-50)$ sind gleich; es wird also addiert (+).

$$-80 + 50 = -30$$

Erläuterung: Horst hat sich von Rolf 80 Pf geborgt. Für eine Gefälligkeit erläßt Rolf ihm 50 Pf von seinen Schulden. Es bleiben für Horst noch 30 Pf Schulden.

$$(-80) - (-50) = (-30)$$

$$80 \text{ Pf Schulden} - 50 \text{ Pf Schulden} = 30 \text{ Pf Schulden}$$

Beispiel: $(-20a) - (-40a) - (-60b) + (-30b) =$
 $-20a + 40a + 60b - 30b = 20a + 30b$

Übungsaufgaben:

127. a) $(+45) + (+13)$ b) $(+6) + (+3)$ c) $(+12) + (+4)$
128. a) $(-17) + (-12)$ b) $(-76) + (-93)$ c) $(+19) + (-5)$
129. a) $(-25) + (+17)$ b) $(+215) - (+196)$ c) $(+36) - (+12)$
130. a) $(+14) - (+7)$ b) $(-36) - (-12)$ c) $(+5) - (-7)$
131. a) $(+3\frac{1}{2}) + (5\frac{1}{2})$ b) $(-12\frac{3}{4}) + (-6\frac{1}{2})$ c) $(+25\frac{1}{2}) - (+38\frac{1}{4})$
132. a) $(+24,75) + (12,25)$ b) $(-11,64) + (+15,59)$ c) $(+76) - (+114)$
133. a) $(-9\frac{1}{2}) - (-13\frac{3}{4})$ b) $(-12\frac{1}{2}) - (-16\frac{1}{3})$ c) $(+9) - (+5) + (-2)$
134. a) $(+5a) + (+2a)$ b) $(+9x) + (+35x)$ c) $(-7b) + (-3b)$
135. a) $(-16d) + (-24d)$ b) $(+50m) - (+38m)$ c) $(+16f) - (+27f)$
136. a) $(+45d) + (-27d)$ b) $(-78v) + (102v)$ c) $(-15p) - (-37p)$
137. a) $(+2\frac{1}{2}b) + (+5\frac{3}{4}b)$ b) $(+7\frac{2}{3}n) + (+8\frac{5}{6}n)$ c) $(+6\frac{1}{2}a) - (+3\frac{3}{4}a)$
138. a) $(-18\frac{5}{6}t) + (+25\frac{2}{3}t)$ b) $(-75\frac{2}{5}c) - (-48\frac{3}{10}c)$
 c) $(-4\frac{1}{3}x) - (-28\frac{2}{3}x)$
139. a) $(+18,5b) + (+20,5b)$ b) $(-3,14a) + (-6,85a)$
 c) $(-50,84b) - (-28,63b)$
140. $(+7a) - (+3b) + (+2c) + (+5a) - (+4b) + (-5c)$
141. $(+1\frac{1}{4}x) + (-3\frac{1}{3}y) - (-5\frac{1}{2}x) - (-12\frac{2}{3}y) + (-2\frac{1}{4}y) - (+5\frac{1}{3}y)$
142. $(+4,9c) + (-8,7d) - (-12,2f) - (-9,8d) - (+3,7c) + (-10,8f)$

2.2.3. Die algebraische Summe; das Rechnen mit Klammern

Beim Rechnen kommen häufig Aufgaben vor, in denen Summen oder Differenzen durch **Klammern** zusammengefaßt worden sind, z. B.:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 10 + (8+6) = 24 & \text{c) } 10 + (8-6) = 12 \\ \text{b) } 10 - (8+6) = -4 & \text{d) } 10 - (8-6) = 8 \end{array}$$

Bei der Lösung solcher Aufgaben ist man bemüht, zunächst die Klammern aufzulösen. Würden sie einfach weggelassen, so wären in den Fällen a) und c) die Ergebnisse trotzdem richtig. Hingegen erhalten wir in den Fällen b) und d), wo vor der Klammer ein Minuszeichen steht, **falsche** Ergebnisse, wenn wir die Rechenzeichen **innerhalb** der Klammern nicht umdrehen, d. h. **plus** zu **minus** und **minus** zu **plus** werden lassen.

Merke:

Steht vor einer in Klammern gesetzten algebraischen Summe ein Minuszeichen, so bleibt beim Auflösen (Weglassen) der Klammer das Ergebnis richtig, wenn die Rechenzeichen innerhalb der Klammer umgekehrt werden.

Wenden wir diese Klammerregel auf das Buchstabenrechnen an, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + b + c \\ a - (b + c) &= a - b - c \\ a + (b - c) &= a + b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c \end{aligned}$$

Neben den **runden** Klammern kommen noch die übergeordneten **eckigen** Klammern vor, z. B.

$$6a + [(5a + 4b) - (3a + 2b)]$$

Man löst zuerst die untergeordneten **runden** Klammern auf und läßt die eckigen stehen:

$$6a + [5a + 4b - 3a - 2b],$$

dann löst man die **eckigen** Klammern auf (natürlich unter Beachtung der Klammerregel):

$$6a + 5a + 4b - 3a - 2b = 8a + 2b$$

Wir ergänzen die **Klammerregel** wie folgt:

Ist eine algebraische Summe in eckige und runde Klammern gesetzt, so löst man von innen nach außen zuerst die runden und dann die eckigen Klammern auf.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } 10a - [6a - (5c + 6a - 4b) - 15b] &= \\ 10a - [6a - 5c - 6a + 4b - 15b] &= \\ 10a - 6a + 5c + 6a - 4b + 15b &= 10a + 5c + 11b \end{aligned}$$

Bei der Auflösung von Klammern ist auf die Vorzeichen zu achten.

Beispiel: $(4x - 5y + 6z) + (8x + 5y - 6z) - (-10x - 9y + 7z) = ?$

Vor der 2. Klammer steht ein $+$ Zeichen, vor der 3. Klammer ein $-$ Zeichen. Wir können die 2. Klammer ohne weiteres weglassen, die Vorzeichen ändern sich nicht. Die 3. Klammer können wir jedoch nur dann weglassen, wenn alle Vorzeichen in der Klammer umgekehrt werden.

$$4x - 5y + 6z + 8x + 5y - 6z + 10x + 9y - 7z =$$

Nun ordnen wir:

$$\underbrace{4x + 8x + 10x}_{22x} - \underbrace{5y + 5y}_0 + 9y + \underbrace{6z - 6z}_0 - 7z = 22x + 9y - 7z =$$

Hieraus wird ersichtlich, daß die Buchstabenrechnung eine bedeutende Arbeitsersparnis darstellt, vor allem viele Rechenfehler ausschaltet, weil wir ja erst zuletzt die Zahlen einsetzen. Das gilt besonders bei recht komplizierten Werten für x, y, z usw., z.B. mit Dezimalbrüchen oder gewöhnlichen Brüchen.

Übungsaufgaben:

143. a) $a + 2b + 3b + 5a + b$ b) $3a + 5a + 6b + 5a + 3b$
144. a) $6a + 2x + 3a + 5x + a$ b) $18a + 2x + 4x + 11a + 7x$
145. $5x + y + 7x + 3y + x + 8x + 3x + 9y$
146. $8a + 7b + 9c + b + 7a + c + 5b + 6c + a$
147. $5a + 7b + 8a + 3a - 4b + 11b - 14a + a - 6b$
148. $3m + 7n + 5m - 7m + 6n + 8p - 5n - 8p - 3n$
149. $27a + 35b + 49c - 13a + 29b + 24a - 36c - 43b$
150. $78m + 45n + 73p - 54p - 28n - 53m + 23m - 19p$
151. $45e + 57f - 36e + 64g - 33f + 10g + 19f - 41g$
152. a) $3,5a + 6,21b + 4,2a + 2,79b$ b) $2,7x + 0,6y + 0,8x - 1,3y$
153. a) $0,68x + 5,45y + 3,55y + 2,32x$ b) $5,5c - 6,2d - 2,8c + 4,6d$
154. $7,2a - 3,05b + 1,49b + 6,8c + 9,42c - 18,9c + 1,56b$
155. $6,75a + 5,3b + 83,7c - 3,78b + 62c - 5,55a + 1,48b$

Übungsaufgaben:

156. $0,25r + 0,33s + 6,5s + 0,93t + 3,67r + 9,5t - 0,17s + 0,48r$
157. $7,9a - 6,9b + 4,2b - 0,9c - d + 2,3a - 1,7c$
158. $33,05c - 19,95c - 3,125b - 5,23a + 12,48a + 23,875b$
159. a) $\frac{3}{4}b + 22 + \frac{1}{4}b$ b) $\frac{1}{4}y + \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y + \frac{3}{4}x$
160. a) $\frac{1}{2}ax + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}ax + \frac{1}{2}ab$ b) $8a - 4a - 2b$
161. a) $\frac{23}{3}a - \frac{1}{4}b - 25\frac{1}{5}a$ b) $16\frac{1}{3}y - 5\frac{1}{3}ay - 10\frac{5}{6}y$
162. a) $\frac{2}{5}a - \frac{9}{3}b + \frac{6}{7} + 10\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b$ b) $\frac{1}{3}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}b$
163. $\frac{3}{4}a - \frac{4}{5}b - \frac{5}{6}c + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{2}{3}c$
164. $39\frac{1}{3}x - 27\frac{3}{4}y - 69x + 85\frac{1}{6}y$
165. a) $5c + (8c + 4)$ b) $a + 4 + (2a + 3)$ c) $20b + (4b - 3c)$
166. a) $(a + b - c) - (a + b - c)$ b) $7x - (3x + 5)$
c) $5a - (3a - b)$
167. a) $(a + b) - (b + c) - (a - b - c)$ b) $2a - (a + b - c)$
c) $a - (a - b + c)$
168. a) $(a + b) - (a - c + b)$ b) $x + (a - b - x)$
c) $x - (x - a - b)$
169. a) $(m + 4) + (3m + 6)$ b) $(4x + 2) + (9x + 5)$
c) $4bx + z - (bx + z - 2)$
170. a) $(6a + 11) - (3a - 2)$ b) $(4x + 9) + (6x - 7)$
c) $ax - (bx - 1) - (ax + 1)$

Übungsaufgaben:

171. a) $3ax + b - (x - 3ax)$ b) $4a - (b + a) - (3a + b)$
172. $2\frac{1}{4}y + (-3\frac{1}{2}y) - (-\frac{1}{4}y) + y$
173. a) $a + x - (a + b - x) - (x + a)$
b) $a + (b - z) - (a + b) - (z + 1)$
174. a) $116a - (100a - 30b)$ b) $6m - (17m + 12m)$
175. a) $4ax - (a + ax) - (ax + a) - (b + ax)$
b) $1x + (3 - 2) - (4 + 5)$
176. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (-a + 2c)$
177. $9,4a + (3,5a + 7,6b) - (8,5a + 5,3b) - (1,7b - 4a)$
178. $(9m + 8n + 7p) + (5n - 7p - 3m) - (4m - 2p + 3n)$
179. $(4a + 5b + c) - (3a + 4b - 6c) - (-5a - 8b + 7c)$
180. $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
181. $(x + y) + [(x - y) - (x + y - z)]$
182. $(x - z + y) - [(y + x) - (y - z)]$
183. $(8m - 5p) - (2m - 3n - 4p) + [(3p - 2n) - (4m + n)]$
184. $7e - [3e - (7 + 5f)] + [e - (4 - 6f)] - (2e + 7f)$
185. $(8a + b) - [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - (-a + 6b)$
186. $[(2a - 5b) - (7a - 3b)] - [(3a - 5b) - (8a + 7b)]$
187. $(24a + 37b - 19c) - [(43a + 29b) - (32a + 11b - 21c)]$
188. $104x - [(64y + 20z) + (52x - 65z)] - (17z - 76y)$
189. $[112x - (45y - 53z)] - [(81x - 64y) - 21z]$

Übungsaufgaben:

190. $44x - [22y - (3z - 4x)] + [y - (33z - 22x)] - (x - z + y)$
191. $18a - [(14a - 8b + 2c) - (8a + 12b - 3c)]$
192. $(a + b) + [(b - a) - (a - b)] - [a - (b + a)]$
193. $24a - [(13a - 8b + 2c) - (9a + 12b - 3c)]$
194. $[(4a - 3b) - 2c] - [(3c + 4b) - (4c - a + b)]$
195. $24r - (6s - 5r) - [7s - (6r + 5s) - (-4r + 3s) - 9r]$
196. $35p - [19q - (3p - 7q) + 8p] - [9p - (-5p + 3q) + 7q]$
197. $(a + b) + [(b - a) - (a - b)] - [a - (b + a)]$
198. $37a + [22b - (17c + 12b - 11a) + 25c] - [18a - (7b - 3c)]$
199. $[3u - (18v + 5u)] - [3u + (18w - 5v)] + [(w - 3v) + (18u - w)]$

2.2.4. Addition und Subtraktion von Brüchen

Wir wenden nunmehr die **Bruchregeln** auf das **Buchstabenrechnen** an:

a) **Gleichnamige Brüche** werden bekanntlich addiert oder subtrahiert, indem man die **Zähler addiert oder subtrahiert**. Der **Nenner bleibt unverändert**.

Beispiele: $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a + c + d}{b} + 1$

$$\frac{8bd}{3b} + \frac{3bd}{3b} - \frac{2bd}{3b} = \frac{8bd + 3bd - 2bd}{3b} = \frac{9bd}{3b} = 3d$$

Wenn im Zähler eines Bruches eine Summe und außerdem ein Minuszeichen vor dem Bruchstrich stehen, dann muß der Bruchstrich durch eine Klammer ersetzt werden.

Beispiel: $\frac{a-b}{d} = \frac{a-b-c}{d} = \frac{a-b-(a-b-c)}{d} = \frac{a-b-a+b+c}{d} = \frac{c}{d}$

b) **Ungleichnamige Brüche** werden addiert oder subtrahiert, indem man die Brüche zuerst gleichnamig macht und dann die **Zähler addiert oder subtrahiert** und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiel: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{d}{e} = ?$

Zunächst suchen wir den **Hauptnenner**. Dieser heißt bce . Die Brüche werden erweitert, indem man **Zähler und Nenner mit dem Hauptnenner, jedoch ohne den Nenner des betreffenden Bruches, multipliziert**. Der Wert des einzelnen Bruches ändert sich dadurch nicht.

$$\frac{a \cdot ce}{b \cdot ce} + \frac{b \cdot be}{c \cdot be} + \frac{d \cdot bc}{e \cdot bc} = \frac{ace}{bce} + \frac{b^2e}{bce} + \frac{bcd}{bce} = \frac{ace + b^2e + bcd}{bce}$$

Bei der Addition und Subtraktion von Brüchen mit **gleichem** Nenner kann man die Zähler auf einen durchgehenden Bruchstrich schreiben.

Übungsaufgaben:

200. a) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3}$ b) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5}$ c) $\frac{c}{2} - \frac{c}{3}$ d) $1\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}a$ e) $\frac{5a}{7} + \frac{b}{7}$

201. a) $\frac{7b}{4} - \frac{3b}{4}$ b) $\frac{3x}{5} - \frac{4x}{15}$ c) $\frac{8n}{9} - \frac{7n}{18}$ d) $\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}$

202. a) $\frac{9m}{5} - \frac{4m}{5}$ b) $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}$ c) $\frac{2a}{x} - \frac{a}{x}$ d) $\frac{x}{10} - \frac{y}{10} + \frac{z}{10}$

203. a) $\frac{4a}{9} + \frac{8a}{9} - \frac{10a}{9}$ b) $\frac{3a}{4} + \frac{5a}{4} - \frac{7a}{4}$ c) $\frac{8x}{15} - \frac{7x}{15} + \frac{11x}{15} + \frac{4x}{15}$

204. a) $\frac{x}{n} + \frac{y}{n} - \frac{z}{n}$ b) $\frac{8a}{5} + \frac{2a}{5} - \frac{7a}{5}$ c) $\frac{11m}{3a} - \frac{9m}{3a} + \frac{4m}{3a}$

205. a) $\frac{14a}{9x} + \frac{8b}{9x} - \frac{11a}{9x} - \frac{11b}{9x}$ b) $\frac{3}{an} - \frac{5}{bn}$ c) $\frac{4a}{5b} - \frac{3a}{4b}$

206. a) $\frac{2b}{5y} + \frac{7b}{20y}$ b) $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ c) $\frac{x+y}{m} + \frac{x-y}{m}$

207. a) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15}$ c) $\frac{5ax}{6by} - \frac{3ax}{8by} - \frac{7ax}{16by}$

208. a) $\frac{3x}{4y} - \frac{5x}{9y} - \frac{2x}{3y} + \frac{7x}{12y}$ b) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} - \frac{a}{3} + \frac{5b}{6}$

209. a) $\frac{x}{7} - \frac{y}{9} - \frac{x}{56} - \frac{y}{72}$ b) $\frac{6x}{7} - \frac{3y}{5} + \frac{13x}{42} - \frac{7y}{30}$ c) $\frac{5x}{6} + \frac{4x}{9} - \frac{2x}{5}$

210. a) $\frac{11a}{12} - \frac{3a}{8} + \frac{2a}{5}$ b) $\frac{2a}{3} - \frac{3b}{5} - \frac{a}{6} + \frac{b}{10}$

Übungsaufgaben:

211. a) $\frac{a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{a}{20} + \frac{b}{30}$ b) $\frac{m}{ax} + \frac{n}{bx}$ c) $\frac{x}{n} + \frac{x}{3n}$ d) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

212. a) $\frac{4x}{n} + \frac{3x}{5n}$ b) $\frac{8a}{x} - \frac{5b}{y}$ c) $\frac{a}{5x} - \frac{b}{10x}$ d) $\frac{a}{2b} - \frac{a}{3b}$

213. a) $\frac{2a}{5x} - \frac{3a}{8x}$ b) $\frac{8b}{3a} - \frac{5b}{2a}$ c) $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$ d) $\frac{x}{y} + \frac{2x}{3y} + 1$

214. a) $\frac{13a-9b}{4x} + \frac{4a-5b}{3x}$ b) $\frac{2a-5b}{3} + \frac{a+2b}{3}$

215. a) $\frac{2a+3b}{a+b} - \frac{a+2b}{a+b}$ b) $\frac{7a-8b}{5} - \frac{2a-3b}{5}$ c) $\frac{9a}{n} - \frac{7a}{n} + \frac{5a}{n}$

216. a) $\frac{8x}{a} - \frac{5x}{a} + \frac{6x}{a}$ b) $\frac{4x+5y}{x-y} - \frac{3x+4y}{x-y}$ c) $3n - \frac{x}{2y}$

217. a) $\frac{5a+b}{3} - a$ b) $\frac{3a+5b}{4b} - 2$ c) $\frac{a-b}{2} + b$

218. a) $\frac{x+y}{2y} - 1$ b) $\frac{a-b}{2x} - \frac{a+b}{5x}$ c) $\frac{2x}{3y} - \frac{4x-5y}{6y}$

219. a) $\frac{a-2b}{2y} + \frac{a+3b}{6y}$ b) $\frac{2x-3a}{3x} - \frac{x-2a}{2x}$

220. a) $\frac{x+3y}{4y} - \frac{x+2y}{6y}$ b) $\frac{3a+7x}{9x} - \frac{4a+9x}{12x}$ c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

221. a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$ b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5}{z}$

222. $\frac{1}{2}x - [\frac{2}{3}y - (3x - \frac{1}{2}y) - \frac{1}{5}x] - 6y$

223. $[(1,5a - 2,6x) - (4,2y + 3,4b)] - [(1,4x + 3,6b) - (4,5a - 2,8y)]$

224. $\frac{1}{3}x - [4\frac{2}{3}a - (2x - 3\frac{1}{2}a) - 2\frac{1}{6}x]$

225. $[15\frac{3}{4}a - (10\frac{1}{71}b - 6\frac{24}{29}a)] - [7\frac{24}{29}a - (10\frac{1}{71}b - 15\frac{3}{4}a)]$

2.3. Multiplikation

Die aus drei gleichen Summanden bestehende Summe $2 + 2 + 2$ kann abgekürzt $3 \cdot 2$ geschrieben werden. Der eine Faktor gibt an, wievielmals der andere als Summand zu setzen ist.

Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition gleicher Summanden. Auch hier kann man die Zahlengerade zur bildlichen Darstellung benutzen.

1. Beispiel:

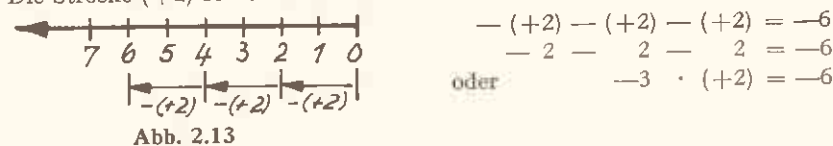
Die Strecke $(+2)$ soll dreimal addiert werden:



Wenn ein Guthaben dreimal hinzugefügt wird, dann wächst das Vermögen (die Pfeile nach rechts antragen).

2. Beispiel:

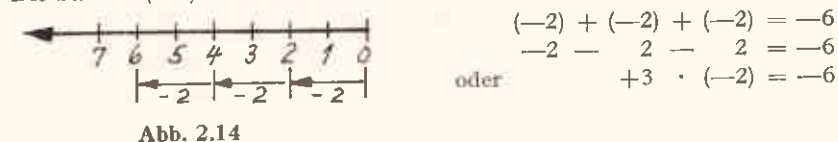
Die Strecke $(+2)$ soll dreimal subtrahiert werden:



Wenn ein bestimmter Geldbetrag dreimal abgezogen wird, dann entstehen Schulden (die Pfeile nach links antragen).

3. Beispiel:

Die Strecke (-2) soll dreimal addiert werden:



Wenn ein Schuldbetrag dreimal hinzugefügt wird, dann wachsen die Schulden (die Pfeile nach links antragen).

4. Beispiel:

Die Strecke (-2) soll dreimal subtrahiert werden:



Wenn ein Schuldbetrag dreimal abgezogen wird, dann wächst das Vermögen (die Pfeile nach rechts antragen).

2.3.1. Vorzeichenregel bei der Multiplikation

Wir schreiben die 4 Beispiele noch einmal untereinander und betrachten das jeweilige Ergebnis:

1. Beispiel	$+3 \cdot (+2) = +6$	$+a \cdot (+b) = +ab$
2. Beispiel	$-3 \cdot (+2) = -6$	$-a \cdot (+b) = -ab$
3. Beispiel	$+3 \cdot (-2) = -6$	$+a \cdot (-b) = -ab$
4. Beispiel	$-3 \cdot (-2) = +6$	$-a \cdot (-b) = +ab$

Vorstehende Resultate ergeben die folgende Vorzeichenregel:

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, das Produkt zweier Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

+	·	+	=	+
+	·	-	=	-
-	·	+	=	-
-	·	-	=	+

Merke:

In einem Produkt dürfen die Faktoren miteinander vertauscht werden.

$$\text{Es ist } 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$$

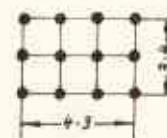


Abb. 2.16

Bildlich kann man das Produkt $3 \cdot 4$ durch Punkte darstellen, die man in 4 Reihen mit je 3 Punkten zu einem Rechteck anordnet. Diese Punktanordnung stellt sich von der kurzen Rechteckseite betrachtet in 3 Reihen zu 4 Punkten dar.

Allgemein gilt:

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Bei einem Produkt von mehreren Faktoren ist die Reihenfolge für das Ergebnis gleichgültig, z. B.

$$3 \cdot 6 \cdot 8 = 8 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 8 \cdot 3 \text{ oder}$$

$$a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot a$$

Das Multiplikationszeichen ist der Punkt. Er kann vor allgemeinen Zahlen und vor oder nach einer Klammer fehlen ($5a$ bedeutet $5 \cdot a$; abc bedeutet $a \cdot b \cdot c$; $3(m+n)$ bedeutet $3 \cdot (m+n)$).

Bei der Multiplikation von allgemeinen Zahlen werden die Beizahlen und Buchstaben für sich multipliziert.

Beispiel: $3a \cdot 5b \cdot 2c = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot abc = 30abc$

2.3.2. Multiplikation von Klammerausdrücken

a) Wenn die Zahl 235 mit 3 multipliziert werden soll ($235 \cdot 3 = 705$), dann kann man die Zahl 235 in die Summe $200 + 30 + 5$ zerlegen und jeden Summanden mit 3 multiplizieren.

$$(200 + 30 + 5) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 705$$

b) Bei der gleichen Aufgabe kann man aber auch die Zahl 235 als Differenz von $250 - 15$ betrachten.

$$(250 - 15) \cdot 3 = 250 \cdot 3 - 15 \cdot 3 = 750 - 45 = 705$$

Merke:

Zu a) Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man jeden Summanden einzeln multipliziert und die Teilprodukte addiert.

Beispiel: $(a + b) n = an + bn$

Zu b) Man multipliziert eine Differenz mit einer Zahl, indem man den Minuenden und den Subtrahenden einzeln multipliziert und vom ersten Teilprodukt das zweite subtrahiert.

Beispiel: $(a - b) n = an - bn$

Eine Veranschaulichung ist in den beiden Rechtecken gegeben, dessen Seiten die Maßzahlen a , b und n enthalten (vgl. hierzu Abb. 2.17).

Zu a): $(a + b) n = an + bn$

Zu b): $(a - b) n = an - bn$

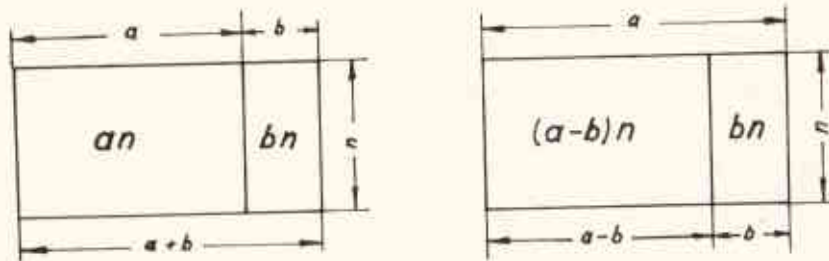


Abb. 2.17

Beispiele:

$$\begin{aligned} 4(a + b) &= 4a + 4b \\ 7(a + b + c) &= 7a + 7b + 7c \\ 5(c - d + e) &= 5c - 5d + 5e \\ 6(3a + 2b) &= 18a + 12b \\ 11(5x - 2y + 3z) &= 55x - 22y + 33z \end{aligned}$$

Jeder Teil in der Klammer ist mit dem Faktor vor (oder hinter) der Klammer zu multiplizieren. Um sich von der Richtigkeit einer Aufgabe zu überzeugen, kann man für die Buchstaben a , b , c usw. einen bestimmten Wert einsetzen und dann zur Probe nachrechnen, ob alles stimmt. So setzen wir vielleicht im ersten Beispiel für $a = 6$ und $b = 4$ ein. Die Ergebnisse müssen auf beiden Seiten gleich groß sein.

$$\begin{aligned} 4(a + b) &= 4a + 4b \\ 4(6 + 4) &= 4 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \\ 4(10) &= 24 + 16 \\ 40 &= 40 \end{aligned}$$

Statt mit einer bestimmten Zahl vor der Klammer, kann man auch mit einer allgemeinen Zahl, d. h. mit einem Buchstaben multiplizieren:

Beispiele:

$$\begin{aligned} n(a + b) &= na + nb \\ 2m(a + b + c) &= 2ma + 2mb + 2mc \\ x(c - d + e) &= xc - xd + xe \\ y(3a + 2b) &= 3ay + 2by \\ 2a(5x - 2y + 3z) &= 10ax - 4ay + 6az \end{aligned}$$

Es ist immer darauf zu achten, daß jedes einzelne Glied in der Klammer bei der Multiplikation berücksichtigt wird. Ist jedoch keine Klammer vorhanden, so ist nur die Zahl mit dem Faktor zu multiplizieren, bei dem er steht.

Unterscheiden Sie:

$$\begin{aligned} (a + b + 18) 12 &= 12a + 12b + 12 \cdot 18 \\ a + b + 18 \cdot 12 &= a + b + 18 \cdot 12 \\ (a + b + 18) c &= ac + bc + 18c \\ a + b + 18c &= a + b + 18c \end{aligned}$$

Multiplikation von zwei Klammerausdrücken:

Wenn 36 mit 23 multipliziert werden soll, dann kann man dafür z. B. auch zwei Summen miteinander multiplizieren.

$$(30 + 6) \cdot (20 + 3)$$

Die Klammer $(30 + 6)$ ist $20 + 3$ mal als Summand zu setzen. Das geschieht, indem man $(30 + 6)$ **zuerst** mit 20 und **dann** mit 3 multipliziert und die Produkte **addiert**.

$$\begin{aligned} (30 + 6) \cdot (20 + 3) &= (30 + 6) \cdot 20 + (30 + 6) \cdot 3 \\ &= 30 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 30 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \\ &= 828 \text{ oder} \end{aligned}$$

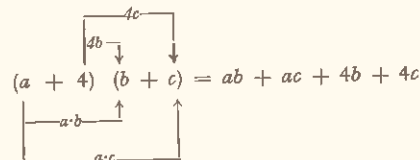
$$\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\ &= ac + bc + ad + bd \end{aligned}$$

Merke:

Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Dabei ist immer auf das Vorzeichen der Glieder zu achten.

Beispiel: $(a + 4)(b + c)$

Wir müssen also den Buchstaben a der ersten Klammer mit b und c der zweiten und die Zahl 4 ebenfalls mit b und c der zweiten Klammer multiplizieren.



Beispiele: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
 $(5a + 2b)(6 - x) = 5a \cdot 6 - 5ax + 2b \cdot 6 - 2bx$
 $= 30a - 5ax + 12b - 2bx$

Die Richtigkeit dieser Rechnung soll mit folgendem Beispiel noch deutlicher gemacht werden:

Bekanntlich ist $6 \cdot 8 = 48$

Die beiden Faktoren 6 und 8 sollen durch Klammerausdrücke ersetzt werden, z.B.

$$\begin{aligned}(4 + 2)(10 - 2) &= 4 \cdot 10 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2 \\ &= 40 - 8 + 20 - 4 \\ &= 48\end{aligned}$$

oder $(9 - 3)(10 - 2) = 9 \cdot 10 - 9 \cdot 2 - 3 \cdot 10 + 3 \cdot 2$
 $= 90 - 18 - 30 + 6$
 $= 48$

Durch die gleichen Ergebnisse ist die Richtigkeit der Rechnung bewiesen. Erfahrungsgemäß macht das Multiplizieren mit negativem (—) Vorzeichen dem Anfänger einige Schwierigkeiten. Man denke stets an die Vorzeichenregel:

+	·	+	=	+
—	·	+	=	—
+	·	—	=	—
—	·	—	=	+

Beispiele: $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
 $(-a + b)(c - d) = -ac + ad + bc - bd$
 $(-a + b)(-c + d) = ac - ad - bc + bd$
 $(-a - b)(c + d) = -ac - ad - bc - bd$
 $(-a - b)(-c - d) = ac + ad + bc + bd$

Nun noch einige größere Aufgaben mit Klammern:

$$m + n(p + r - v) - a(b - c) = m + np + nr - nv - ab + ac$$

Die Klammer fällt weg; jede Größe in der Klammer wird mit dem Faktor vor (oder hinter) der Klammer multipliziert, also $+n \cdot +p$, $+n \cdot +r$, $+n \cdot -v$ usw. Weiter ist zu beachten, daß bei — vor der Klammer alle Vorzeichen umzukehren sind, sobald die Klammer weggelassen wird.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(3a - b + c)d - (4a + 2b - c)f + (8a + 5b - 6c)d + 40ad - 30cd &= \\ 3ad - bd + cd - (4af + 2bf - cf) + 8ad + 5bd - 6cd + 40ad - 30cd &= \\ 3ad - bd + cd - 4af - 2bf + cf + 8ad + 5bd - 6cd + 40ad - 30cd &= \\ 3ad + 8ad + 40ad - bd + 5bd + cd - 6cd - 30cd - 4af - 2bf + cf &= \\ 51ad + 4bd - 35cd - 4af - 2bf + cf\end{aligned}$$

Man kann zuerst die Klammer mit dem — Vorzeichen stehenlassen und zunächst nur die Multiplikation ausführen; oder man kann auch (wie im nächsten Beispiel gezeigt) multiplizieren und gleichzeitig beim Niederschreiben alle Vorzeichen umkehren.

$$\begin{aligned}a(m - n + p) - b(n - m + p) + c(m + n - p) &= \\ am - an + ap - bn + bm - bp + cm + cn - cp\end{aligned}$$

Übungsaufgaben:

226. a) $(+4) \cdot (+17)$ b) $(-9) \cdot (+6)$ c) $(+18) \cdot (-5)$

227. a) $(-12) \cdot (-10)$ b) $(+a) \cdot (+b)$ c) $(-m) \cdot (+n)$

228. a) $(+c) \cdot (-d)$ b) $(-x) \cdot (-y)$ c) $(+8x) \cdot (-7)$ d) $(-9) \cdot (6b)$

229. a) $(-4a) \cdot 6$ b) $(a - b + c) \cdot 5$ c) $5 \cdot (4x + 5)$

230. a) $7 \cdot (2a - 3b + 8)$ b) $4b \cdot (m - 3n + 6s)$

231. $(-5x - 10y + 3z) \cdot (-5)$

232. a) $(a - z) \cdot 7z$ b) $\left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}az$ c) $\left(\frac{a}{b} + \frac{x}{5}\right) \cdot 5ax$

Übungsaufgaben:

233. a) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b\right) \cdot 12x$ b) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c\right) \cdot (-6)$

234. a) $(ax^2 + 6x + c) \cdot (-4)$ b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x} + 3\right) \cdot 5x^2$

235. a) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot \frac{ab}{c}$ b) $(ax^2 + bx) \cdot \frac{x}{2}$

236. a) $\left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3x}\right)$ b) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{xy}{2}$

237. a) $(4xy - a^2 + 2x) \cdot \left(-\frac{axz}{2}\right)$ b) $(-a + 3b - 5c) \cdot (-7ab)$

238. $3 \cdot (a + b) + 5 \cdot (a - b) - 6 \cdot (a + b) - (a - 7b)$

239. a) $(x + 7) \cdot (x + 4)$ b) $(x - 7) \cdot (x + 4)$

240. a) $(3a + 2b) \cdot (m + n)$ b) $(4x + 5) \cdot (2m + 1)$

241. a) $(5a + 7b) \cdot (2a + 3b)$ b) $(a + b) \cdot (a + b)$

242. a) $(a - b) \cdot (a - b)$ b) $(a + b) \cdot (a - b)$ c) $(x + 7) \cdot (x - 4)$

243. a) $(3a + 2b) \cdot (m - n)$ b) $(4x - 5) \cdot (2m + 1)$

244. a) $(5a - 7b) \cdot (2a + 3b)$ b) $(ax - 7) \cdot (5x - 4)$

245. a) $(3a + 5b) \cdot (7c + 8d)$ b) $(11m - 12n) \cdot (15p + 7q)$

246. a) $(9a - 5b) \cdot (5a + 7b)$ b) $(12a + 14b) \cdot (9a - 5b)$

247. a) $(3x + 5y) \cdot (15x - 25y)$ b) $(8m - 11n) \cdot (16m + 22n)$

248. a) $(x + 7) \cdot (x + 4)$ b) $(x - 7) \cdot (x - 4)$ c) $(6x + 1) \cdot (y + 1)$

249. a) $(3x - 4) \cdot (2x + 5)$ b) $(6,25a + 1,3b) \cdot (4a - 5b)$

250. a) $(8x - 1,7) \cdot (2,5x - 6)$ b) $(21x - 17y) \cdot (23u + 15v)$

251. a) $(17p - 23q) \cdot (14r - 8a)$ b) $(17a + 8b) \cdot (15a + 3b)$

Übungsaufgaben:

252. a) $(25a - 11b) \cdot (13a - 6b)$ b) $(36p - 15q) \cdot (43p - 12q)$

253. $(25p + 24q) \cdot (44p + 75q)$

254. $(6a + 3b - 5c) 7x - [(5a - 4b + 5c) \cdot 2x]$

255. a) $(6a - 7b) \cdot (-4c + 5d)$ b) $(-2b + 7c) \cdot (5a - 7)$

256. a) $(-5x + 3y + 10z) \cdot (-5 + z)$ b) $(a - 6b - 4c) \cdot (-7 + b)$

257. a) $(ax^2 + bx + z) \cdot (abx - z)$ b) $(ax + z) \cdot (-z + a) 4x$

258. a) $(a + 5) \cdot (a - 5)$ b) $(x + 1) \cdot (x - 1)$ c) $(9r - 2s) \cdot (9r + 2s)$

259. $(5a + 7b) \cdot (5a - 7b)$

260. a) $(a + b) \cdot (a - b) \cdot (a + b)$ b) $(a - b + c) \cdot (a + b - c)$

261. $3a \cdot 5b - (7a - 4) - (4b + a) \cdot (b - a)$

262. $9ab^2 - 7ab \cdot (-a + 3b - 5c) - (4a^2b + 35abc)$

2.3.3. Ausklammern gemeinsamer Faktoren

Vielfach ist zur Lösung algebraischer Aufgaben bzw. zur Umstellung von Formeln das Herausziehen von gemeinsamen Faktoren aus Klammerausdrücken vorteilhaft anzuwenden. Wir nennen diesen Rechenvorgang „Ausklammern“. Wählen wir ein einfaches Beispiel:

$$(8) + (6) = 14$$

Wir können die Summanden jetzt wie folgt zerlegen:

$$(2 \cdot 4) + (2 \cdot 3) = 14$$

und stellen dabei fest, daß in jedem Klammerausdruck der Faktor „2“ enthalten ist. Diesen gemeinsamen Faktor können wir ausklammern, d. h. vor die Klammer ziehen:

$$2 \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 7 = 14$$

Der gleiche Rechnungsgang läßt sich bei den allgemeinen Zahlen anwenden.

Bei der Aufgabe $(a \cdot b) + (a \cdot c)$

ist „a“ der gemeinsame Faktor, den wir ausklammern können:

$$a \cdot (b + c)$$

Wenden wir zur Probe die Regel für das Multiplizieren von Klammerausdrücken an, so ergibt sich wieder:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Merke:

Enthalten die einzelnen Glieder eines mehrgliedrigen Ausdruckes einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen Faktor vor die Klammer ziehen.

In einer Aufgabe mit vielen Gliedern haben meistens nur einige Glieder je einen gemeinsamen Faktor.

Beispiel: $(2) + (8) + (9) + (3) = 22$

Zerlegen wir die einzelnen Glieder in Faktoren, so ergibt sich:

$$(2 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 1) = 22$$

Wir erkennen, daß die beiden ersten Glieder den gemeinsamen Faktor „2“, das dritte und vierte Glied den gemeinsamen Faktor „3“ enthalten.

Somit können wir diese Faktoren ausklammern:

$$2 \cdot (1 + 4) + 3 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$$

Auf allgemeine Zahlen angewendet:

$$ax + bx + yz + wz = x \cdot (a + b) + z \cdot (y + w)$$

Bei Anwendung des Ausklammer-Vorganges sollte man die Aufgabe zuerst ordnen und dann das Ausklammern vornehmen.

Beispiel: $4an + 3bc + 8ax + 6by =$
 $4an + 8ax + 3bc + 6by = \text{(ordnen!)}$
 $4a(n + 2x) + 3b(c + 2y) \text{ (ausklammern!)}$

Bei der Lösung der Aufgabe

$$ax - 2a - bx + 2b = a(x - 2) - b(x - 2)$$

zeigt es sich, daß im Ergebnis erneut ein gemeinsamer Faktor „(x - 2)“ enthalten ist, der wieder ausgeklammert werden kann. Also

$$a(x - 2) - b(x - 2) = (a - b) \cdot (x - 2)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{a) } 18a - ma + 18c - mc &= \\ 18a + 18c - ma - mc &= \text{(ordnen!)} \\ 18(a + c) - m(a + c) &= \text{(ausklammern!)} \\ (18 - m) \cdot (a + c) &\quad \text{(nochmals ausklammern!)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 8ax - 10bx - 20ay + 25by + 12az - 15bz &= \\ 8ax - 20ay + 12az - 10bx + 25by - 15bz &= \text{(ordnen!)} \\ 4a \cdot (2x - 5y + 3z) - 5b \cdot (2x - 5y + 3z) &= \text{(ausklammern!)} \\ (4a - 5b) \cdot (2x - 5y + 3z) &\quad \text{(nochmals ausklammern!)} \end{aligned}$$

Übungsaufgaben:

$$263. \text{ a) } 8 \cdot 3 + 8 \cdot 7 - 8 \cdot 5 \quad \text{b) } 7a + 7b \quad \text{c) } 7x + 7$$

$$264. \text{ a) } 12a^2 - 9ab \quad \text{b) } 8ax + 20x^2$$

$$265. \text{ a) } 7a + 7x \quad \text{b) } 3x - 3y \quad \text{c) } ab + ax \quad \text{d) } nx - px$$

$$266. \text{ a) } a^2 - a \quad \text{b) } x^2 + x$$

$$267. \text{ a) } ax - bx + dx \quad \text{b) } 2ay + 3by - cy \quad \text{c) } ab + ax - ad$$

$$268. \text{ a) } ax - px + xy - x \quad \text{b) } 15ab - 25b^2 + bx$$

$$269. \text{ a) } ab + bc - 5b + b - 2bc \quad \text{b) } xz - z + az + z + 2xz$$

$$270. \text{ a) } 3z(x - y) - 5b(x - y) \quad \text{b) } b(x - y) - (x - y)$$

$$271. \text{ a) } ax + dx - cx - ay - dy + cy$$

$$\text{b) } np - up - mq - ur + mr + mp - nq + uq + nr$$

$$272. \quad 3a^2 + 6ab - ac - 2bc$$

$$273. \quad (a - b) \cdot (3x - 2y) + (a - b) \cdot (4x - 7y)$$

$$274. \quad 12uv - 15uw - 24v^2 + 30vw$$

$$275. \quad 36uv - 63v^2 - 32u + 56v$$

Übungsaufgaben:

276. $48ac + 12ad + 56bc + 14bd$

277. $24xy - 8y + 3x - 1$

278. $6x^2 - 8xy + 12xz - 9x + 12y - 18z$

279. a) $12a^2 - 9ab$ b) $8ax + 20x^2$ c) $25ab - 5b^2$ d) $18ap - 6p^2$
e) $6xy - 2y$

280. a) $3a - 6ab$ b) $6ax - 4ay - 9zx + 6zy + 15xc - 10cy$

281. a) $a^3 + 2ab + b^2$ b) $x^2 - 2xp + p^2$ c) $n^2 - m^2$

282. a) $16 + 8y + y^2$ b) $9y^2 + 6y + 1$ c) $x^2 - 1$

2.3.4. Multiplikation von Brüchen

Wir wenden die bekannten Bruchregeln beim Buchstabenrechnen an:

Beispiele:

a) $\frac{a}{b} \cdot 5 = \frac{5a}{b}$ b) $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n}$

c) $\frac{a}{b} \cdot 8b = 8a$ d) $\frac{x}{yz} \cdot 2z = \frac{2x}{y}$

e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$ f) $\frac{am}{nb} \cdot \frac{dc}{m} = \frac{adc}{nb}$

Übungsaufgaben:

283. a) $b \cdot \frac{1}{y}$ b) $x \cdot \frac{2}{z}$ c) $f \cdot \frac{x}{2}$ d) $p \cdot 1\frac{1}{2}z$

284. a) $2t \cdot \frac{4x}{3}$ b) $4x \cdot \frac{1}{2}z$ c) $2 \cdot \frac{x}{2}$ d) $4ax \cdot \frac{bx}{2}$

285. a) $\frac{3x}{5ym} \cdot 20m$ b) $3m \cdot \frac{7m}{6n}$ c) $4ab \cdot \frac{5x}{16by}$ d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}$

Übungsaufgaben:

286. a) $\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{a}$ b) $\frac{3a}{8b} \cdot \frac{4b}{9a}$ c) $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{15a}{4b}$ d) $\frac{18m}{7n} \cdot \frac{7m}{36n}$

287. a) $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x}$ b) $\frac{b}{a} \cdot \frac{2z}{3}$ c) $\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{a}$ d) $\frac{p}{2} \cdot \frac{a}{2p}$

288. a) $2 \cdot \frac{1}{4}x \cdot \frac{x}{4}$ b) $1 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{4}x$ c) $\frac{x}{5z} \cdot \frac{2xz}{3} \cdot \frac{4ax}{3} \cdot \frac{9}{x}$

289. a) $\left(\frac{x}{s} - \frac{y}{t}\right) \cdot m$ b) $\frac{2x}{9y} \cdot \frac{3y}{7x}$ c) $\frac{2a}{3} \cdot \frac{4b}{5} \cdot \frac{7c}{8}$

290. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot (x + y)$ b) $\frac{3}{4}a \cdot \frac{4}{5}b \cdot \frac{5}{6}c$ c) $\frac{p+q}{z} \cdot \frac{x}{y}$

291. a) $\left(\frac{x}{9} - \frac{y}{6}\right) \cdot 18$ b) $\frac{3a-5}{4} \cdot \frac{2m}{7}$ c) $\frac{5x-3}{4} \cdot \frac{3x+7}{5}$

292. a) $\left(\frac{x}{s} - \frac{y}{t}\right) \cdot (-m)$ b) $\frac{4x-1}{7} \cdot \frac{4x+1}{5}$ c) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a+b)$

293. a) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot (a-b)$ b) $(a-b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

294. a) $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{y}\right)$ b) $\frac{2a-7b+3c}{n} \cdot 9$

295. a) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c\right) \cdot (-6)$ b) $\left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{6}c\right) \cdot (+12x)$

296. a) $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ b) $(ax + bx + c) \cdot \frac{1}{x}$

297. a) $\frac{a-b}{5} \cdot 20 \cdot (x-y)$ b) $(5ax + \frac{3}{4} - \frac{7a}{4c}) \cdot \frac{2c}{x}$

298. a) $\frac{m+n}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a+x} \cdot \frac{a+x}{m \cdot n}$ b) $4a \cdot \left(\frac{3a}{5} - \frac{a}{4}\right) + 6a \cdot \left(\frac{3a}{4} - \frac{a}{5}\right)$

Übungsaufgaben:

$$299. a) \frac{3(a-b)}{n+x} \cdot \frac{4(n+x)}{12(a-b)}$$

$$b) 8x \left(\frac{3a}{2x} + \frac{2b}{x} \right) - 14x \cdot \left(\frac{a}{7x} - \frac{3b}{2x} \right) - 15x \cdot \left(\frac{2a}{3x} + \frac{7b}{5x} \right)$$

$$300. a) \frac{a}{a-b} \cdot \frac{b}{b-c} \cdot \frac{1}{a} \quad b) (2a+b) \cdot \left(\frac{4a}{2x} - \frac{5b}{3x} \right)$$

$$301. a) \left(\frac{a}{y} + \frac{a-b}{ny} \right) \cdot nx \quad b) 2a+b \left(\frac{4a}{2x} - \frac{5b}{3x} \right)$$

2.4. Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

Die Regel ergibt sich unmittelbar durch Umkehrung des Satzes über die Multiplikation.

Das Rechenzeichen bei der Division ist der Doppelpunkt $:$. Es ist aber auch üblich, die Division in Bruchform darzustellen; das gilt besonders bei allgemeinen Zahlen.

$$20 : 5 = 4 \quad \text{oder} \quad \frac{20}{5} = 4 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = c$$

Divident und **Divisor** (Zähler und Nenner) darf man nicht vertauschen, sonst erhält man den **Kehrwert** (reziproken Wert) des Bruches.

$$\frac{a}{b} \text{ ist nicht } \frac{b}{a}$$

Merke:

Bei der Division relativer Zahlen gilt hinsichtlich der Vorzeichen dasselbe wie bei der Multiplikation.

+	:	+	=	+
+	:	-	=	-
-	:	+	=	-
-	:	-	=	+

$$\begin{aligned} (+a) : (+b) &= + (a : b) \\ (+a) : (-b) &= - (a : b) \\ (-a) : (+b) &= - (a : b) \\ (-a) : (-b) &= + (a : b) \end{aligned}$$

2.4.1. Division von Brüchen

Wir erinnern uns an folgende Regel aus der Bruchrechnung: Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert.

Beispiele:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Übungsaufgaben:

$$302. a) \frac{8a}{b} : 12 \quad b) \frac{4a}{b} : (-a) \quad c) \frac{12ab}{5c} : 4a \quad d) \frac{35u^2v^3}{8w} : 7uv$$

$$303. a) \frac{ma+mb}{x-y} : (a+b) \quad b) \frac{\frac{7x}{8a} + \frac{4y}{5b}}{35xy}$$

Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch einen Bruch (Divisor) dividiert, indem man mit seinem reziproken Wert multipliziert.

$$\text{Beispiele: a) } \frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$b) \quad 2 : \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3} \quad \text{oder} \quad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$$

2.4.2. Division einer mehrgliedrigen Größe durch eine Zahl

Wenn die Zahl 192 durch 3 dividiert werden soll, dann kann man die Zahl 192 in $150 + 30 + 12$ zerlegen und jeden Summanden durch 3 dividieren.

$$\frac{150 + 30 + 12}{3} = \frac{150}{3} + \frac{30}{3} + \frac{12}{3} = 50 + 10 + 4 = 64$$

Allgemein ist demzufolge:

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Merke:

Eine mehrgliedrige Größe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied durch die Zahl dividiert und die Quotienten addiert.

Betrachten wir diesen Rechenvorgang rückwärts, so ergibt sich: **Gleichnamige Brüche werden vereinigt, indem man die Zähler auf einem gemeinsamen Bruchstrich addiert oder subtrahiert und unter dem Bruchstrich den gemeinsamen Nenner angibt.**

Beispiel: $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a - b + c}{d}$

Ungleichnamige Brüche können nicht ohne weiteres vereinigt werden. Man muß sie gleichnamig machen, d. h. sie so erweitern, daß sie den gleichen Nenner erhalten.

Beispiel: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4 + 3}{3 \cdot 2} = \frac{7}{6}$ oder

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Übungsaufgaben:

304. a) $9a : 3$ b) $8x : x$ c) $a \cdot b : b$ d) $a \cdot 16 : 8$

305. a) $\frac{12b}{4b}$ b) $\frac{8bc}{4c}$ c) $\frac{36acd}{9ad}$ d) $\frac{ax}{bx}$

306. a) $a : \frac{2}{x}$ b) $b : \frac{ax}{b}$ c) $\frac{c}{2} : ab$ d) $2ax : \frac{4}{3}$

307. a) $\frac{1}{2}bx : x^2$ b) $2\frac{1}{2} : \frac{4x}{2}$ c) $5b : \frac{ax}{b}$ d) $4x : \frac{1}{x}$

308. a) $\frac{a}{x} : \frac{2z}{a}$ b) $\frac{2az}{x} : \frac{a}{2}$ c) $\frac{abx}{x} : \frac{bx}{a}$ d) $\frac{ax}{2} : \frac{x}{2a}$

309. a) $\frac{1}{2}ax : 2\frac{1}{4}ba$ b) $2\frac{1}{2} : \frac{5x}{4}$ c) $\frac{2ax}{3} : \frac{1}{x^2}$ d) $\frac{x^2}{4} : \frac{2}{ax}$

310. a) $9 : \frac{3}{a}$ b) $a : \frac{a}{x}$ c) $5a : \frac{a}{b}$ d) $a^2 : \frac{a}{b}$

311. a) $9x : \frac{12ax}{3x}$ b) $8a : \frac{20ab}{3x}$ c) $15n : \frac{5nx}{3y}$ d) $18p : \frac{9p}{5x}$

312. a) $\frac{a}{x} : \frac{b}{x}$ b) $\frac{a}{b} : \frac{a}{x}$ c) $\frac{7}{a} : \frac{1}{a}$ d) $\frac{a}{b} : \frac{a}{3b}$

313. a) $\frac{7a}{3} : \frac{5a}{9}$ b) $\frac{2}{5x} : \frac{8}{3x}$ c) $\frac{6n}{5p} : \frac{6a}{5b}$ d) $\frac{8x}{9y} : \frac{4a}{3b}$

Übungsaufgaben:

314. a) $\frac{16ab}{9xy} : \frac{8bc}{15x}$ b) $\frac{2an}{5bp} : \frac{4nx}{15by}$ c) $\frac{8az}{9bd} : \frac{20a}{21b}$ d) $\frac{9ax}{8by} : \frac{15x}{16y}$

315. a) $\frac{5ax}{3b} : \frac{2}{3}$ b) $\frac{6ab}{c} : \frac{3}{4}$ c) $\frac{9an}{2np} : \frac{1}{2}$ d) $\frac{8xy}{3a} : \frac{1}{3}$

316. a) $\frac{7ab}{5x} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{9ax}{14b} : \frac{1}{7}$ c) $\frac{3xy}{10p} : \frac{1}{2}$ d) $\frac{10ab}{9x} : \frac{1}{3}$

317. a) $\frac{1}{2}ab : \frac{8a}{9x}$ b) $\frac{1}{2}x : \frac{3x}{16a}$ c) $\frac{1}{3}y : \frac{8x}{5a}$ d) $\frac{1}{2}ax : \frac{3x}{8y}$

318. a) $\frac{1}{2}ab : \frac{1}{4}a$ b) $\frac{1}{3}ax : \frac{1}{2}x$ c) $\frac{3}{4}xy : \frac{2}{3}y$ d) $8ay : \frac{1}{4}a$

319. a) $(8a^2 + 20ab) : (+4a)$ b) $(25mn - 40n^2) : (-5n)$

320. a) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$ b) $(35x^3 - 14x^2y - 49xy^2) : (-7x)$

321. a) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$ b) $(-72x^3y^2 + 60x^2y^3) : (-12x^2y^2)$

322. a) $(ax - bx) : \frac{x}{2}$ b) $(3x - 5x + 6) : \frac{3}{4}$ c) $(\frac{1}{5}x - a) : \frac{1}{a}$

323. a) $(ab - \frac{1}{2}x) : \frac{a}{x}$ b) $(3b + \frac{2x}{3}) : \frac{1}{x}$ c) $(ab - \frac{1}{a}) : \frac{a}{2}$

324. a) $\frac{1}{2} : (\frac{1}{2} - a)$ b) $6x : (\frac{1}{x} + b)$ c) $15bx : (\frac{1}{2}b + 3x - \frac{2}{5}b)$

325. a) $(ax - bx) : (a - b)$ b) $(am + m) : (a + 1)$

326. a) $(2a - 10) : (a - 5)$ b) $(7x + 14) : (2 + x)$

327. a) $\frac{12a}{5x} : 3a$ b) $\frac{5ab}{9xy} : 5ab$ c) $\frac{3ax}{4bc} : \frac{6ad}{8c} : \frac{18x}{2b}$

328. a) $\frac{144abx}{3c} : 12ax$ b) $\frac{3a + x}{2y} : 5$ c) $\frac{12x + 4y}{5} : 4$

329. a) $\frac{15a - 9ab}{4n} : 3b$ b) $\frac{15a^2 - 9ab}{4n} : 3a$ c) $\frac{15a^2 - 9ab}{4n} : 4a$

Übungsaufgaben:

$$330. a) \frac{ax + bx}{a - b} : (a + b) \quad b) \frac{a}{a + b} : \frac{x}{a + b}$$

$$c) \frac{12(x + y)}{9(a + b)} : \frac{8(x - y)}{3(a + b)}$$

$$331. a) \frac{6ax}{6b + 2x} : \frac{4ac}{3b + x} \quad b) \frac{3(x + y)}{4(a - b)} : \frac{6a(x + y)}{7x(a - b)}$$

$$c) \frac{4abc}{3nx} : \frac{9(a + b)a \cdot c}{15nx}$$

$$332. a) \frac{25a + 20b}{5a - 4b} : (5a + 4b) \quad b) \frac{3ax - 5ay}{2b} : (3bx - 5by)$$

$$333. (ax + a - bx - b) : (a - b)$$

$$334. (ab + ay - bx - xy) : (a - x)$$

$$335. (mx - nx - my + ny) : (m - n)$$

$$336. (10ax + 8ay - 25bx - 20by) : (5x + 4y)$$

$$337. (6ax - 9ay - 4bx + 6by - 2cx + 3cy) : (2x - 3y)$$

$$338. a) \left(\frac{3a}{7} + \frac{a}{2}\right) : 26 \quad b) \left(\frac{8x}{9} - \frac{6x}{7}\right) : 6x \quad c) \left(\frac{5}{3a} - \frac{4}{3b}\right) : a$$

$$339. a) \frac{12a}{25x} : \frac{24a}{5x} \quad b) \frac{am + an}{m} : \frac{ax + ay}{x} \quad c) \frac{ax + bx}{ax} : \frac{ay + by}{ay}$$

$$340. a) \frac{ax + cy}{a} : \frac{x + by}{b} \quad b) \frac{a + b}{x + y} : \frac{a - b}{x - y}$$

$$341. a) \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad b) \frac{\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}}{a + b} \quad c) \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{a}{b}}$$

$$342. a) \frac{\frac{4a}{9} - \frac{a}{4}}{7a} \quad b) \frac{\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{4b}}{11ab} \quad c) \frac{\left(\frac{3a}{b} - \frac{2x}{y} - \frac{x}{6y}\right)}{\frac{2x}{y} \left(\frac{a}{2b} + \frac{4a}{3b}\right)}$$

2.5. Kürzen und Erweitern von Brüchen

a) Kürzen:

Kürzen von Brüchen heißt Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren.

Beispiele: $\frac{abc}{b} = ac$

$$\frac{24}{6} \frac{bc}{ac} = \frac{4b}{1a}$$

Sollten jedoch im Zähler oder Nenner Summen stehen, so dürfen einzelne Summanden nicht gekürzt werden.

Beispiel: $\frac{a + c}{b + c}$; hier darf „c“ nicht gekürzt werden.

Anders ist es, wenn Zähler und Nenner eine gemeinsame Summe als Faktor haben.

Beispiel: $\frac{a}{b} \frac{(c + d)}{(c + d)} = \frac{a}{b}$

Es dürfen nur Faktoren gekürzt werden.

Beispiel: $\frac{a b (m + a - b)}{a b c} = \frac{m + a - b}{c}$

b) Erweitern:

Einen Bruch erweitern heißt, Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren.

Beispiele: $\frac{a}{b}$ mit c erweitert ergibt $\frac{ac}{bc}$

$$\frac{a}{b + c} \text{ mit } d \text{ erweitert ergibt } \frac{ad}{(b + c)d}$$

Wenn im Zähler oder Nenner Summen stehen, dann müssen alle Summanden im Zähler und Nenner erweitert werden.

Beispiel: $\frac{a - b + c}{a + b}$ mit d erweitert ergibt $\frac{(a - b + c)d}{(a + b)d} = \frac{ad - bd + cd}{ad + bd}$

Bei ungleichnamigen Brüchen findet man die Erweiterungszahl, indem man den Hauptnenner durch den Nenner des zu erweiternden Bruches teilt.

Beispiel: $\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c}$ (Hauptnenner = abc ; 1. Erweiterungszahl $\frac{abc}{a} = bc$ usw.)

$$\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} = \frac{dbc}{abc} + \frac{eac}{bac} + \frac{fab}{cab}$$

$$= \frac{dbc + eac + fab}{abc}$$

2.6. Rangfolge der Punkt- und Strichrechnung

Merke:

Kommen in einer Aufgabe Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten ohne Klammer vor, so müssen stets Produkte und Quotienten zuerst ausgerechnet werden. Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

Beispiele: a) $4 + \frac{12 \cdot 2 - 6}{24} : 2 =$
 $4 + \frac{24 - 6}{24} = 25$

b) $10a^2 - \frac{4a \cdot 2a + 4a : a}{8a^2 + 4} =$
 $10a^2 - \frac{8a^2 + 4}{8a^2 + 4} = 2a^2 + 4$

Soll eine andere Reihenfolge vorgeschrieben werden, dann sind Klammern zu setzen. Innerhalb der Klammern gelten die allgemeinen Rechenregeln.

Beispiel: $4(4 + 8 \cdot 2) - 20 - \frac{24 : 4}{6} =$
 $4(4 + 16) - 20 - \frac{6}{6} =$
 $4 \cdot 20 - 20 - 6 =$
 $80 - 20 - 6 = 54$

Sind Zähler und Nenner eines Bruches gleich, so ergibt sich stets 1, auch wenn in der Buchstabenrechnung keine bestimmte Zahl vorkommt.

Beispiel: $\frac{a}{a} = \frac{4}{4} = 1$ oder $\frac{b}{b} = 1$ usw.

Ebenso ist auch: $\frac{a + b}{a + b} = 1$ oder $\frac{x + y}{x + y} = 1$

Nur darf man es nicht verwechseln mit:

$$a + \frac{b}{a} + b = \text{nicht } 1$$

Wir haben gehört, daß Punktrechnung (:) vor Strichrechnung (+) geht. Bei diesem Beispiel muß also erst die Division $b : a$ ausgeführt werden, dann erst die Additionen. Mit der Verwendung eines Bruchstriches wird dieser Fehler ausgeschlossen.

$$a + \frac{b}{a} + b$$

Anders ist es, wenn $a + b$ in Klammern gesetzt wird, dann heißt es:

$$(a + b) : (a + b) = \frac{a + b}{a + b} = 1$$

Setzen wir den Ausdruck $a + b$ auf einen Bruchstrich oder als Nenner darunter, so ist keine Klammer notwendig. Der Bruchstrich ersetzt die Klammer.

Machen wir die Probe, ob das stimmt. Setzen wir in dem folgenden Beispiel für $a = 5$ und für $b = 6$ ein; es muß immer dasselbe herauskommen.

$$24a - (48a + 56b) : 8 = 24 \cdot 5 - (48 \cdot 5 + 56 \cdot 6) : 8$$

$$= 120 - (240 + 336) : 8$$

$$= 120 - 576 : 8$$

$$= 120 - 72$$

$$= 48 \text{ oder}$$

$$24a - \frac{(6a + 7b) \cdot 8}{8} = 24 \cdot 5 - (6 \cdot 5 + 7 \cdot 6)$$

$$= 120 - (30 + 42)$$

$$= 120 - 72$$

$$= 48 \text{ oder}$$

$$18a - 7b = 18 \cdot 5 - 7 \cdot 6$$

$$= 90 - 42$$

$$= 48$$

Immer dasselbe Ergebnis, also stimmt es!

1. Beispiel: $14m + [(3m - 2n)x - 3(5m + 7n)x] : x =$

Die Teilung durch x bezieht sich nur auf den Ausdruck in der eckigen Klammer. Da jedes Glied die Zahl x enthält, können wir durch x kürzen. Wir ziehen also x heraus. Vorher müssen jedoch die runden Klammern aufgelöst werden.

$$14m + [3mx - 2nx - 15mx - 21nx] : x =$$

$$14m + [-12mx - 23nx] : x =$$

$$14m + x[-12m - 23n] : x =$$

$$14m + \frac{x[-12m - 23n]}{x} =$$

$$14m + [-12m - 23n] =$$

$$14m - 12m - 23n =$$

$$2m - 23n$$

2. Beispiel: $\frac{12ab - 15bc + 8bd}{4b}$

Hier ist $4b$ nicht in allen Gliedern des Zählers (Dividenden) enthalten, aber b ist überall vorhanden, also ziehen wir b heraus und erhalten:

$$\frac{b(12a - 15c + 8d)}{4b} = \frac{12a - 15c + 8d}{4}$$

3. Beispiel: $24a - (48a + 56b) : 8$

Hier bezieht sich das $: 8$ nicht auf den ganzen Ausdruck, so verlockend auch $24a$ aussieht. Wenn das gemeint wäre, so müßte der ganze Ausdruck in Klammern stehen, wie im folgenden Beispiel:

4. Beispiel: $[24a - (48a + 56b)] : 8$

Nach der Rangordnung der Rechenzeichen muß in dem 3. Beispiel die Division nur mit dem in Klammern gesetzten Ausdruck $(48a + 56b) : 8$ durchgeführt werden.

Es gibt noch zwei weitere Möglichkeiten:

5. Beispiel: $(24a - 48a + 56b) : 8$

6. Beispiel: $(24a - 48a) + 56b : 8$

Auch beim 5. Beispiel erstreckt sich die Division $: 8$ auf den ganzen Ausdruck; es entsteht aber doch ein anderes Resultat als in dem 4. Beispiel. Beim 6. Beispiel dagegen ist nur $56b$ durch 8 zu teilen.

Nun zurück zum 3. Beispiel:

Da wir nur den Klammerausdruck $(48a + 56b)$ durch 8 teilen müssen, versuchen wir aus diesen beiden Zahlen die 8 herauszuziehen, also so:

$$\begin{aligned} 24a - 8(6a + 7b) : 8 &= 24a - \frac{8(6a + 7b)}{8} \\ &= 24a - (6a + 7b) \\ &= 24a - 6a - 7b \\ &= 18a - 7b \end{aligned}$$

Beachten Sie: Sind Zähler und Nenner gleich, so ergibt sich hieraus der Wert 1 . Es muß aber ganz genau darauf geachtet werden, ob beide Ausdrücke vollständig übereinstimmen.

Beispiel: $2ab : 2ab = \frac{2ab}{2ab} = 1$ oder

$2ba : 2ab =$ dasselbe, also auch 1 , aber

$2ab : (2a + b) = \frac{2ab}{2a + b}$ nicht 1

Bei der letzten Aufgabe ist der Quotient nicht 1 . Denn $2ab$ ist etwas anderes als $2a + b$. Denken wir uns Werte eingesetzt, z. B. $a = 6$, $b = 8$:

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{2ab} &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{96}{96} = 1, \text{ aber} \\ \frac{2ab}{2a + b} &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 6 + 8} = \frac{96}{20} = 4,8 \end{aligned}$$

Es ist immer zu versuchen, die Zahlen und Buchstaben zu kürzen.

Beispiele: a) $\frac{12acxy}{12axy} = \frac{c}{1} = c$ b) $\frac{cd}{c} = d$ c) $\frac{4c}{5c} = \frac{4}{5}$

d) $\frac{4d}{5c} = \frac{4d}{5c}$ (nichts zu kürzen) e) $\frac{20c}{5c} = 4$

Enthält der Zähler in allen Teilen die gleiche Größe wie der Nenner, so zieht man diese heraus und kürzt, indem man sie oben und unten wegläßt.

Beispiel: $\frac{12ab - 16bc + 8bd}{4b} = \frac{4b(3a - 4c + 2d)}{4b} = 3a - 4c + 2d$

Da bei dem vorstehenden Bruch sowohl oben wie unten $4b$ enthalten ist, ziehen wir oben $4b$ aus allen Gliedern heraus und kürzen.

3. Potenzrechnung

Wie das Multiplizieren eine Abkürzung des Addierens gleicher Summanden ist (z. B. $a + a + a = 3 \cdot a$), so ist das Potenzieren eine Abkürzung des Multiplizierens gleicher Faktoren.

Beispiel: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ oder

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{Faktoren}} = \underbrace{a^3}_{\text{Potenz}} \quad \begin{array}{l} \text{Exponent (Hochzahl)} \\ \text{Basis (Grundzahl)} \end{array}$$

Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren.

Den sich wiederholenden Faktor (a) nennt man die Basis (Grundzahl) der Potenz. Die Zahl, welche die Anzahl der Faktoren bestimmt (3), heißt Exponent (Hochzahl) der Potenz; das Ergebnis heißt Potenzwert.

Das Rechnungszeichen des Potenzierens besteht darin, daß man den Exponenten als kleiner geschriebene Zahl rechts oben neben die Basis setzt (a^3).

$$a \cdot a = a^2 \quad \text{ist die zweite Potenz von } a, \text{ gelesen: „} a \text{ hoch } 2\text{“ oder „} a \text{ Quadrat“}$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3 \quad \text{ist die dritte Potenz von } a, \text{ gelesen: „} a \text{ hoch } 3\text{“}$$

$$a \cdot a \cdot a \dots n \text{ mal} = a^n \quad \text{ist die } n\text{-te Potenz von } a, \text{ gelesen: „} a \text{ hoch } n\text{“ oder „} a \text{ zur } n\text{-ten Potenz“}$$

$$a = a^1 \quad \text{Die Zahl } a \text{ selbst kann man als die erste Potenz von } a \text{ auffassen und } a^1 \text{ schreiben.}$$

Der Potenz-Exponent gibt also auf einfache, kurze Weise eine Rechenoperation an, die sonst nur zeit- und raumraubend darzustellen wäre.

Beispiele: $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
 $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
 $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$
 $12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$

Ist ein gewöhnlicher Bruch zu potenzieren, so müssen Zähler und Nenner potenziert werden.

Beispiele: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{343}{512}$$

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^2 = 2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 8}{3 \cdot 3} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

Das Quadrieren wollen wir im Hinblick auf den nächsten Abschn. 4. „Radizieren“ besonders eingehend behandeln. Eine einstellige Zahl zu quadrieren (3^2 , 2^2 , 9^2 usw.) ist eine einfache Sache. Das Quadrieren einer zweistelligen Zahl, z. B. $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$, soll durch die Abb. 3.1 veranschaulicht werden.

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 12 = \\ \hline 10 \cdot 10 = 100 \\ 10 \cdot 2 = 20 \\ 2 \cdot 10 = 20 \\ 2 \cdot 2 = 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

oder mit Buchstaben:

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 10 = a^2 \\ 10 \cdot 2 = ab \\ 2 \cdot 10 = ba \\ 2 \cdot 2 = b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2ab$$

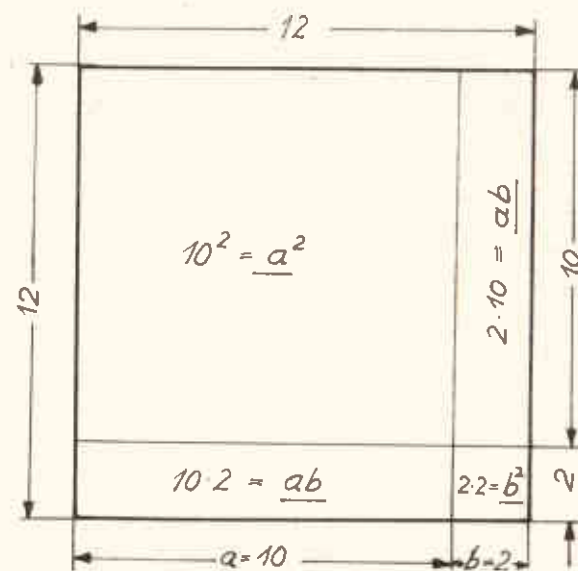


Abb. 3.1

Dafür kann man schreiben: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Das Quadrat von 12 oder $12^2 = 144$ kann in vier Rechenoperationen zerlegt werden:

- (1) $a^2 = 10 \cdot 10$ (Quadrat der Zehner)
- (2) $ab = 10 \cdot 2$ (Produkt aus Zehner und Einer)
- (3) $ba = 2 \cdot 10$ (Produkt aus Einer und Zehner)
- (4) $b^2 = 2 \cdot 2$ (Quadrat der Einer)

$$a^2 + 2ab + b^2 = 144$$

Diese Überlegung ist außerordentlich **wichtig**. Jedes Quadrat einer zweistelligen Zahl besteht aus dem Quadrat der Zehner (a^2), dem Quadrat der Einer (b^2) und zweimal aus dem Produkt der Zehner und Einer ($2ab$). Beim Radizieren kommen wir hierauf zurück.

3.1. Addition und Subtraktion von Potenzen

Potenzen können **nur** addiert oder subtrahiert werden, wenn sie **dieselben Basen und dieselben Exponenten haben**.

Beispiel: $4a^3 + 6a^3 + 9a^3 - 5a^3 - 14a^3 + 7a^3 = 7a^3$

Hier sind alle Basen und alle Exponenten gleich, nämlich alle a^3 .

Um die Addition auszuführen, brauchen wir nur die Faktoren 4, 6, 9 usw. zu addieren bzw. zu subtrahieren.

Ebenso: $3b^2 + 2b^2 - b^2 + 4b^2 - 6b^2 = 2b^2$

Wie steht es nun aber mit der Aufgabe:

$$4a^3 + 6a^2 + 9a^4 - 5a^5 = ?$$

In der vorstehenden Aufgabe sind die **Basen gleich** (a), die **Exponenten** sind aber **verschieden** (a^3 , a^2 usw.). Diese Rechnung ist **nicht weiter ausführbar**.

Merke:

Potenzen mit gleichen Basen und Exponenten werden addiert bzw. subtrahiert, indem ihre Beizahlen addiert oder subtrahiert werden. Die Basen und Exponenten bleiben im Ergebnis unverändert.

3.2. Multiplikation von Potenzen

Merke:

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.

Beispiel: $a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{4+3+2} = a^9$

Um diesen Rechengang deutlich zu machen, setzen wir in der vorstehenden Aufgabe für a den Wert 10 ein und erhalten für die einzelnen Potenzen:

$$a^4 = 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$$

$$a^3 = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$

$$a^2 = 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

Die Einzelergebnisse müssen nun **multipliziert** werden, also

$$10\,000 \cdot 1\,000 \cdot 100 = 1\,000\,000\,000$$

Schneller kommen wir jedoch zum selben Ergebnis, wenn wir die Basis (10) beibehalten und die einzelnen Exponenten addieren.

$$10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 10^{4+3+2} = 10^9 \text{ (also eine Zahl mit 9 Nullen)}$$

Probe: $10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000\,000$

Ebenso: $4a^2 \cdot 6a^3 \cdot 9a^4 \cdot 5a^3 = ?$

$$4a^2 = 4 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$$

$$6a^3 = 6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,000$$

$$9a^4 = 9 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$$

$$5a^3 = 5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5\,000$$

Die Einzelergebnisse müssen noch multipliziert werden:

$$400 \cdot 6\,000 \cdot 90\,000 \cdot 5\,000 = 1\,080\,000\,000\,000\,000$$

Wir kommen zum selben Ergebnis, wenn wir die Aufgabe wie folgt an-
fassen: $4a^2 \cdot 6a^3 \cdot 9a^4 \cdot 5a^3 = 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5a^{2+3+4+3} = 1080a^{12}$

$$1080a^{12} = 1\,080\,000\,000\,000\,000$$

Beispiele: a) $3a^2b^7 \cdot 5a^3b^2 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^7 \cdot b^2$
 $= 15a^{2+3}b^{7+2}$
 $= 15a^5b^9$

b) $(2ab)^3 = 2^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2a^3 \cdot b^3$
 $= 8a^3b^3$

3.3. Division von Potenzen

Merke:

Das Dividieren ist, wie wir wissen, eine Umkehrung des Multiplizierens. Wie wir beim Multiplizieren der Potenzen ihre Exponenten addiert haben, so müssen wir beim Dividieren von Potenzen deren Exponenten subtrahieren.

Beispiel: $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$

Wir machen auch jetzt wieder die Probe, indem wir für $a = 10$ einsetzen.

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{1000000}{100} = 10000$$

oder einfacher:

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4 = 10^4 = 10000$$

Stehen in der Aufgabe noch **Faktoren** dabei, so werden die Faktoren **vorher** dividiert.

Beispiel: $\frac{10x^4}{5x^3} = 2x^{4-3} = 2x$ oder
 $\frac{15y^5}{5y^2} = 3y^{5-2} = 3y^3$

Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

Beispiel: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$ oder
 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

Wenn bei einem Bruch der **Exponent** des **Nenners** größer als der des Zählers ist, so gibt es z. B. folgende Lösungsmöglichkeiten:

$$\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$$

Andererseits ist $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$

Demnach ist $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Hieraus folgt:

Wird eine Potenz vom Zähler in den Nenner oder vom Nenner in den Zähler gebracht, so muß man das Vorzeichen des Exponenten umkehren.

Beispiel: $\frac{a^{-2} \cdot b^3}{a^{-3} \cdot b^2} = a^{-2} \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^{-2} = a^{-2+3} \cdot b^{3-2} = ab$

Allgemein ist nach den gelernten Potenzregeln:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Andererseits ist $\frac{a^m}{a^m} = 1$

Demnach ist $a^0 = 1$

Hieraus ergibt sich: Jede Potenz mit dem Exponenten Null hat den Wert 1.

$$a^0 = 1$$

$$b^0 = 1$$

$$x^0 = 1$$

usw.

3.4. Potenzen von Summen und Differenzen

Eine **Summe** oder **Differenz** wird potenziert, indem man die Basis addiert bzw. subtrahiert und den Exponenten beibehält oder die Potenz in ein **Produkt** verwandelt (besonders bei allgemeinen Zahlen).

$$(2 + 4)^2 = 6^2 = 36 \text{ oder}$$

$$(2 + 4)^2 = (2 + 4) \cdot (2 + 4) = 4 + 8 + 8 + 16 = 36$$

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Ein **Zahlenausdruck** mit zwei **Gliedern** in einer **Klammer** nennt man ein **Binom**.

3.5. Potenzen von Produkten

Ein **Produkt** wird potenziert, indem man jeden **Faktor** potenziert.

$$(2 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 64 \text{ oder}$$

$$(2 \cdot 4)^2 = 8^2 = 64$$

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

3.6. Potenzen von Potenzen

Merke:

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.

Beispiele: $(2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$$(a^2)^2 = a^{2 \cdot 2} = a^4$$

$$(a^2 \cdot b^3)^3 = a^{2 \cdot 3} b^{3 \cdot 3} = a^6 b^9$$

Zusammenstellung der Potenzregeln:

Definition: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$

Multiplikation: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Division: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenzieren von Potenzen:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$$

Erkenntnisse: $a^{-n} = a^{-n} \frac{a^n}{a^n} = \frac{a^{-n+n}}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

Eine Potenz wechselt unter bzw. über den Bruchstrich mit umgekehrten Exponenten.

Übungsaufgaben:

343. Bestimmen Sie den Wert der Potenzen: $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ bis 2^{10}

344. a) $3^5 - 5^3$ b) $2^7 - 7^2$ c) $2^8 - 8^2$ d) $4^3 - 5^4$

345. a) $\frac{1}{3}ab^3 + \frac{1}{6}ab^3 - \frac{1}{2}ab^3$ b) $\frac{2}{3}ax^4 - \frac{1}{6}ax^4 + \frac{1}{2}ax^4$

346. a) $3a^3 + 2a^3 - 5a^3$ b) $8x^4 - 7x^4 - x^5$ c) $7x^5 - 3y^5 + x^5$

347. a) $5a^m + 3a^m - 4a^m$ b) $5a^2b + ab^2 - 4a^2b$

348. a) $a^3 \cdot a^3$ b) $b^7 \cdot b^5$ c) $x^0 \cdot x$ d) $y \cdot y^5$

Übungsaufgaben:

349. a) $a^3 \cdot a^n$ b) $a^n \cdot a$ c) $b^{x-1} \cdot b^x$ d) $x^3 \cdot x^{n-3}$

350. a) $c^x \cdot c^{3x}$ b) $d^{x+1} \cdot d^{x-1}$ c) $p^n \cdot p^{5-n}$ d) $q^{8-x} \cdot q^x$

351. a) $a^{n+x} \cdot a^{n-x}$ b) $b^{4+n} \cdot b^{n-4}$ c) $c^{5-x} \cdot c^{x+n}$ d) $d^{2-x} \cdot d^{x-2}$

352. a) $2a^5 \cdot 5a$ b) $5b^7 \cdot 4b^3$ c) $3x^3 \cdot 2x^3$ d) $4x \cdot 7x^4$

353. a) $a^2b \cdot ab^3$ b) $2b^3c \cdot c^4$ c) $ax^3 \cdot 3a^4x$ d) $2a^4y \cdot 4y^3$

354. a) $\frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{1}{3}a^3$ b) $\frac{1}{6}c^3 \cdot \frac{3}{4}c^4$ c) $\frac{5}{6}ab^3 \cdot \frac{1}{5}a^4$ d) $\frac{3}{4}x^4 \cdot 8xy^3$

355. a) $\frac{1}{2}ab^3 \cdot \frac{1}{3}a^4$ b) $4a^2x \cdot \frac{1}{4}x^3$ c) $6a^3x \cdot \frac{2}{3}a^4x$ d) $\frac{3}{5}x^3 \cdot \frac{1}{3}x^2y^3$

356. a) $\frac{15x^4}{4} \cdot \frac{8x^5}{5}$ b) $\frac{7m^3}{5} \cdot \frac{15m^5}{28}$ c) $\frac{2a^3b}{7} \cdot \frac{5a^4b^6}{4}$

d) $\frac{16a^3b^3}{25} \cdot \frac{15ab^4}{24}$

357. a) $\frac{a^{8m-5n}}{b^{6m+3n}} \cdot \frac{a^{8n-7m}}{b^{4n-m}}$ b) $\frac{r^{a+6}}{s^{6a-7}} \cdot \frac{4r^{7-3a}}{9s^{8-5a}}$

358. a) $\frac{a^7}{a^3}$ b) $\frac{b^6}{b^6}$ c) $\frac{c^6}{c^6}$ d) $\frac{a^8}{a}$ e) $\frac{x^n}{x^6}$ f) $\frac{ax}{a}$ g) $\frac{a^3}{2a}$

h) $\frac{3b^7}{5b^3}$ i) $\frac{9x^{10}}{12x^3}$

359. a) $a^3 : a$ b) $a^3 : a^3$ c) $x^7 : x^4$ d) $b^n : b$ e) $\frac{1,25a}{0,75ax}$ f) $\frac{\frac{3-a^n}{3}}{\frac{1-a^5}{2}}$

360. a) $3a^{n+1} : 3a$ b) $6x^{n+7} : 3x^n$ c) $5b^{x+1} : 2bx+1$ d) $8p^n : 4q^x$

361. a) $\frac{a^{n+1}}{a}$ b) $\frac{a^{n+1}}{a^n}$ c) $\frac{a^n}{a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$ e) $\frac{b^{2x}}{bx+1}$ f) $\frac{b^{3x}}{bx-1}$

362. a) $\frac{c^{x+3}}{c^{x+1}}$ b) $\frac{c^{x-1}}{c^{x-3}}$ c) $\frac{c^{x-1}}{c^{3-x}}$ d) $\frac{c^{3x}}{x-3}$ e) $\frac{x^{n-4}}{x^{n-6}}$ f) $\frac{x^n}{x^{n-2}}$

Übungsaufgaben:

363. a) $\frac{a^{n+x}}{a^{n-1}}$ b) $\frac{a^{2x}}{a^{n-x}}$ c) $\frac{a^{n+x}}{a^{2x}}$ d) $\frac{c^{3x}}{c^{2x-n}}$ e) $\frac{c^{n+1}}{c^{n+x}}$ f) $\frac{c^{2x-1}}{c^{3x-5}}$

364. a) $\frac{a^5b^7}{a^2b^4}$ b) $\frac{a^3x^5}{ax^4}$ c) $\frac{a^7b^7}{a^5b^5}$ d) $\frac{a^4b^8}{a^3b^4}$ e) $\frac{b^3x^3}{b^4x^4}$ f) $\frac{b^ny^3}{b^2y}$ g) $\frac{a^nx}{ax^n}$

365. a) $\frac{a}{a^{-1}}$ b) $\frac{a^0}{x^{-2}}$ c) $\frac{a^0}{x^0}$ d) $\frac{4}{4^{-1}}$ e) $\frac{5^{-2}}{5^{-3}}$ f) $\frac{x^n}{x^{-n}}$

366. a) $2^{-1} \cdot 4^2$ b) $6^{-3} \cdot 12^2$ c) $\frac{4^{-3}}{2^{-5}}$ d) $\frac{10^{-4}}{25^{-2}}$

367. a) $5a^{-5} \cdot 4a^4$ b) $3a^{-2} \cdot 3b^3$ c) $3a^{-2} \cdot (3b)^3$ d) $(2a^{-2})^0 \cdot 3a^{-1}$

368. a) $\frac{3}{2}ab^{-3} \cdot 6a^{-2}b$ b) $\frac{3}{4}a^{-1}b^3 \cdot 8a^4b^{-2}$ c) $\frac{1}{2}x^{-n}y \cdot \frac{1}{3}x^ny^{-3}$

369. a) $\frac{1}{2}x^2y^{-2} \cdot \frac{4}{5}x^{-1}y^2$ b) $6,4a^{-3}b^2 \cdot 0,375a^4b^{-3}$

370. a) $\frac{a^{n+1} \cdot b^x}{a^n \cdot b^{x-1}}$ b) $\frac{a^{n-1} \cdot b^{n-2}}{a^{n-3} \cdot b^{n-4}}$ c) $\frac{x^{2n-1} \cdot y^{3n+2}}{x^{n+1} \cdot y^{2n-3}}$ d) $\frac{a^{n+x} \cdot b^{2n-x}}{a^{n-x} \cdot b^{n+2x}}$

371. a) $\frac{a^5x^{-3}y}{b^6m^{-1}} : \frac{a^4x+y}{b^6m^{-2}}$ b) $\frac{21a^3b^2x^{n+1}}{18c^3y^2z^{n-3}} : \frac{35ab^3x^{n-1}}{27c^2y^4z^{n-2}}$

372. a) $(abc)^5$ b) $(3ax)^2$ c) $(4abc)^3$ d) $(5xy)^4$

373. a) $(4x \cdot 3y \cdot 5z)^2$ b) $(5ab)^3 \cdot (3ab) \cdot (2ab)^2$

374. a) $\left(\frac{2a}{b}\right)^3$ b) $\frac{(2a)^3}{4b}$ c) $\left(\frac{2a}{3x}\right)^2$ d) $\left(\frac{3r}{5s}\right)^3$

375. a) $\left(\frac{1}{2}ax\right)^3$ b) $\left(\frac{3}{4}xy\right)^2$ c) $\frac{3}{4}(xy)^2$ d) $\left(\frac{2}{3}xy\right)^4$

376. a) $a^2 \cdot b^2$ b) $x^n \cdot y^n$ c) $(2m)^3 \cdot (4n)^3$ d) $\left(\frac{5a}{4b}\right)^3 \cdot \left(\frac{8b}{9c}\right)^3 \cdot \left(\frac{12c}{15a}\right)^3$

377. a) $4^2 \cdot 15^2$ b) $2^3 \cdot 35^3$ c) $8^3 \cdot 125^3$ d) $2^4 \cdot 5^4$

Übungsaufgaben:

378. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ c) $2,25^2 \cdot 0,4^2$ d) $0,2^3 \cdot 2,5^3$

379. a) $a^4 : b^4$ b) $x^n : y^n$ c) $(25r)^4 : (5r)^4$ d) $\left(\frac{3}{3-v}\right)^3 : \left(\frac{1}{2-v}\right)^3$

380. a) $(ab)^m : b^m$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^r : c^r$ c) $r^x : \left(\frac{s}{t}\right)^x$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^p : \left(\frac{c}{d}\right)^p$

381. a) $\frac{48^3}{16^2}$ b) $\frac{15^3}{3^3}$ c) $\frac{96^3}{24^3}$ d) $\frac{39^4}{65^4}$ e) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^3$

382. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^4$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) $0,72^2 : 0,24^2$ d) $0,6^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2$

383. a) $(a^2)^7$ b) $(b^3)^3$ c) $(c^4)^5$ d) $(2^3)^2$ e) $(3^4)^n$ f) $(x^r)^5$ g) $(y^p)^8$

384. a) $(a^{n-1})^2$ b) $(x^3)^{n+1}$ c) $(a^n)^{n-1}$ d) $(x^{n+1})^{n-1}$

385. a) $(a^3b)^2$ b) $(3ab^2)^4$ c) $\left(\frac{a^2}{3b}\right)^2$ d) $\left(\frac{2a^2x}{3by^3}\right)^3$

3.7. Rechnen mit Zehnerpotenzen

Bei unübersichtlichen großen oder kleinen Zahlen ist es häufig zweckmäßig, die Zahl als **Zehnerpotenz** darzustellen.

Beispiele: a) $5255500 = 5,2555 \cdot 10^6$
 $= 52,555 \cdot 10^5$
 $= 525,55 \cdot 10^4$
 $= 5255,5 \cdot 10^3$
 $= 52555 \cdot 10^2$

b) $0,000550 = 550 \cdot 10^{-6}$
 $= 55,0 \cdot 10^{-5}$
 $= 5,5 \cdot 10^{-4}$

Merke:

Bei einer Multiplikation mit einer Zehnerpotenz wird das Komma um so viele Stellen nach rechts (bei positivem Exponent) bzw. nach links (bei negativem Exponent) verschoben, wie der Exponent angibt.

Die folgende Aufstellung gibt eine Übersicht über die gebräuchlichsten Zehnerpotenzen:

Zehnerpotenz	Zahl	Zahlwort	Bezeichnung der Maßeinheit
10^{12}	1 000 000 000 000	Billion	Tera T
10^9	1 000 000 000	Milliarde	Giga G
10^6	1 000 000	Million	Mega M
10^3	1 000	Tausend	Kilo k
10^2	100	Hundert	Hekto h
10^1	10	Zehn	Deka D
10^0	1	Eins	
10^{-1}	0,1	ein Zehntel	Dezi d
10^{-2}	0,01	ein Hundertstel	Zenti c
10^{-3}	0,001	ein Tausendstel	Milli m
10^{-6}	0,000 001	ein Millionstel	Mikro μ
10^{-9}	0,000 000 001	ein Milliardstel	Nano n
10^{-12}	0,000 000 000 001	ein Billionstel	Pico p

Beispiele: $1 \text{ k}\Omega = 1\,000 \Omega = 10^3 \Omega$

$1 \text{ M}\Omega = 1\,000\,000 \Omega = 10^6 \Omega$

$1 \mu\text{F} = \frac{1}{1\,000\,000} \text{ F} = 10^{-6} \text{ F}$

$1 \text{ mA} = \frac{1}{1000} \text{ A} = 10^{-3} \text{ A}$

Umwandeln von Zahlen in Zehnerpotenzen und Rechnen mit Zehnerpotenzen:

Beispiel: $\frac{0,05 \cdot 1\,200\,000}{0,00002 \cdot 15\,000\,000} =$

Wenn wir diese Aufgabe ausrechnen wollen, ohne unsere Potenzregeln zu benutzen, könnten leicht Rechenfehler entstehen, zum anderen wäre sie auch nicht ganz einfach zu lösen.

Beim Rechnen mit unübersichtlich großen oder kleinen Zahlen ist es daher oft von Vorteil, die Zahl in ein Produkt einer übersichtlichen, geringstelligen Zahl mit einer Zehnerpotenz zu ändern. Die Zehnerpotenzen lassen sich dann leicht zusammenfassen oder fallen durch Kürzen ganz weg.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{0,05 \cdot 1\,200\,000}{0,00002 \cdot 15\,000\,000} &= \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 10^6} \\ &= \frac{5 \cdot 12 \cdot 10^8}{2 \cdot 15 \cdot 10^1} = 2 \cdot 10^{8-1} = 200 \end{aligned}$$

Beispiele aus der Elektrotechnik:

1. Verwandeln Sie: 130 V in mV
 $1 \text{ V} = 10^3 \text{ mV}$
 $130 \text{ V} = 130 \cdot 10^3 \text{ mV}$
 $130 \text{ V} = 130\,000 \text{ mV}$

2. Verwandeln Sie: $0,5 \mu\text{F}$ in F
 $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$
 $0,5 \mu\text{F} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
 $0,5 \mu\text{F} = 0,000\,0005 \text{ F}$

3. Berechnen Sie: U , wenn
 $I = 6 \text{ mA} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$
 $R = 12 \text{ k}\Omega = 12 \cdot 10^3 \Omega$
 $U = I \cdot R$
 $U = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 12 \cdot 10^3 \Omega$
 $U = 6 \cdot 12 \cdot 10^{3-3}$
 $U = 72 \text{ V}$

4. Berechnen Sie: I , wenn
 $U = 0,6 \text{ kV} = 6 \cdot 10^2 \text{ V}$
 $R = 1,5 \text{ M}\Omega = 1,5 \cdot 10^6 \Omega$
 $I = \frac{U}{R}$
 $I = \frac{6 \cdot 10^2 \text{ V}}{1,5 \cdot 10^6 \Omega}$
 $I = 4 \cdot 10^{2-6}$
 $I = 4 \cdot 10^{-4}$
 $I = 0,0004 \text{ A}$
 $I = 0,4 \text{ mA}$

5. Berechnen Sie: R , wenn
 $U = 60 \text{ V}$
 $I = 50 \text{ mA} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ A}$
 $R = \frac{U}{I}$
 $R = \frac{60 \text{ V}}{50 \cdot 10^{-3} \text{ A}}$
 $R = 1,2 \cdot 10^3$
 $R = 1200 \Omega$

Übungsaufgaben:

386. Folgende Aufgaben sind in Zehnerpotenzen umzuwandeln:

- a) $118\,000\,000 = 1,18 \cdot 10^8$, oder $118 \cdot 10^6$
- b) $11\,000 = 11 \cdot 10^3$, oder $0,11 \cdot 10^5$
- c) $230\,000 = 2,3 \cdot 10^5$, oder $0,230 \cdot 10^6$
- d) $12\,000\,000 = 12 \cdot 10^6$, oder $1,2 \cdot 10^7$
- e) $0,00000125 = 1,25 \cdot 10^{-6}$, oder $125 \cdot 10^{-8}$
- f) $0,125 = 125 \cdot 10^{-3}$, oder $1,25 \cdot 10^{-1}$
- g) $0,000120 = 120 \cdot 10^{-6}$, oder $1,2 \cdot 10^{-4}$

387. a) $\frac{60\,000 \cdot 0,0000125}{1\,500 \cdot 250 \cdot 0,0005}$ b) $\frac{3\,330\,000 \cdot 25 \cdot 10^9}{0,00000666 \cdot 5 \cdot 10^4}$

c) $\frac{0,0000018 \cdot 1\,500\,000}{0,24 \cdot 0,00012}$ d) $\frac{15 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^6}{12 \cdot 10^{-9} \cdot 75 \cdot 10^{-2}}$

e) $\frac{65\,000 \cdot 0,7500}{0,0013 \cdot 1800}$

388. Verwandeln Sie:

- a) $20\text{ k}\Omega$ in Ω b) 2 nF in pF
- c) $6\text{ M}\Omega$ in $\text{k}\Omega$ d) $0,06\text{ m}$ in cm
- e) $10\text{ }\mu\text{F}$ in nF f) 3600 mm in m

3.8. Zehnerlogarithmus

Das umgekehrte Rechnen mit Zehnerpotenzen ist das **Logarithmieren**¹⁾. Wir behandeln das logarithmische Rechnen jedoch nur soweit, wie es für die Kenntnisvermittlung der Grundlagen der Elektro- und Fernmeldetechnik notwendig ist. Auf die sonstigen logarithmischen Rechenregeln wird bewußt verzichtet, weil der Auszubildende sie während seiner Ausbildungszeit im allgemeinen nicht braucht. Da mehrere physikalische und elektrische Größen nicht linear, sondern logarithmisch voneinander abhängig sind, wollen wir den Unterschied zwischen einer linearen und einer logarithmischen Abhängigkeit an folgendem Beispiel verdeutlichen.

¹⁾ logarithmisch = auf die Hochzahl bezogen.

Beispiel:

Ein Zimmer wird von 10 Wachskerzen beleuchtet. Dabei empfinden wir eine ganz bestimmte Helligkeit, die wir als Helligkeit „Eins“ bezeichnen wollen. Soll nun die Helligkeitsempfindung verdoppelt werden, dann genügt es nicht, die Kerzenzahl zu verdoppeln. Vielmehr muß die Anzahl der Kerzen verzehnfacht, d.h. auf hundert vermehrt werden. Soll die Helligkeit verdreifacht werden, dann muß die Kerzenzahl auf tausend, für die vierfache Helligkeit auf zehntausend usw. erhöht werden. Aus diesem verschiedenartigen Wertzuwachs für die Helligkeitsempfindung und für die Anzahl der brennenden Kerzen erkennen wir, daß die **Helligkeitszunahme einen linearen und die Vermehrung der Kerzen einen logarithmischen Verlauf aufweisen**. Ursache (Anzahl der Kerzen) und Wirkung (Helligkeitsempfindung) stehen also in einem logarithmischen Zusammenhang. Dies soll in nachstehender Tabelle weiter verdeutlicht werden.

Helligkeitsempfindung	1	2	3	4
Kerzenanzahl	10 10^1	100 10^2	1000 10^3	10000 10^4
Exponent für die Zehnerpotenz	1	2	3	4

Bei der Helligkeitsempfindung ist der Wertzuwachs stets gleich groß; er beträgt jeweils eine Einheit. Der Verlauf der Helligkeitszunahme ist linear.

Für den linearen Verlauf der Helligkeitsempfindung müssen die Kerzen jeweils auf den zehnfachen Wert vermehrt werden. Betrachtet man hierbei nur die Exponenten der Zehnerpotenzen, dann ist zu erkennen, daß die Exponenten linear ansteigen, während der eigentliche Wertzuwachs jeweils das Zehnfache beträgt. Der Verlauf der Kerzenvermehrung ist also auf den Exponenten bezogen linear; die Kerzenzunahme selber aber verläuft logarithmisch.

Bringen wir diese Überlegungen in eine mathematische Form, so ergibt sich:

$$\text{Helligkeit} = \text{Logarithmus der Kerzenanzahl}$$

In Formelzeichen:

$$H = \lg K$$

In dieser Größengleichung ist die Helligkeit H der Logarithmus von der Kerzenanzahl K ; die Kerzenanzahl K wird als Numerus¹⁾ bezeichnet.

¹⁾ Numerus = Zahl, für die der Logarithmus ermittelt werden soll; Mehrzahl: Numeri.

Beispiel:

Ein Zimmer wird von $n = 1000$ Kerzen beleuchtet. Wie groß ist die Helligkeit in diesem Raum?

Gegeben: n

Gesucht: H

Lösung: $H = \lg n$ Der Logarithmus von 1000 ist gleich 3, weil
 $H = \lg 1000$ $10^3 = 1000$ ergibt.
 $H = 3$

Die Helligkeit in dem Zimmer beträgt 3 Einheiten.

Merke:

Der Zehnerlogarithmus ist der Exponent einer Zehnerpotenz, deren Wert den Numerus ergibt.

Beispiele:

Der Logarithmus von 100 ist 2, weil $10^2 = 100$ ergibt;
 der Logarithmus von 1000000 ist 6, weil $10^6 = 1000000$ ergibt;
 der Logarithmus von 1 ist 0, weil $10^0 = 1$ ergibt usw.

Schwierig wird das Rechnen mit Logarithmen, wenn die Werte des Logarithmus keine ganzzahligen Ziffern, sondern Dezimalbrüche sind. In diesen Fällen kann der Logarithmus nur aus **Logarithmentabellen** abgelesen werden.

Beispiele:

Der Logarithmus von 200 ist 2,301, weil $10^{2,301} = 200$ ergibt;
 der Logarithmus von 500 ist 2,70, weil $10^{2,7} = 500$ ergibt usw.
 Hierfür sind die logarithmischen Werte einer Logarithmentabelle entnommen worden.

Das logarithmische Rechnen wird in der Fernmeldetechnik z. B. bei der Berechnung von Leitungsdämpfungen, von Lautstärkenwerten beim Schall, von Ein- und Ausschaltvorgängen bei Kondensatoren und Spulen sowie bei regelbaren Widerständen angewendet.

1. Beispiel:

Bei einer Anschlußleitung beträgt die Leistung des Sprechwechselstroms am Leitungseingang $P_e = 1 \text{ mW}$; am Leitungsausgang wird eine elektrische Wechselstromleistung von $P_a = 1 \text{ } \mu\text{W}$ gemessen. Wie groß ist die Dämpfung der Anschlußleitung?

Gegeben: $P_e = 1 \text{ mW}$; $P_a = 1 \text{ } \mu\text{W}$

Gesucht: a

Lösung: Um diese Aufgabe lösen zu können, muß man wissen, daß die Leitungsdämpfung in Bel, Kurzzeichen B, angegeben wird. Meistens verwendet man den zehnten Teil eines Bels, nämlich das Dezibel, Kurzzeichen dB.

Die Leitungsdämpfung ist der Logarithmus des Verhältnisses der Eingangs- zur Ausgangsleistung:

$$a = \lg \frac{P_e}{P_a}$$

$$a = \lg \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ W}} = \lg 10^3 = \lg 1000$$

$$a = 3 \text{ B} = 30 \text{ dB}$$

Der Logarithmus von 1000 ist 3, weil $10^3 = 1000$ ist.
 3 Bel = 30 Dezibel

Die Leitungsdämpfung der Anschlußleitung beträgt $a = 30 \text{ dB}$.

2. Beispiel:

Die Leitungsdämpfung einer Anschlußleitung beträgt $a = 20$ Dezibel. Die Wechselstromleistung am Leitungseingang wird auf $P_e = 1 \text{ mW}$ eingestellt. Wie groß ist die Wechselstromleistung am Leitungsausgang?

Gegeben: $a = 20 \text{ dB}$; $P_e = 1 \text{ mW}$

Gesucht: P_a

Lösung: 20 Dezibel = 2 Bel = 2 B

$$a = \lg \frac{P_e}{P_a}$$

$$2 = \lg \frac{1 \text{ mW}}{P_a}$$

Wenn der Logarithmus eines Numerus 2 beträgt, dann muß der Numerus 100 betragen, weil $10^2 = 100$ ist. Daraus folgt:

$$\frac{P_e}{P_a} = \frac{1 \text{ mW}}{P_a} = 100$$

umstellen nach P_a !

$$P_a = \frac{P_e}{100} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{100} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ W} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ W} = 10 \text{ } \mu\text{W}$$

Die Ausgangsleistung der Anschlußleitung beträgt $P_a = 10 \text{ } \mu\text{W}$.

Übungsaufgaben:

389. a) Ermitteln Sie von den Numeri die Zehnerlogarithmen:

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 100000000, 1000000000000

b) Ermitteln Sie von den Zehnerlogarithmen die Numeri:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12

4. Radizieren (Wurzelrechnung)

4.1. Allgemeines

Haben wir die Potenz 4^2 , so läßt sich aus der Basis 4 und dem Exponenten 2 der Potenzwert $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ berechnen.

Welche Zahl muß aber ins **Quadrat** erhoben werden, um die Zahl 16 zu erhalten? Die Basis (4) ist also **unbekannt**. Bekannt sind dafür der Potenzwert 16 und der Exponent 2. Diese Aufgabe führt uns zur **Wurzelberechnung**.

Das **Wurzelziehen** oder **Radizieren** ist nichts anderes als das Bestimmen der **Basis**, wenn der Potenzwert und der Potenzexponent bekannt sind.

Wir unterscheiden das Ausziehen der **Quadratwurzel**, der **Kubikwurzel** usw. Wie es eine 2., 3., 4. usw. Potenz gibt, so gibt es auch das Ausziehen der 2., 3., 4. usw. Wurzel. Praktisch kommen jedoch nur die 2. und 3. Wurzel, also die Quadrat- und Kubikwurzel in Betracht.

Beispiele: a) $\sqrt[2]{25} = 5$ Probe: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
 b) $\sqrt[3]{125} = 5$ Probe: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Das Zeichen für das Ausziehen der Wurzel ist ein etwas verzerrtes lateinisches r, von Radix = Wurzel. Zum Wurzelziehen wird in die obere Öffnung eine kleine 2, 3 usw. gesetzt, um anzugeben, ob die 2. oder 3. Wurzel gemeint ist.

$$\begin{array}{ccc} \text{Wurzelexponent} & & \\ 3 & & \\ \downarrow & & \\ \sqrt[3]{125} & = & 5 \\ \text{Radikand} & & \text{Wurzelwert} \end{array}$$

Bei der Quadratwurzel kann man den Wurzelexponenten 2 weglassen.

$\sqrt{64}$ heißt also Quadratwurzel aus $64 = 8$; Probe: $8 \cdot 8 = 64 = 8^2$
 oder $\sqrt[3]{64}$ heißt Kubikwurzel aus $64 = 4$; Probe: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = 4^3$

Wir sehen also, daß das **Ausziehen** der Wurzel die **Umkehrung** des **Potenzierens** ist; wie Dividieren die Umkehrung des Multiplizierens und Subtrahieren die Umkehrung des Addierens ist.

Wir haben in dem letzten Abschnitt bei der Potenzrechnung das Quadrieren einer zweistelligen Zahl in einer bildlichen Darstellung (Abb. 3.1) veranschaulicht. Es wurde hierbei festgestellt, daß die Aufgabe $12^2 = 144$ in 4 Rechengänge zerlegt werden kann, nämlich in $10^2 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 2^2$ oder $a^2 + 2ab + b^2$.

Hieraus erklärt sich nun das Ausziehen der Wurzel $\sqrt{144}$. In der Zahl 144 steckt also eine Summe der Glieder $a^2 + 2ab + b^2$, wobei die Werte für a und b zunächst noch unbekannt sind. Will man die Quadratwurzel aus der Zahl ziehen, so muß man die Größen a und b **suchen** und dann die Glieder a^2 , $2ab$ und b^2 wieder von der Zahl **abziehen**. Man geht dabei wie folgt vor:

$$\sqrt{144}$$

Die Zahl, die unter dem Wurzelzeichen steht, wird von rechts nach links in **Gruppen** von je 2 Ziffern eingeteilt; bei Dezimalzahlen vom Komma nach links und rechts. **Die Zahl der Gruppen gibt an, wieviel Stellen das Ergebnis hat.**

In dem folgenden Beispiel wollen wir zum besseren Verständnis die Potenz- und Wurzelrechnung gegenüberstellen.

Potenzieren:	Radizieren:
$12 \cdot 12 = 144$	$\sqrt{144} = \overset{a}{10} + \overset{b}{2} = 12$
$(10 + 2)(10 + 2) = (a+b)(a+b)$	
$10 \cdot 10 = 100$	$a \cdot a = a^2 \longrightarrow 100$
$10 \cdot 2 = 20$	$2a \quad b$
$2 \cdot 10 = 20$	$44 : 20 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$	$b \cdot b = b^2 \longrightarrow 4$

Die Quadratwurzel aus 144 wird also wie folgt ermittelt:

- Die Zahl 144 wird mit einem Wurzelzeichen versehen und von rechts nach links in zwei Gruppen eingeteilt.
- Da wir bei der Wurzel aus 144 zunächst nur die Zehner bestimmen wollen, so kommen wir auf 10, denn $20 \cdot 20$ wäre bereits 400.
- Die 10 setzen wir als a in das Ergebnis ein und ziehen $a^2 = 100$ von 144 ab.
- Den Rest 44 teilen wir durch $2a$ ($a = 10$, $2a = 20$), somit erhalten wir die nächste Stelle des Ergebnisses $b = 2$.
- Nun ziehen wir $2ab = 40$ von 44 ab; es bleibt ein Rest von 4.
- Von diesem Rest ziehen wir $b^2 = 4$ ab und es bleibt 0 übrig. Die Quadratwurzel aus 144 ist also 12.

Diese Erklärung ist viel umständlicher als die Rechnung selbst, wenn man sich die folgende vereinfachte Methode einprägt:

Vereinfachte Methode:

$$\sqrt{27|35|29} = 5 \ 2 \ 3$$

$$\begin{array}{r} 5^2 \rightarrow 25 \\ \hline 2 \ 3 \cdot 5 : 10_2 \\ \hline 2 \cdot 102 \rightarrow 2 \ 0 \ 4 \\ \hline 3 \ 1 \ 2 \cdot 9 : 10 \ 4_3 \\ \hline 3 \cdot 1043 \rightarrow 3 \ 1 \ 2 \ 9 \end{array}$$

Erläuterung:

Für die erste Stelle des Wurzelwertes zieht man aus der ersten Gruppe die Wurzel ($\sqrt{27}$ geht 5mal), zieht dann das Quadrat ($5^2 = 25$) von der ersten Gruppe ab, holt die nächsten beiden Ziffern (35) herunter, streicht eine Stelle ab und teilt durch das Doppelte des bisherigen Wurzelwertes ($2 \cdot 5 = 10$). Das Ergebnis von $23:10 = 2$ tritt beim Wurzelwert an die zweite Stelle. Außerdem wird $2 \cdot 102$ von 235 abgezogen. Nun holt man die nächsten beiden Ziffern herunter und verfährt genauso. Also wieder eine Stelle abstreichen und durch das Doppelte von 52 teilen usw.

Wird beim Rechnen das Komma des Radikanden überschritten, so muß auch beim Wurzelwert ein Komma gesetzt werden.

Beispiel:

$$\sqrt{1|39,65|20} = 11,81$$

$$\begin{array}{r} 1^2 \rightarrow 1 \\ \hline 0 \ 3 \cdot 9 : 2_1 \\ \hline 1 \cdot 21 \rightarrow 2 \ 1 \\ \hline 1 \ 8 \ 6 \cdot 5 : 22_2 \\ \hline 8 \cdot 228 \rightarrow 1 \ 8 \ 2 \ 4 \\ \hline 4 \ 1 \ 2 \cdot 0 : 236_3 \\ \hline 1 \cdot 2361 \rightarrow 2 \ 3 \ 6 \ 1 \\ \hline \text{Rest} \quad 1 \ 7 \ 5 \ 9 \end{array}$$

Wurzellösungen, bei denen ein Rest bleibt, besagen, daß die Wurzel nur angenähert bestimmt worden ist; man nennt solche Wurzelwerte **irrationale Zahlen**.

Beispiel:

$$\sqrt{24|01} = 4 \ 9$$

$$\begin{array}{r} 4^2 \rightarrow 16 \\ \hline 8 \ 0 \cdot 1 : 8_9 \\ \hline 9 \cdot 89 \rightarrow 8 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Beachten Sie, daß der Quotient $80 : 8 = 10$ ist, deshalb wird der nächst niedrigere Wert 9 genommen.

Wir können im allgemeinen den Rest (80'1) durch das Doppelte des Wurzelwertes ($80 : 8 = 10$) dividieren. Wenn sich jedoch — wie im vorstehenden Beispiel — ein zu großer Wurzelwert ergibt, dann muß der nächst niedrigere Wert genommen werden.

Weitere Beispiele:

a) $\sqrt{12|96} = 36$

$$\begin{array}{r} 3^2 \rightarrow 9 \\ \hline 3 \ 9 \cdot 6 : 6_6 \\ \hline 6 \cdot 66 \rightarrow 3 \ 9 \ 6 \end{array}$$

b) $\sqrt{95|25|76} = 976$

$$\begin{array}{r} 9^2 \rightarrow 81 \\ \hline 14 \ 2 \cdot 5 : 18_7 \\ \hline 7 \cdot 187 \rightarrow 13 \ 0 \ 9 \\ \hline 1 \ 1 \ 6 \cdot 7 \cdot 6 : 194_8 \\ \hline 6 \cdot 1946 \rightarrow 1 \ 1 \ 6 \ 7 \ 6 \end{array}$$

c) $\sqrt{3|06,25} = 17,5$

$$\begin{array}{r} 1^2 \rightarrow 1 \\ \hline 20 \cdot 6 : 2_7 \\ \hline 7 \cdot 27 \rightarrow 18 \ 9 \\ \hline 1 \ 7 \ 2 \cdot 5 : 34_8 \\ \hline 5 \cdot 345 \rightarrow 1 \ 7 \ 2 \ 5 \end{array}$$

d) $\sqrt{0,42|64|09} = 0,653$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 42 \\ \hline 6^2 \rightarrow 36 \\ \hline 6 \ 6 \cdot 4 : 12_6 \\ \hline 5 \cdot 125 \rightarrow 6 \ 2 \ 5 \\ \hline 3 \ 9 \ 0 \cdot 9 : 130_3 \\ \hline 3 \cdot 1303 \rightarrow 3 \ 9 \ 0 \ 9 \end{array}$$

e) $\sqrt{11|28|96} = 336$

$$\begin{array}{r} 3^2 \rightarrow 9 \\ \hline 22 \cdot 8 : 6_3 \\ \hline 3 \cdot 63 \rightarrow 18 \ 9 \\ \hline 399 \cdot 6 : 66_6 \\ \hline 6 \cdot 666 \rightarrow 399 \ 6 \end{array}$$

f) $\sqrt{2,00|00|00|00} = 1,4142....$

$$\begin{array}{r} 1^2 \rightarrow 1 \\ \hline 1 \ 0 \cdot 0 : 2_4 \\ \hline 4 \cdot 24 \rightarrow 96 \\ \hline 4 \ 0 \cdot 0 : 28_1 \\ \hline 1 \cdot 281 \rightarrow 2 \ 8 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 9 \ 0 \cdot 0 : 282_4 \\ \hline 4 \cdot 2824 \rightarrow 1 \ 1 \ 2 \ 9 \ 6 \\ \hline 6 \ 0 \ 4 \ 0 \cdot 0 : 2828_2 \\ \hline 2 \cdot 28282 \rightarrow 5 \ 6 \ 5 \ 6 \ 4 \\ \hline 3 \ 8 \ 3 \ 6 \text{ usw.} \end{array}$$

Übungsaufgaben:

390. a) $\sqrt[3]{5329} =$ b) $\sqrt[3]{12} =$ c) $\sqrt[3]{0,0025} =$ d) $\sqrt[3]{4,006} =$
391. a) $\sqrt[3]{4147,36} =$ b) $\sqrt[3]{3,14} =$ c) $\sqrt[3]{3} =$ d) $\sqrt[3]{726,18} =$
392. a) $\sqrt[3]{4264} =$ b) $\sqrt[3]{2,5} =$ c) $\sqrt[3]{3,5} =$ d) $\sqrt[3]{6475} =$
393. a) $\sqrt[3]{3249} =$ b) $\sqrt[3]{9801} =$ c) $\sqrt[3]{1936} =$ d) $\sqrt[3]{3^2 + 4^2} =$
394. a) $\sqrt[3]{9980} =$ b) $\sqrt[3]{193,21} =$ c) $\sqrt[3]{3956,41} =$

Falls die vorstehenden Übungsaufgaben nicht zu einem klaren Ergebnis führen (aufgehen), sind sie auf 4 aufeinanderfolgende Ziffern zu berechnen. Zu jeder Aufgabe ist die Probe zu machen.

4.2. Wichtige Regeln

Nachstehend sind die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Wurzeln zusammengefaßt:

4.2.1. Vorzeichen beim Radizieren

Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten und positiven Radikanden haben einen positiven und einen negativen Wurzelwert.

Beispiele: a) $\sqrt[2]{9} = \pm 3$; denn $(+3)^2 = 9$
 $(-3)^2 = 9$

$$\text{b) } \sqrt[n]{a} = \pm b$$

Anders ist es bei Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten. Der Wurzelwert hat das Vorzeichen der Basis.

Beispiele: a) $\sqrt[3]{8} = 2$; denn $(+2)^3 = 8$
 aber $(-2)^3 = -8$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$; denn $(-2)^3 = -8$
 aber $(+2)^3 = +8$

Gerade Wurzeln aus negativen Zahlen (z. B. $\sqrt{-4}$) sind nicht lösbar, weil es keine Zahl gibt, die z. B. ins Quadrat erhoben negativ ist.

Beispiel: $(-2)^2 = +4$ oder $(+2)^2 = +4$

Solche Wurzeln werden in ein Produkt mit $\sqrt{-1}$ als Faktor zerlegt.

Hierbei gilt $\sqrt{-1}$ als imaginäre Zahl i (imaginarium = eingebildet, nicht wirklich), da $\sqrt{-1}$ unlösbar ist.

Beispiel: $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{4} \cdot i = \pm 2i$

4.2.2. Addition und Subtraktion von Wurzeln

Wurzeln mit gleichen Exponenten und Radikanden können addiert bzw. subtrahiert werden, indem man ihre Beizahlen addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel: $2\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$

4.2.3. Multiplikation von Wurzeln desselben Grades

Gleichnamige Wurzeln (d. h. Wurzeln mit gleichen Exponenten) werden multipliziert, indem man unter einem Wurzelzeichen multipliziert.

Beispiele: $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{9 \cdot 25}$
 $3 \cdot 5 = 15$

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{8 \cdot 125}$
 $2 \cdot 5 = 10$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{cd}$$

4.2.4. Radizierung eines Produktes

Ein Produkt wird radiziert, indem man die Faktoren einzeln radiziert und die so erhaltenen Wurzelwerte multipliziert,

Beispiele: $\sqrt[3]{9 \cdot 25} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{25}$
 $15 = 3 \cdot 5$

$\sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}$
 $10 = 2 \cdot 5$

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{cd} = \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{d}$$

4.2.5. Division von Wurzeln desselben Grades

Gleichnamige Wurzeln werden dividiert, indem man unter einem Wurzelzeichen dividiert.

Beispiele:

$$\frac{\sqrt[2]{256}}{\sqrt[2]{16}} = \sqrt[2]{\frac{256}{16}} = \sqrt[2]{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}} = \sqrt[2]{\frac{a}{b}}$$

4.2.6. Radizierung von Brüchen

Ein Bruch wird radiziert, indem man Zähler und Nenner einzeln radiziert und die so erhaltenen Wurzelwerte dividiert.

Beispiele:

$$\sqrt[2]{\frac{256}{16}} = \frac{\sqrt[2]{256}}{\sqrt[2]{16}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\sqrt[2]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}}$$

4.2.7. Radizierung von Potenzen

Potenzen werden radiziert, indem man den Exponenten des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert und das Wurzelzeichen wegläßt.

Beispiele:

$$\sqrt[2]{2^4} = 2^{4:2} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[2]{4^2} = 4^{2:2} = 4$$

$$\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2} = a^2$$

$$\sqrt[3]{a^{15}} = a^{15:3} = a^5$$

4.2.8. Potenzieren von Wurzeln

Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert und die Wurzel mit dem Wurzelexponenten beibehält.

Beispiele:

$$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$(\sqrt[3]{b})^3 = \sqrt[3]{b^3}$$

4.2.9. Radizierung von Wurzeln

Eine Wurzel wird radiziert, indem der Radikand mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert wird.

Beispiele:

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Umkehrung:

Ist der Wurzelexponent ein Produkt, dann wird nacheinander mit den einzelnen Wurzelexponenten radiziert.

$$2 \cdot 3 \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} \quad m \cdot n \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

4.2.10. Erweitern und Kürzen von Wurzeln

Der Wert einer Wurzel ändert sich nicht, wenn man den Exponenten der Wurzel und den des Radikanden mit derselben Zahl multipliziert (Erweiterung der Wurzel) oder durch dieselbe Zahl dividiert (Kürzung der Wurzel).

Beispiele:

a) Erweiterung:

$$\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2 \cdot 2]{4^{3 \cdot 2}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m \cdot m}}$$

b) Kürzung:

$$\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[\frac{4}{2}]{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{4^3} \text{ oder}$$

$$\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[\frac{4}{4}]{\frac{6}{4}} = \sqrt[1]{\frac{6}{4}}$$

In dem vorstehenden Beispiel kann bei dem Wurzelexponenten $\frac{4}{4} = 1$ das Wurzelzeichen weggelassen werden. Es bleibt dann eine Potenz, die in ihrem Exponenten im Zähler den Exponenten des Radikanden der ursprünglichen Wurzel und im Nenner den ursprünglichen Wurzelexponenten enthält.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}} \quad \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$$

oder $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Umgekehrt kann jede Potenz mit einem Bruch als Exponenten auch als Wurzel geschrieben werden. Der Nenner des Potenzexponenten erscheint dann als Wurzelexponent.

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5} \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

5. Zusammenfassung der Grundregeln (Abschnitte 1 bis 4)

Damit sich die in den Abschnitten 1 bis 4 behandelten Rechnungsarten besser einprägen und nicht so leicht vergessen werden, sind die wichtigsten Regeln und Formeln in der folgenden Zusammenstellung anhand von Beispielen und Erläuterungen in Kurzform zusammengefasst worden.

Rechnungsart	Regel	Beispiel	Seite
Addition	Bei gleichbenannten allgemeinen Zahlen werden die Beizahlen addiert.	$\begin{array}{r} \text{Summanden} \quad \quad \text{Summe} \\ 2a + a + 3a = 6a \end{array}$	39
	Es dürfen nur gleichbenannte Größen addiert werden.	$\begin{array}{r} 5a + 1a + 6b + 2b = 6a + 8b \end{array}$	40
	Gleichbenannte Summanden in Bruchform müssen vor der Addition gleichnamig gemacht werden.	$\frac{1}{3}a + \frac{2}{5}a = \frac{5}{15}a + \frac{6}{15}a = \frac{11}{15}a$	41
	Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert. Der Nenner bleibt unverändert.	$\frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} = \frac{a+b+c}{e}$	41
Subtraktion	Bei gleichbenannten allgemeinen Zahlen werden die Beizahlen subtrahiert.	$\begin{array}{r} \text{Minuend} \quad \text{Subtrahend} \quad \text{Differenz} \\ 6a - 2a = 4a \end{array}$	40
	Es dürfen nur gleichbenannte Größen subtrahiert werden.	$8a - 2a - 5b = 6a - 5b$	40
	Gleichbenannte Subtrahenden in Bruchform müssen vor der Subtraktion gleichnamig gemacht werden.	$\frac{3}{4}b - \frac{2}{5}b = \frac{15}{20}b - \frac{8}{20}b = \frac{7}{20}b$	41
	Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert. Der Nenner bleibt unverändert.	$\frac{a}{e} - \frac{b}{e} - \frac{c}{e} = \frac{a-b-c}{e}$	41

Rechnungsart	Regel	Beispiel	Seite
Addition und Subtraktion	Aus gleichen Vor- und Rechenzeichen wird +.	$4a + (+2a) = 4a + 2a = 6a$ $4b - (-3b) = 6b + 3b = 9b$	47
	Aus ungleichen Vor- und Rechenzeichen wird —.	$4a + (-2a) = 4a - 2a = 2a$ $6b - (+3b) = 6b - 3b = 3b$	47
Rechnen mit Klammern	Steht vor der Klammer ein + Zeichen, so können beim Auflösen der Klammer die Rechenzeichen beibehalten werden.	$a + b + (c - d) = a + b + c - d$	49
	Steht vor der Klammer ein — Zeichen, so müssen beim Auflösen der Klammer die Rechenzeichen umgekehrt werden.	$a - (b - c + d) = a - b + c - d$	49
	Mehrere Klammern sind von innen nach außen aufzulösen.	$6a + [5b - (2a + 3b)] =$ $6a + [5b - 2a - 3b] =$ $6a + 5b - 2a - 3b =$ $4a + 2b$	49
Multiplizieren	In einem Produkt können die Faktoren miteinander vertauscht werden.	$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$ $a \cdot b = b \cdot a$	57
	Das Malzeichen kann vor allgemeinen Zahlen und vor oder nach einer Klammer fehlen.	$5 \cdot a = 5a$ $3 \cdot (m + n) = 3(m + n)$	57
	Die Beizahlen und Buchstaben werden multipliziert.	$3a \cdot 5b \cdot 2c = 3 \cdot 5 \cdot 2abc = 30abc$	57
	Das Produkt gleicher Vorzeichen ist +.	$(+b) \cdot (+c) = bc$ $(-b) \cdot (-c) = bc$	57
	Das Produkt ungleicher Vorzeichen ist —.	$(+b) \cdot (-c) = -bc$ $(-b) \cdot (+c) = -bc$	57
	Jedes Glied einer Klammer wird mit dem Faktor multipliziert.	$(a + b)n = an + bn$	58
	Jedes Glied der einen Klammer wird mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert.	$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - bd$	60
	Einen gemeinsamen Faktor kann man ausklammern.	$ax + bx + yz + wz = x(a + b) + z(y + w)$	63

Rechnungsart	Regel	Beispiel	Seite
Dividieren	Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Dividend und Divisor darf man nicht vertauschen.	$\frac{a}{b} = c$ $\frac{a}{b}$ ist nicht $\frac{b}{a}$	68
	Die Division gleicher Vorzeichen ergibt +.	$(+a) : (+b) = \frac{a}{b}$ $(-a) : (-b) = \frac{a}{b}$	68
	Die Division ungleicher Vorzeichen ergibt —.	$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$ $(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$	68
	Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert.	$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$	69
	Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit seinem reziproken Wert multipliziert.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$	69
	Eine mehrgliedrige Größe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied durch die Zahl dividiert.	$(a - b + c) : d = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ $= \frac{a - b + c}{d}$	69
Kürzen und Erweitern von Brüchen	Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert werden.	$\frac{abc}{b} = ac$; $\frac{12 \cdot b \cdot c}{3 \cdot a \cdot c} = 4 \cdot \frac{b}{a}$	73
	Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert werden.	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$	73
	Die Erweiterungszahl findet man, indem man den Hauptnenner durch den Nenner des zu erweiternden Bruches teilt.	$\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} =$ $= \frac{d \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} + \frac{e \cdot a \cdot c}{b \cdot a \cdot c} + \frac{f \cdot a \cdot b}{c \cdot a \cdot b}$ $= \frac{dbc + eac + fab}{abc}$	74
	Es dürfen nur Faktoren gekürzt werden (keine Glieder aus Summen).	$\frac{ab(m + a - b)}{abc} = \frac{m + a - b}{c}$	73

Rechnungsart	Regel	Beispiel	Seite
Rangfolge der Punkt- u. Strichrechnung	Produkte und Quotienten müssen stets zuerst ausgerechnet werden. Punktrechnung geht vor Strichrechnung.	$10a^2 - 4a \cdot 2a + 4a : a =$ $10a^2 - \underbrace{8a^2} + \underbrace{4a : a} = 2a^2 + 4$	74
Potenzieren	Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren.	$\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{Faktoren}} = \underbrace{a^3}_{\text{Potenz}} \xrightarrow{\text{Exponent}} \text{Basis}$	78
	Wenn die Potenzen dieselben Basen und Exponenten haben, können ihre Beizahlen addiert oder subtrahiert werden.	$4a^3 + 6a^3 = 10a^3$ $5b^3 - 2b^3 = 3b^3$	80
	Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{4+3+2} = a^9$	81
	Potenzen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.	$\frac{a^{12}}{a^6} = a^{12-6} = a^6$	82
	Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert.	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	83
	Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$	82
	Eine Potenz gelangt vom Zähler in den Nenner bzw. umgekehrt, indem man das Vorzeichen des Exponenten umkehrt.	$\frac{a^2}{1} = \frac{1}{a^{-2}}$ $\frac{1}{a^2} = \frac{a^{-2}}{1}$	82
	Jede Potenz mit dem Exponenten „0“ hat den Wert 1.	$a^0 = 1$	83
	Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(a^2 \cdot b^3)^2 = a^{2 \cdot 2} b^{3 \cdot 2} = a^4 b^6$	84

Rechnungsart	Regel	Beispiel	Seite
Radizieren	Die Basis kann bestimmt werden, wenn Potenzwert und Exponent bekannt ist.	$\sqrt[2]{16} = 4$	94
	Der Wurzelwert ist bei geraden Exponenten und positiven Radikanden positiv oder negativ.	$\sqrt[2]{16} = \pm 4$ $\sqrt[n]{c} = \pm b$	98
	Der Wurzelwert hat bei ungeraden Exponenten das Vorzeichen der Basis.	$\sqrt[n-1]{a} = +c$ $\sqrt[n-1]{-a} = -b$	98
	Der Wurzelwert aus geraden Wurzeln und negativen Zahlen ist imaginär.	$\sqrt[n]{-a} = \pm di$	99
	Wurzeln mit gleichen Exponenten werden unter einem Wurzelzeichen multipliziert.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	99
	Gleichnamige Wurzeln werden unter einem Wurzelzeichen dividiert.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	100
	Potenzen werden radiziert, indem man den Exponenten des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert und das Wurzelzeichen weglässt.	$\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15:3}{1}} = a^5$	100
	Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert und die Wurzel mit dem Exponenten beibehält.	$\left(\sqrt[n]{b}\right)^3 = \sqrt[n]{b^3}$	100
	Eine Wurzel wird radiziert, indem der Radikand mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert wird.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	101
	Jede Wurzel kann als Potenz mit einem Bruch im Exponenten geschrieben werden und umgekehrt.	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	102

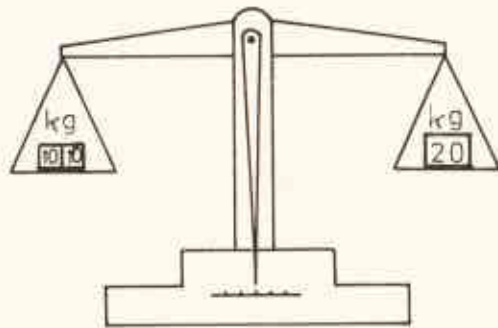
6. Die Lehre von den Gleichungen

6.1. Allgemeines

Eine Gleichung ist die Verbindung zweier gleicher Größen durch das Gleichheitszeichen.

$$10 + 10 = 20$$

Die einfachste Vorstellung von der Gleichung gibt uns eine einfache Hebelwaage. Man ist stets bemüht, sie ins **Gleichgewicht** zu bringen. Die



Waage befindet sich im **Gleichgewicht**, wenn das Gewicht auf der **linken** Seite mit dem Gewicht auf der **rechten** Seite gleich ist.

$$10 + 10 = 20$$

Abb. 6.1

Wenn das Gewicht auf der einen Seite der Waage **verändert** wird, so wird das Gleichgewicht **gestört**. Das Gleichgewicht bleibt jedoch **erhalten**, wenn man auf **beiden** Seiten die **gleiche** Veränderung vornimmt.

Beispiel:

Wenn bei der dargestellten Waage auf beiden Seiten 5 kg zugelegt werden, dann bleibt das **Gleichgewicht** erhalten, weil auf **beiden** Seiten 25 kg vorhanden sind.

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung wie folgt vorgeht:

1. die gleiche Zahl addiert
2. die gleiche Zahl subtrahiert
3. mit der gleichen Zahl multipliziert
4. durch die gleiche Zahl dividiert
5. mit der gleichen Zahl quadriert
6. die gleiche Wurzel zieht

$$\begin{array}{rcl}
 2 \cdot 10 & = & 20 \\
 \hline
 2 \cdot 10 + 5 & = & 20 + 5 \\
 2 \cdot 10 - 5 & = & 20 - 5 \\
 2 \cdot 10 \cdot 5 & = & 20 \cdot 5 \\
 2 \cdot 10 : 5 & = & 20 : 5 \\
 (2 \cdot 10)^2 & = & 20^2 \\
 \sqrt{2 \cdot 10} & = & \sqrt{20}
 \end{array}$$

Wir erkennen, daß **beide** Seiten der Gleichungen im Ergebnis — trotz der vorgenommenen Änderungen — immer **gleich groß** bleiben. **Wichtig ist**, daß die Gleichungen auf **beiden** Seiten in **gleicher** Weise geändert werden.

In den Gleichungen werden nicht nur **bestimmte** Zahlen ($2 \cdot 10 = 20$), sondern mehr noch die **allgemeinen** Zahlen verwendet, z. B.:

$$a + b = c + d$$

Wenn wir in der vorstehenden Gleichung die Werte für die **linke** und **rechte** Seite der Gleichung kennen und einsetzen, so wird sich herausstellen, daß beide Seiten gleich sind, z. B.: $a = 5$; $b = 3$; $c = 2$; $d = 6$

daraus ergibt sich: $a + b = c + d$

$$5 + 3 = 2 + 6$$

$$8 = 8$$

In diesem Beispiel waren alle Werte der Gleichung bekannt oder vorher bestimmt. Uns interessieren aber noch mehr die Gleichungen mit **unbekannten** Werten. Wir sprechen dann von **Gleichungen mit einer oder zwei Unbekannten**. Die Unbekannten werden meistens mit den letzten Buchstaben des Alphabets x , y , z bezeichnet.

Mit einer Gleichung kann man nur eine Unbekannte (x) finden. Soll man zwei Unbekannte (x und y) finden, so braucht man zwei **verschiedene** Gleichungen. Wir wollen uns nur mit einfachen Gleichungen mit **einer Unbekannten** befassen, z. B.

$$12 = 3x$$

Die Unbekannte soll allein auf die **linke** Seite kommen. Man kann auch die rechte Seite nehmen, aber es hat sich eingebürgert, die **linke** zu nehmen, weil wir ja von links nach rechts schreiben; so erhalten wir auf die Frage $x = ?$ die Antwort rechts daneben.

Es ist besonders für den Anfänger ratsam, nur Schritt für Schritt den Wert von x zu ermitteln; die Unbekannte x wird also nur allmählich **allein** auf die linke Seite kommen.

Betrachten wir das Beispiel $12 = 3x$, so vertauschen wir zunächst die beiden Seiten der Gleichung und erhalten $3x = 12$. Wir sehen, daß x noch den Faktor 3 hat; um nun x allein zu bekommen, müssen wir diesen Faktor wegschaffen.

In dem Beispiel $3x + 5 = 17$ müssen wir außerdem noch die Größe 5 auf die rechte Seite bringen. Noch andere Veränderungen der Gleichung können nötig sein, aber in jedem Falle geht die Veränderung einer Gleichung auf die Hauptregel zurück:

Eine Gleichung bleibt gleich, wenn sie auf beiden Seiten in gleicher Weise verändert wird.

Läßt man also **links** eine Größe weg, so muß die gleiche Größe auch **rechts** weggenommen werden. Fügt man links etwas hinzu, so muß das gleiche rechts hinzugefügt werden. Multipliziere ich links, so muß ich rechts ebenfalls multiplizieren, ebenso dividieren, potenzieren und radizieren.

An den folgenden Beispielen wollen wir das Vorstehende erproben:

$$x + 9 = 11$$

Die Unbekannte x soll **allein** stehen. Um die 9 wegzuschaffen, **subtrahiere** ich sie, so daß die linke Seite nun heißt

$$x + 9 - 9 = 11 - 9$$

Wir haben aber gehört, daß man die rechte Seite in gleicher Weise verändern muß. Die Gleichung heißt also:

$$x + 9 - 9 = 11 - 9$$

Die Größen $+ 9$ und $- 9$ heben sich auf der linken Seite auf, es bleibt also

$$\begin{aligned} x &= 11 - 9 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Wir können den Rechengang auch im Kopfe ausführen; d. h., wir **denken** uns links $+ 9$ weg, rechts aber schreiben wir $- 9$ hinzu. Es sieht dann so aus, als sei die 9 von **links** nach **rechts** gekommen, jedoch mit **umgekehrtem** Vorzeichen.

Merke:

Eine Größe mit $+$ kommt auf die andere Seite der Gleichung mit $-$; ebenso kommt natürlich eine Größe mit $-$ auf die andere Seite mit $+$.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } 5x - 7 &= 18 \\ 5x &= 18 + 7 \\ 5x &= 25 \end{aligned}$$

Die Unbekannte „ x “ steht aber noch nicht alleine auf der linken Seite. Deshalb müssen jetzt **beide** Seiten durch die **gleiche** Zahl 5 geteilt werden, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{5x}{5} &= \frac{25}{5} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Wichtig ist, daß bei allen Aufgaben die **Gleichheitszeichen** immer **genau untereinander** geschrieben werden.

Wenn die Unbekannte x in einem **Bruch** (in unserem Beispiel im Zähler) enthalten ist, dann beseitigen wir den Bruch, indem wir **beide** Seiten mit dem Nenner des Bruches multiplizieren.

$$\text{Beispiel: } \frac{x}{4} = 3$$

In diesem Beispiel multiplizieren wir beide Seiten mit $\cdot 4$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} \cdot 4 &= 3 \cdot 4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Beim Multiplizieren und Dividieren können wir uns folgendes vorstellen: Steht links ein Faktor bei einer Unbekannten in der Multiplikation, so bringen wir ihn auf die rechte Seite in den Nenner als Divisor.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } 5x &= 25 \\ x &= \frac{25}{5} \end{aligned}$$

Umgekehrt geht der Divisor von der linken auf die rechte Seite in die Multiplikation als Faktor.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } \frac{x}{4} &= 3 \\ x &= 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

Merke:

Aus der Multiplikation ($\cdot$) wird auf der anderen Seite der Gleichung eine Division ($:$) und umgekehrt.

Beim Potenzieren und Radizieren können wir wie folgt vorgehen:

Ist die Unbekannte x auf der einen Seite der Gleichung in einer Potenz enthalten (x^2), so müssen beide Seiten radiziert werden.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } x^2 &= 36 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{36} \\ x &= \sqrt{36} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Ist die Unbekannte auf der einen Seite der Gleichung in einer Wurzel enthalten, so potenzieren wir beide Seiten der Gleichung.

Beispiel: $\sqrt{x} = 7$
 $(\sqrt{x})^2 = 7^2$
 $x = 7^2$
 $x = 49$

Aus dem Bisherigen erkennen wir, daß beide Seiten der Gleichung in gleicher Weise verändert werden, wenn auf der anderen Seite der entgegengesetzte Rechengang durchgeführt wird.

Merke:

aus	+	wird	—	auf der anderen Seite
aus	—	wird	+	auf der anderen Seite
aus	·	wird	:	auf der anderen Seite
aus	:	wird	·	auf der anderen Seite
aus	$\sqrt{a}$	wird	a^2	auf der anderen Seite
aus	a^2	wird	$\sqrt{a}$	auf der anderen Seite

Gleichungen bleiben erhalten, wenn man beide Seiten umkehrt.

Beispiel: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Umkehrung: $\frac{x}{1} = \frac{2}{1}$

Ergebnis: $x = 2$

Die Richtigkeit dieser Rechnung ist wie folgt zu beweisen: Um den Bruch $\frac{1}{x}$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit x multipliziert, also

$$\frac{1}{x} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot x$$

Um jetzt den Bruch $\frac{1}{2}$ zu beseitigen, multipliziere ich beide Seiten mit 2, also

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x$$

$$2 = x$$

$$\text{oder } x = 2$$

Damit ist die Richtigkeit der Rechnung bei der Umkehrung von Gleichungen bewiesen, weil x in beiden Fällen 2 ergibt.

Nach dieser kurzen Einleitung noch einen kleinen Überblick:

Es gibt Gleichungen ersten Grades, zweiten Grades, dritten Grades usw. Bei den Gleichungen ersten Grades kommen nur Größen vor, die in der ersten Potenz stehen (x, y, a, b stehen in der ersten Potenz); diese Gleichungen sind für uns die weitaus wichtigsten. Bei den Gleichungen zweiten Grades kommen die Unbekannten in der zweiten Potenz, also im Quadrat vor (x^2, y^2, a^2 usw.). Bei den Gleichungen dritten Grades kommen die Unbekannten in der dritten Potenz, also im Kubus vor (x^3, y^3, a^3 usw.). Die Gleichungen zweiten Grades kommen für uns weniger, die dritten Grades überhaupt nicht in Betracht. Wir wollen uns deshalb auf die Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten beschränken.

6.2. Das Umstellen und Lösen von Gleichungen

Die Unbekannte wird in der Regel kurz mit dem kleinen lateinischen Buchstaben x bezeichnet. Die zur Lösung bekannten Größen können entweder bestimmte Zahlen oder Buchstaben (allgemeine Zahlen) sein. Als Buchstaben nimmt man die des kleinen lateinischen Alphabets, und zwar beginnt man mit a, b, c usw.

Beispiele:

Bestimmte Zahlen:

$$\begin{aligned} 1. \quad x + 9 &= 11 \\ x &= 11 - 9 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x - 9 &= 11 \\ x &= 11 + 9 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x \cdot 9 &= 11 \\ x &= \frac{11}{9} \\ x &= 1\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Allgemeine Zahlen:

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ x &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - a &= b \\ x &= b + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot a &= b \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{x}{9} = 11$$

$$x = 11 \cdot 9$$

$$x = 99$$

$$5. \quad x^2 = 11$$

$$x = \sqrt{11}$$

$$x = 3, \dots$$

$$6. \quad \sqrt{x} = 11$$

$$x = 11^2$$

$$x = 121$$

$$7. \quad 5x + 11x = 48$$

$$16x = 48$$

$$x = \frac{48}{16}$$

$$x = 3$$

$$8. \quad 12y - 7y = 95$$

$$5y = 95$$

$$y = 19$$

$$9. \quad 5,75x - 124 + 2x = 5,125x - 61$$

$$5,75x - 5,125x + 2x = -61 + 124$$

$$2,625x = 63$$

$$x = \frac{63}{2,625}$$

$$x = 24$$

Wir sehen an dem 9. Beispiel, daß man alle Unbekannten auf die linke Seite zieht. Bei Seitenwechsel **Vorzeichen** umkehren!

$$10. \quad 8x + 4 + 3x - 2 = 8x + 8$$

Stehen auf **beiden** Seiten der Gleichung die **gleichen** Größen mit den gleichen Vorzeichen, so können sie weggelassen werden.

Man stelle sich vor: Auf einer Waage stehen beiderseits gleichviel Gewichte; die Waage ist im Gleichgewicht. Man kann nun von jeder Waagschale ein gleich großes Gewicht wegnehmen, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird. Die vorstehende Gleichung ist mit einer Waage zu vergleichen. Lassen wir $8x$ auf **beiden** Seiten weg, so heißt die Gleichung:

$$4 + 3x - 2 = 8$$

$$3x = 8 - 4 + 2$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$\frac{x}{a} = b$$

$$x = b \cdot a$$

$$x = a \cdot b$$

$$x^2 = b$$

$$x = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{x} = b$$

$$x = b^2$$

$$ax + bx = c$$

$$x(a + b) = c$$

$$x = \frac{c}{a + b}$$

$$ay - by = c$$

$$y(a - b) = c$$

$$y = \frac{c}{a - b}$$

Jetzt folgen Beispiele mit Klammern:

Als Anfänger sollte man immer Schritt für Schritt vorgehen. Wichtig ist, daß die Gleichheitszeichen **untereinander** stehen.

$$11. \quad \begin{aligned} 4x - (5 - 2x) &= 5x - 3 \\ 4x - 5 + 2x &= 5x - 3 \\ 4x + 2x - 5x &= 5 - 3 \\ 6x - 5x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$12. \quad \begin{aligned} 8x - [5 - 4x + (8 - 2x) + 11 - x] &= 10x + 26 \\ 8x - [5 - 4x + 8 - 2x + 11 - x] &= 10x + 26 \\ 8x - 5 + 4x - 8 + 2x - 11 + x &= 10x + 26 \\ 8x + 4x + 2x + x - 10x &= 26 + 5 + 8 + 11 \\ 15x - 10x &= 26 + 24 \\ 5x &= 50 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$$13. \quad \begin{aligned} 20 - (x - 2) &= (2x + 1) \cdot 2 \\ 20 - x + 2 &= 4x + 2 \\ -x - 4x &= 2 - 20 - 2 \\ -5x &= -20 \\ -x &= -4 \end{aligned}$$

Beachten Sie: Im Ergebnis der vorstehenden Gleichung stören die negativen Werte. Wenn **beide** Seiten der Gleichung mit -1 multipliziert werden, dann wird die Unbekannte „ x “ positiv.

$$\begin{aligned} (-1) \cdot -x &= -4 \cdot (-1) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$14. \quad \begin{aligned} (11 - 3x)(11 - 3x) + (15 - 4x)^2 &= (20 - 5x)^2 - 12 \\ 121 - 33x - 33x + 9x^2 + 225 - 60x - 60x + 16x^2 &= 400 - 100x - 100x + 25x^2 - 12 \end{aligned}$$

Alle Unbekannten nach links! Die Bekannten nach rechts! Vorzeichen umkehren!

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16x^2 - 25x^2 - 66x - 120x + 200x &= 400 - 12 - 121 - 225 \\ 14x &= 42 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Da sich hier die Größen x^2 **gegenseitig** aufheben, ist dies nur scheinbar eine quadratische Gleichung.

$$15. \quad \begin{aligned} \frac{x}{9} &= 7 \\ x &= 7 \cdot 9 \\ x &= 63 \end{aligned}$$

Aus der Division auf der linken Seite ($:9$) wird eine Multiplikation auf der rechten Seite ($\cdot 9$).

$$16. \quad \frac{18}{x} = 3$$

$$18 = 3x$$

$$3x = 18$$

$$x = \frac{18}{3}$$

$$x = 6$$

$$17. \quad \frac{72}{x} + 18 = 48$$

$$\frac{72}{x} = 48 - 18$$

$$72 = 30 \cdot x$$

$$30x = 72$$

$$x = \frac{72}{30}$$

$$x = 2,4$$

$$18. \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 95$$

$$\frac{10x + 5x + 4x}{20} = 95$$

$$\frac{19x}{20} = 95$$

$$19x = 95 \cdot 20$$

$$x = \frac{95 \cdot 20}{19}$$

$$x = 100$$

$$19. \quad \frac{4}{x} + 2 = \frac{6}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{x} = -2$$

$$\frac{-4}{x} = -2 \text{ (beide Seiten mit } -1 \text{ multiplizieren)}$$

$$-4 = -2 \cdot x$$

$$4 = 2x$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

$$20. \quad \frac{x-5}{2x-9} = \frac{x-4}{2x-6}$$

Um den Nenner $2x-9$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit $2x-9$ multipliziert:

$$\frac{(x-5)(2x-9)}{2x-9} = \frac{(x-4)(2x-9)}{2x-6}$$

$$x-5 = \frac{(x-4)(2x-9)}{2x-6}$$

Um nun auch den Nenner $2x-6$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit $2x-6$ multipliziert:

$$(x-5)(2x-6) = \frac{(x-4)(2x-9)(2x-6)}{2x-6}$$

$$(x-5)(2x-6) = (x-4)(2x-9)$$

$$2x^2 - 10x - 6x + 30 = 2x^2 - 8x - 9x + 36$$

$$2x^2 - 2x^2 - 10x - 6x + 8x + 9x = 36 - 30$$

$$-16x + 17x = 6$$

$$x = 6$$

Wir wollen in dieser Aufgabe zur Probe den Wert $x = 6$ einsetzen. Also:

$$\frac{x-5}{2x-9} = \frac{x-4}{2x-6}$$

$$\frac{6-5}{2 \cdot 6 - 9} = \frac{6-4}{2 \cdot 6 - 6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Bevor wir zu den reinen Buchstabengleichungen übergehen, wollen wir uns noch die Fragen stellen: Zu welchem Zweck verändern wir die Gleichungen? Warum setzt man nicht gleich die Zahlen ein?

Antwort:

Es gibt Formeln, in denen eine andere Größe ausgerechnet werden muß, als diejenige, für die eine Formel gerade aufgestellt ist.

Beispiel: $U = d \cdot \pi$

(Umfang ist Durchmesser mal 3,14)

Angenommen, der Umfang ist bekannt; wir wollen aber den Durchmesser wissen. Es muß deshalb die Unbekannte „d“ auf die linke Seite gebracht werden.

$$d \cdot \pi = U$$

$$d = \frac{U}{\pi}$$

Wenn wir jetzt die Zahlen für U und π (3,14) einsetzen, dann können wir den Durchmesser des Kreises ausrechnen.

Nun eine Reihe von Beispielen mit Buchstaben:

$$\begin{array}{ll} 21. x + a = b & 22. a + x - b = c \\ x = b - a & x = c - a + b \\ 23. a - x = b & 24. a - x - b = c \\ -x = b - a & -x = c - a + b \\ x = a - b & x = a - b - c \end{array}$$

In den vorstehenden Beispielen sind beide Seiten mit -1 multipliziert worden, dadurch wird die Unbekannte x positiv.

$$\begin{array}{ll} 25. ax = b & 26. ax - b = c \\ x = \frac{b}{a} & ax = c + b \\ & x = \frac{b + c}{a} \\ 27. a - bx = c & 28. ax + b = c \\ -bx = c - a & ax = c - b \\ (\text{beide Seiten} \cdot -1) & x = \frac{c - b}{a} \\ bx = a - c & \\ x = \frac{a - c}{b} & \end{array}$$

In dem folgenden Beispiel wollen wir zunächst einmal den Wert für x ermitteln, indem wir für $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$ einsetzen:

$$\begin{array}{l} 29. x = \frac{c - b}{a} \\ x = \frac{7 - 6}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{array}$$

Stellen wir nun obige Gleichung nach a , b und c um, so müssen sich die vorgesehenen Werte wieder einstellen.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a = \frac{c - b}{x} & \text{b)} \quad ax = c - b \\ & a = \frac{7 - 6}{\frac{1}{5}} & c = ax + b \\ & a = \frac{1}{\frac{1}{5}} & b = c - ax \\ & a = \frac{1 \cdot 5}{1} & b = 7 - 5 \cdot \frac{1}{5} \\ & a = 5 & b = 7 - 1 \\ & & b = 6 \\ & & c = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 30. \quad ax + b = x + d & 31. \quad ax - b = a - bx \\ ax - x = d - b & ax + bx = a + b \\ x(a - 1) = d - b & x(a + b) = a + b \\ x = \frac{d - b}{a - 1} & x = \frac{a + b}{a + b} \\ & x = 1 \end{array}$$

Der Wert x kann in den vorstehenden Beispielen ausgeklammert werden. (Würde man x wieder in die Klammer hineinmultiplizieren, so wäre der alte Zustand wieder hergestellt.)

$$\begin{array}{l} 32. \quad 3x - 7a + 8b = 5a - x \\ 3x + x = 5a + 7a - 8b \\ 4x = 12a - 8b \\ x = \frac{12a - 8b}{4} \\ x = \frac{4(3a - 2b)}{4} \\ x = 3a - 2b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 33. \quad 5ab - 3ax + c = -4ax + 8ab - 2c \\ -3ax + 4ax = 8ab - 5ab - 2c - c \\ ax = 3ab - 3c \\ x = \frac{3ab - 3c}{a} \\ x = \frac{3(ab - c)}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 34. \quad -a + bx - (x - c)b = c(b - x) \\ bx - a - bx + bc = bc - cx \\ -a = -cx \\ cx = a \\ x = \frac{a}{c} \end{array}$$

Probe: Für x setzen wir $\frac{a}{c}$ ein:

$$\begin{array}{l} -a + \frac{b \cdot a}{c} - \left(\frac{a}{c} - c\right)b = c\left(b - \frac{a}{c}\right) \\ -a + \frac{ab}{c} - \frac{ab}{c} + bc = bc - \frac{ac}{c} \\ -a = -a \\ 0 = 0 \end{array}$$

Auf der linken Seite der Gleichung heben sich $\frac{ab}{c}$ gegen $-\frac{ab}{c}$ auf. Außerdem heben sich auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Größen mit gleichen Vorzeichen (bc) auf; ebenso $-a$ gegen $-a$.

$$\begin{array}{ll} 35. \quad \frac{x}{a} = b & 36. \quad \frac{ax}{b} = c \\ x = ab & ax = bc \\ & x = \frac{bc}{a} \end{array}$$

$$37. \quad \frac{ax}{b} + c = d$$

$$\frac{ax}{b} = d - c$$

$$ax = (d - c) b$$

$$x = \frac{(d - c) b}{a}$$

$$39. \quad \frac{a}{x} - b = \frac{c}{x} + d$$

$$\frac{a}{x} - \frac{c}{x} = b + d$$

$$\frac{a - c}{x} = b + d$$

$$a - c = (b + d) x$$

$$x = \frac{a - c}{b + d}$$

$$40. \quad x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Wir müssen in dem vorstehenden Beispiel zunächst die drei Brüche auf einen gemeinsamen Bruchstrich bringen. Der Hauptnenner heißt dann $a b c$.

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

vergleichsweise:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{bc + ac + ab}{abc}$$

vergleichsweise:

$$x = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$x = \frac{12 + 8 + 6}{24}$$

Durch den vorstehenden Vergleich mit bestimmten Zahlen läßt sich die Rechenoperation besser verstehen. Aus dem Produkt der einzelnen Nenner ($2 \cdot 3 \cdot 4$) erhalten wir den Hauptnenner. Über dem gemeinsamen Bruchstrich erscheinen im Zähler anstelle der bisherigen Einzelbrüche die einzelnen Faktoren des Hauptnenners, jedoch mit einer Ausnahme (z. B. 2). Die Ausnahme ergibt sich durch die Erweiterung der einzelnen Brüche mit dem Hauptnenner.

Hierzu folgende Beispiele:

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} = \frac{b c}{a b c}$$

$$\text{Ebenso ist: } \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{b} = \frac{a c}{a b c}$$

41.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) x = 1$$

$$\left(\frac{bc + ac + ab}{abc} \right) x = 1$$

$$(bc + ac + ab) x = abc$$

$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

$$38. \quad a - \frac{bc}{x} = d$$

$$-\frac{bc}{x} = d - a$$

(beide Seiten $\cdot -1$)

$$\frac{bc}{x} = a - d$$

$$bc = (a - d) x$$

$$\frac{bc}{a - d} = x$$

$$x = \frac{bc}{a - d}$$

42.

$$\frac{x}{a + x} = \frac{b}{c}$$

$$xc = b(a + x)$$

$$xc = ba + bx$$

$$xc - bx = ab$$

$$x(c - b) = ab$$

$$x = \frac{ab}{c - b}$$

Wir sehen, $a + x$ rückt von links unten auf die rechte Seite nach oben in den Zähler. Aus der Division wird auf der anderen Seite eine Multiplikation. Es wird sozusagen kreuzweise ($\times$) multipliziert.

Wichtig ist hierbei, daß $a + x$ als ein gemeinsamer Ausdruck behandelt wird. ($a + x$) muß als Klammerausdruck von unten links nach oben rechts rücken und mit b multipliziert werden.

Wir dürfen niemals einen Ausdruck unter einem Bruchstrich auftrennen und a oder x einzeln multiplizieren.

43.

$$\frac{x}{a - x} = \frac{b}{c}$$

$$xc = b(a - x)$$

$$xc = ab - bx$$

$$bx + cx = ab$$

$$x(b + c) = ab$$

$$x = \frac{ab}{b + c}$$

44.

$$\frac{b}{c} = \frac{a + x}{b + x}$$

$$(b + x) b = (a + x) c$$

$$b^2 + bx = ac + cx$$

$$bx - cx = ac - b^2$$

$$x(b - c) = ac - b^2$$

$$x = \frac{ac - b^2}{b - c}$$

45.

$$\frac{4x}{2a + 3b} - 5 = \frac{7b}{5a}$$

Wenn wir bei der vorstehenden Aufgabe die linke Seite gleichnamig machen, dann haben wir wieder auf beiden Seiten einen Bruch, somit kann kreuzweise multipliziert werden.

$$\frac{4x}{2a + 3b} - \frac{5(2a + 3b)}{(2a + 3b)} = \frac{7b}{5a}$$

$$\frac{4x - 5(2a + 3b)}{2a + 3b} = \frac{7b}{5a}$$

$$5a [4x - 5(2a + 3b)] = 7b (2a + 3b)$$

$$5a [4x - 10a - 15b] = 14ab + 21b^2$$

$$20ax - 50a^2 - 75ab = 14ab + 21b^2$$

$$20ax = 14ab + 75ab + 21b^2 + 50a^2$$

$$x = \frac{89ab + 21b^2 + 50a^2}{20a}$$

46.

$$\frac{5ax}{a - b} - 3a = 10x$$

Bei der vorstehenden Aufgabe können wir nicht kreuzweise multiplizieren; das geht nur bei zwei Brüchen.

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichungen mit $(a - b)$, damit der Ausdruck im Nenner verschwindet.

$$\begin{aligned}\frac{5ax(a-b)}{a-b} - 3a(a-b) &= 10x(a-b) \\ 5ax - 3a^2 + 3ab &= 10ax - 10bx \\ 5ax - 10ax + 10bx &= 3a^2 - 3ab \\ x(5a - 10a + 10b) &= 3a(a-b) \\ x &= \frac{3a(a-b)}{5(2b-a)}\end{aligned}$$

6.3. Kurze Zusammenfassung der wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Gleichungen

- Beachten Sie, daß jede Rechenoperation mit beiden gesamten Seiten der Gleichung durchzuführen ist!
- Prüfen Sie, ob die Gleichung durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors vereinfacht werden kann. Ist die Unbekannte z. B. in mehreren Gliedern enthalten, wird die Gleichung durch Ausklammern der Unbekannten leicht zu lösen sein.
- Kommt die Unbekannte in Klammern vor, so sind die Klammern aufzulösen.
- Steht die Unbekannte im Zähler oder Nenner eines Bruches, so empfiehlt es sich, die Brüche zu beseitigen.
- Vorsicht beim Rechnen mit gemischten Zahlen! Gemischte Zahlen möglichst in unechte Brüche umwandeln.
- Von der Summe oder Differenz von Brüchen kann man erst den Kehrwert bilden, nachdem man die Brüche gleichnamig gemacht und zu einem Bruch zusammengefaßt hat.

Beispiel: $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{b+a}{ab}$

$$x = \frac{ab}{b+a}$$

- Niemals aus einer Summe oder Differenz kürzen! Hier darf nur gekürzt werden, wenn ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden kann.

Beispiel:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2a + 6b - 4c}{2} \\ x &= \frac{\cancel{2}(a + 3b - 2c)}{\cancel{2}} \quad (\text{jetzt darf gekürzt werden, da „2“ im Zähler als Faktor steht}) \\ x &= a + 3b - 2c\end{aligned}$$

- Steht die Unbekannte im Nenner eines Doppelbruchs, so sind die Regeln für das Bruchrechnen zu beachten:

1. Beispiel: $2 = \frac{4}{\frac{1}{x}}$ (Zahl durch Bruch)

$$2 = 4 \cdot \frac{x}{1}$$

$$2 = 4x$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Beispiel: $6 = \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}}$ (Zahl durch Summe oder Differenz von Brüchen)

$$6 = \frac{2}{\frac{x}{2x} - \frac{2}{2x}}$$

$$6 = \frac{2}{\frac{x-2}{2x}}$$

(Brüche gleichnamig machen und zusammenfassen)

$$6 = 2 \cdot \frac{2x}{x-2}$$

(mit dem Kehrwert malnehmen)

$$6(x-2) = 2 \cdot 2x$$

(Bruch beseitigen)

$$6x - 12 = 4x$$

(Klammer auflösen)

$$6x - 4x = 12$$

(Unbekannte freistellen)

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

- Nach Auflösung der Klammern und Beseitigung der Brüche:

- beide Seiten der Gleichung ordnen,
- auf beiden Seiten Gleiches zusammenfassen,
- Gleichung so umstellen, daß alle Glieder mit der Unbekannten auf der linken Seite, alle anderen Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen,
- Unbekannte freistellen,
- falls vor der Unbekannten ein Minuszeichen steht, die gesamte Gleichung mit (-1) malnehmen.

- Die Probe ist grundsätzlich mit der Ausgangsgleichung durchzuführen, da schon in der ersten Umformung der Gleichung Fehler enthalten sein könnten.

Übungsaufgaben:

395. a) $x + 7 = 15$ b) $x + 16 = 30$ c) $1 + x = 6$
 396. a) $64 + x = 100$ b) $x - 18 = 12$ c) $x - 72 = 28$
 397. a) $36 - x = 12$ b) $17 - x = 10$ c) $100 - x = 96$
 398. a) $x + n = n$ b) $b + x = a$ c) $x - a = b$
 399. a) $x - 10 = 0$ b) $a - x = 0$ c) $x - a = 0$
 400. a) $3x = 15$ b) $1,7x = 3,4$ c) $ax = b$
 401. a) $55 = -11x$ b) $28 = 7x$ c) $91 = x \cdot 13$
 402. a) $\frac{x}{21} = 18$ b) $\frac{x}{m} = n$ c) $(-x) = (-6)$
 403. a) $42 + x = 50$ b) $b = x - d$ c) $mnx = ma$
 404. a) $x - 1 = 9$ b) $x + m = 0$ c) $\frac{a}{x} = (-b)$
 405. a) $27 = x + 5$ b) $9x = (-27)$
 406. a) $3x + 7 = 22$ b) $7x - 3 = 18$ c) $5x - 30 = 0$
 407. a) $4x - 17 = 31$ b) $80 - 13x = 28$ c) $100 - 13x = 9$
 408. a) $ax + 3m = 10m$ b) $ax - 3b = 5b$ c) $7x + 5 = 3x + 17$
 409. a) $5x - 17 = 11 - 2x$ b) $21x = 55 + 10x$ c) $19 - 12x = 71 - 25x$
 410. a) $\frac{x}{6} + 7 = 10$ b) $27 - \frac{27}{x} = 19$ c) $\frac{x}{n} - 4a = 6a$
 411. a) $8a - \frac{n}{x} = 7a$ b) $\frac{ax}{b} = m$ c) $\frac{5ax}{7b} = 8b$
 412. a) $\frac{12a}{x} = 3b$ b) $\frac{24}{5x} = 8ab$ c) $\frac{3x}{8} = 9$
 413. a) $\frac{15x}{19} = 15$ b) $\frac{ax}{c} = m$ c) $\frac{24}{x} = 8$

Übungsaufgaben:

414. a) $\frac{65}{x} = 13$ b) $(-7) = \frac{84}{x}$ c) $\frac{5}{3x} = 2$
 415. a) $\frac{b}{ax} = m$ b) $cx + 3n = 12n$ c) $-7k + \frac{25}{x} = 18k$
 416. a) $4x - 7x - 3 = 8x + 6$ b) $\frac{x}{9} + 6 = 10$

6.3.1. Übungsgleichungen mit Klammerausdrücken

Beispiel:

$$24x - (14 + 15x) + (28 - 6x) = 20$$

- Schritt: **Klammer auflösen** $24x - 14 - 15x + 28 - 6x = 20$
- Schritt: **Ordnen** $24x - 15x - 6x = 20 + 14 - 28$
- Schritt: **Zusammenfassen** $3x = 6$
- Schritt: **Unbekannte freistellen** $x = \frac{6}{3}$
- Schritt: **Ausrechnen** $x = 2$

Probe:

$$24 \cdot 2 - (14 + 15 \cdot 2) + (28 - 6 \cdot 2) = 20$$

$$48 - 14 - 30 + 28 - 12 = 20$$

$$20 = 20$$

Übungsaufgaben:

417. $35 - (2x - 5) = 18 - (3x - 11)$
 418. $6x - (24 - 3x) = x - (2x - 6)$
 419. $10 - (5x - 7) = 15 - 8x - (2x - 9)$
 420. $(3x - 8a) + 5b - (3c - 6x) = 3a - (7b + 11a) - (3x - 12b - 9c)$
 421. $7m - (8x - 6n + p) - (3m - 4n) = (10n + x) - (11x - 4m - p)$
 422. $5 - [(9 + 7x) + (3x - 1)] = 4 + (2x - 7)$

Übungsaufgaben:

423. $3x - [(3 - 10x) - (6x - 15) + (x + 9)] = 0$
424. $2x - [(8x + 9) + 7] = 5 - (7 - 8x)$
425. a) $7(x - 2) = 49$ b) $7(5x - 3) + 9 = 58$
426. $3(2x + 9) - 9(4 + x) = 3(5 + x) - 2(x + 6)$
427. $5(3x - 7) - 7(2a - 3x + 7) - 2(5x - 7a + 36) = 0$
428. $15(3 - 2x) - 40(2 - x) = 24(12 - x)$
429. $2(3x + 5) - (37 - 45x) + 13(9 - 2x) = 15(6 - x)$
430. a) $12 = 0,3(24 + x)$ b) $7 = (14 - x) \cdot 0,4$
431. a) $2,5x + 7(x + 1,5) = 29\frac{1}{2}$ b) $2,75(17 - 3x) = 0,5(2x + 1)$
432. $2,6(4x + 3) = 3,8(5x - 7)$
433. $2(3 - 1,4x) - 4(5 - 1,6x) + 6(7 - 1,8x) + 8 = 0$
434. $4,3x - 12(0,3x + 1,2) = 0,3(20x - 9) - 2(4,6x - 2) - 0,1$
435. $2(x - 0,1) + 3(2x - 0,01) + 4(3x - 0,001) = 24,446$
436. $7(3x + \frac{1}{2}) - 6(4x - \frac{1}{3}) - 5(5x + \frac{1}{4}) + 2\frac{3}{4} = 0$
437. $5(x - 7) - 15 = 36 - 7\frac{1}{2}x - 4(3\frac{1}{2}x - 5)$
438. a) $p(a + b) = q \cdot a$, gesucht a b) $x^3 = (x - a)^3 + c^3$
439. a) $\alpha(x + \beta) = 2\alpha\beta$ b) $3\alpha\beta = (6\alpha - x)\beta$
440. $2[2(x - 2) - 2] - 2 = -(x - 6)$
441. $5[3 - (7 - 2x)] - 7(x + 5) + 3 = 3[4(3 - x) - x] - 70$
442. $4[8x - 5(7 - 4x) + 9(6 - 3x) + 12x] = 7[16x - 2(7x - 10) + 2(2x - 1)]$

Übungsaufgaben:

443. $7[4 - 2(3x - 5) \cdot 2 - x] - 9(3x - 15) = 4[2(4x - 11) - 3(3x - 7)] - 35$
444. $4[2x - (2x - 3)] = 46 - [3(7 - 2x) - 5(7x + 22)]$
445. $(20 + x)(20 - x) = (x + 2)(46 - x)$
446. $(x + 1)(4x - 3) = 2(x + 1)(2x + 3)$
447. $(x + 2)(3 - x) = (5 + x)(7 - x) + 2(x + 29)$
448. $(5x + 1)(2x - 1) - (2x + 1)(3x - 5) = 4(x + 3)(x - 1) - 4$
449. $(x + 3,5)(x + 4,5) = (x + 5,5)(x + 6,5) - 28$
450. $(2,4x - 1)(2x - 4,5) = (2,5x + 3)(1,2x + 1) + 1,8x^2 - 55,2$
451. $(3 + x)(2a + 5) - 30 = 2a(x + 3)$
452. $(2x - a)(2x - 1) = 2[x(2x + a) - a^2]$
453. $(x + b)(x + 2) - b = (x + a)(x + 1) - 2a$
454. $(a + x)(b - x) = (a + x)(a - x) - b(c - a)$
455. $28 - [13x - (8 - 5x)] = 31 - [7x - (49 - 10x)]$
456. $a - [2b - (3a + 2x)] = 4b - [15a + (8b - 3x)]$
457. a) $x - (m - n) = (m + n) - 2x$ b) $a - (x - 2b) = 3a + 2b$
458. $a - (6b - x) = b - (2x - a + 5b)$
459. $17m + [3n - (p - 7x)] = 15p - [(4m - 11n) - 8x]$
460. $7(7x - 6) + 13(3x - 5) = 4(7x - 8)$
461. $4(4 - 9x) - 17(3 - 4x) = 11(4 - 11x) - 7(2 - 7x)$
462. $7[x - 11(x - 2)] - (x + 12) = 0$
463. $25 - 3[x - 5 \cdot (2x - 3)] = 23x$

6.3.2. Übungsgleichungen mit Brüchen und Klammerausdrücken

6.3.2.1. Gleichnamige Brüche

Merke:

In einer Gleichung mit gleichnamigen Brüchen auf beiden Seiten der Gleichung kann der Nenner einfach fortgelassen werden.

Beispiel:
$$\frac{6(x+2)}{5} = \frac{3(2x+4)}{5}$$
$$6(x+2) = 3(2x+4)$$

6.3.2.2. Ungleichnamige Brüche

Merke:

In einer Gleichung mit ungleichnamigen Brüchen auf beiden Seiten der Gleichung ist die Lösung folgendermaßen durchzuführen:

Beispiel:

	$\frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{2}$
1. Schritt: Beide Brüche gleichnamig machen (Hauptnenner = 6)	$\frac{2(x-2)}{6} = \frac{3(x-3)}{6}$
2. Schritt: Der Nenner kann nunmehr, wie unter 6.3.2.1. gesagt, fortgelassen werden.	$2(x-2) = 3(x-3)$
3. Schritt: Klammern ausmultiplizieren	$2x - 4 = 3x - 9$
4. Schritt: Ordnen	$9 - 4 = 3x - 2x$
5. Schritt: Zusammenfassen	$5 = 1x$
6. Schritt: Unbekannte freistellen	$\frac{5}{1} = x$
7. Schritt: Ausrechnen	$5 = x$
8. Schritt: Unbekannte auf die linke Seite schreiben	$x = 5$

Übungsaufgaben:

464. a) $\frac{6}{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{x} = 22$ b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = m$ c) $\frac{5}{x} - \frac{2}{3} = \frac{8}{x} - \frac{7}{6}$

465. a) $\frac{x}{u} - 4a = 6a$ b) $a - \frac{b}{x} = c$ c) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$

Übungsaufgaben:

466. a) $\frac{y}{8} + \frac{y}{5} = 26$ b) $\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} = 10$ c) $\frac{3x}{4} - \frac{5x}{8} = 4$

467. a) $\frac{4x}{5} - 22 = \frac{x}{4}$ b) $\frac{x}{6} + \frac{x}{8} = 7$

468. a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 2$ b) $x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32}$

469. a) $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$ b) $\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$ c) $\frac{3x}{8} - 2 = 32 - \frac{7x}{4}$

470. a) $\frac{x-2}{2} = \frac{x+17}{5}$ b) $5x+1 = \frac{2x-0,25}{2}$

471. $\frac{5x-2}{4} - \frac{6x-5}{8} = \frac{5}{16}$

472. a) $1 - \frac{4}{x-3} = 0,6$ b) $\frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{2}$

473. a) $\frac{x-1}{4} = \frac{x+2}{2}$ b) $\frac{x+5}{3} = \frac{x+1}{2}$ c) $\frac{2x+4}{6} = \frac{3x+2}{8}$

474. a) $\frac{x+4}{14} + \frac{x-4}{6} = 2$ b) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x-2$

475. a) $\frac{3x}{4} + \frac{100-5x}{6} = 29$ b) $\frac{x+20}{9} + \frac{3x}{7} = 6$

476. a) $\frac{x-8}{7} + \frac{x-3}{3} + \frac{5}{21} = 0$ b) $\frac{x+1}{3} - \frac{3x-1}{5} = x-2$

477. a) $\frac{5(x+5)}{8} - \frac{2(x-3)}{7} = \frac{19}{28}$ b) $2x - \frac{19-2x}{9} = \frac{11x-19}{4}$

478. a) $\frac{10x+3}{3} - \frac{6x-7}{2} = 10x-10$ b) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

479. a) $\frac{1}{x+2} = \frac{4}{6x-4}$ b) $\frac{4}{2x-1} = \frac{8}{7x+1}$ c) $\frac{16}{3x-4} = \frac{5}{2x-5}$

Übungsaufgaben:

$$480. \text{ a) } \frac{2}{x+a} = \frac{1}{x-2b} \quad \text{b) } \frac{2x-3}{5} : \frac{12+x}{9} = \frac{9}{16} \quad \text{c) } \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x}} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$481. \text{ a) } 5x + \frac{5x+3}{7} = 34 - \frac{10-2x}{3} - x \quad \text{b) } (12-x) : \frac{x}{6} = \frac{36}{3}$$

6.3.3. Angewandte oder eingekleidete Aufgaben

1. Beispiel:

Einem Wasserbehälter kann durch 3 Röhren Wasser zugeführt werden. Die eine Röhre füllt ihn in 5, die andere in 6 und die dritte Röhre allein in $7\frac{1}{2}$ Stunden.

In welcher Zeit ist der Behälter voll, wenn alle drei Röhren zugleich geöffnet werden?

Lösung: Man überlegt sich, wonach gefragt ist. Hier ist nach der Zeit gefragt, wie viele Stunden dauert es usw. Wir nehmen daher an, es dauert x Stunden, bis der Behälter voll ist. Wenn in x Stunden der Behälter voll ist, dann ist in einer Stunde nur $\frac{1}{x}$ des Behälters voll.

Wir wissen also jetzt, daß alle 3 Röhren zusammen in einer Stunde $\frac{1}{x}$ des Behälters füllen. Da die erste Röhre 5 Stunden braucht, füllt sie in einer Stunde $\frac{1}{5}$, die zweite $\frac{1}{6}$, die dritte $\frac{1}{7,5}$ ($\frac{2}{15}$).

Alle drei Röhren liefern also in einer Stunde $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$

Wir haben vorher festgestellt, in einer Stunde ist $\frac{1}{x}$ voll. Beide Werte müssen daher gleich groß sein. Folglich ist:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{6+5+4}{30}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

Alle drei Röhren brauchen also 2 Stunden, bis der Behälter voll ist.

2. Beispiel:

Die Abgangsorte zweier einander entgegenfahrender Lokomotiven sind 22,5 km entfernt. Die erste Lokomotive legt 308 m in der Minute zurück. Die zweite legt 288 m in der Minute zurück. Wenn nun die erste Lokomotive 15 Minuten vor der zweiten abgefahren ist, wieviel Zeit nach Abfahrt der zweiten fahren sie aneinander vorbei?

Lösung: Die erste Lokomotive fährt 15 Minuten früher ab, hat also bis zur Abfahrt der zweiten Lokomotive $15 \cdot 308 \text{ m} = 4620 \text{ m}$ zurückgelegt.

Die ganze Strecke ist 22,500 km, davon ist die erste Lokomotive bereits 4,620 km gefahren. Also sind beide Lokomotiven bei Abfahrt der zweiten nur noch $22,5 - 4,62 = 17,88 \text{ km}$ auseinander. Sie kreuzen sich nicht in der Mitte; aber die Zeit, die beide bis dahin fahren, ist gleich groß.

Diese unbekannte Größe nehmen wir als x an. Die erste Lokomotive wird dann in x Minuten $x \cdot 308 \text{ m}$ zurücklegen. Die zweite wird in x Minuten $x \cdot 288 \text{ m}$ zurücklegen. Die in dieser Zeit von beiden Lokomotiven zurückgelegten Wege ergeben zusammen die obengenannte Strecke von 17,88 km oder 17880 m.

Damit haben wir die Gleichung gefunden: $x \cdot 308 + x \cdot 288 = 17880$

$$596x = 17880$$

$$x = \frac{17880}{596}$$

$$x = 30$$

Also 30 Minuten nach Abfahrt der zweiten Lokomotive fahren sie aneinander vorbei.

6.4. Das Umstellen von technischen Formeln

Das bisher Gelernte wollen wir nunmehr beim Umstellen von technischen Formeln anwenden. Wenn unsere Unbekannte bisher mit x bezeichnet wurde, ist künftig immer das Formelzeichen als Unbekannte zu betrachten, dessen Zahlenwert in einer Aufgabe unbekannt ist und gesucht wird. Es gibt also bei einer Aufgabe immer bekannte Größen und unbekannte Größen. Die bekannten Größen sind in der Aufgabe „gegeben“. Die unbekannten Größen werden „gesucht“, z. B.:

$$\text{Formel: } v = \frac{s}{t}$$

Gegeben: v und t

Gesucht: s

Unsere Unbekannte, die bisher mit x bezeichnet wurde, heißt hier s . Die Formel ist also so umzustellen, daß s auf der linken Seite der Gleichung allein steht.

Lösung:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t \cdot v = s$$

$$s = v \cdot t$$

Eine andere bekannte Formel lautet: $A = \frac{d^3 \cdot \pi}{4}$

Gegeben: A ; π ; 4

Gesucht: d

Lösung:

$$\frac{d^3 \cdot \pi}{4} = A$$

$$\frac{A \cdot 4}{\pi} = d^3$$

$$d^3 = \frac{A \cdot 4}{\pi}$$

Wir suchen aber nicht d^3 , sondern den Durchmesser d . Ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel, so sieht unsere Gleichung so aus:

$$\sqrt{d^3} = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\pi}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{A \cdot 4}{\pi}}$$

6.4.1. Anwendungen von Gleichungen in der Elektrotechnik

Beispiele: a) $U = I \cdot R$

In der vorstehenden Formel sind z. B. U und I bekannt; gesucht wird der Wert für R .

$$R = \frac{U}{I}$$

b)

$$R = \frac{q \cdot l}{A}$$

l wird gesucht

$$A \cdot R = q \cdot l$$

$$l = \frac{A \cdot R}{q}$$

c)

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

$$R_1 = R - R_2 - R_3 - R_4$$

R_1 wird gesucht

d)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$$

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}}$$

R_1 wird gesucht

e)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

$$\frac{R}{1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}$$

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

R wird gesucht

f)

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R (R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2$$

$$R \cdot R_1 + R \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2$$

$$R \cdot R_1 = R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2$$

$$R \cdot R_1 = (R_1 - R) R_2$$

$$\frac{R \cdot R_1}{R_1 - R} = R_2$$

R_2 wird gesucht

g)

$$U_0 = I (R_i + R_a)$$

$$U_0 = I \cdot R_i + I \cdot R_a$$

$$I \cdot R_a = U_0 - I \cdot R_i$$

$$R_a = \frac{U_0 - I \cdot R_i}{I}$$

$$R_a = \frac{U_0}{I} - \frac{I \cdot R_i}{I}$$

$$R_a = \frac{U_0}{I} - R_i$$

R_a wird gesucht

h) $\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}$ i_1 wird gesucht
 $i_1 \cdot R_1 = i_2 \cdot R_2$
 $i_1 = \frac{i_2 \cdot R_2}{R_1}$

i) $P = U \cdot I$ I wird gesucht
 $I = \frac{P}{U}$

j) $P = I^2 \cdot R$ I wird gesucht
 $I^2 = \frac{P}{R}$
 $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$

k) $R = R_{20} (1 + \alpha \cdot \Delta t)$ R_{20} wird gesucht
 $R_{20} = \frac{R}{1 + \alpha \cdot \Delta t}$
 $R = R_{20} + R_{20} \cdot \alpha \cdot \Delta t$ α wird gesucht
 $R_{20} \cdot \alpha \cdot \Delta t = R - R_{20}$
 $\alpha = \frac{R - R_{20}}{R_{20} \cdot \Delta t}$
 $\Delta t = \frac{R - R_{20}}{R_{20} \cdot \alpha}$ Δt wird gesucht

l) $\frac{W_1}{W_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ R_2 wird gesucht
 $\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2 = \frac{R_1}{R_2}$
 $\frac{W_1^2}{W_2^2} = \frac{R_1}{R_2}$
 $W_1^2 \cdot R_2 = W_2^2 \cdot R_1$
 $R_2 = \frac{W_2^2 \cdot R_1}{W_1^2}$

Übungsaufgaben:

482. $I = \frac{U}{R}$ $U = ?$

483. $\frac{U}{I} = \frac{l \cdot \rho}{A}$ $U = ?$
 $I = ?$
 $A = ?$
 $l = ?$

484. $R = R_1 + R_2 + R_3$ $R_3 = ?$
 $R_2 = ?$

485. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ $R_2 = ?$

486. $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ $R_1 = ?$

487. $I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$ $U_0 = ?$
 $R_2 = ?$

488. $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$ $I_2 = ?$

489. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ $R_3 = ?$

490. $P = U \cdot I$ $U = ?$

491. $P = I^2 \cdot R$ $R = ?$

492. $B = 1,257 \cdot H$ $H = ?$

493. $R = R_{20} (1 + \alpha \cdot \Delta t)$ $R_{20} = ?$
 $\alpha = ?$
 $\Delta t = ?$

494. $H = \frac{I \cdot N}{l}$ $l = ?$

495. $U = U_0 - I \cdot R_1$ $R_1 = ?$
 $U_0 = ?$
 $I = ?$

Übungsaufgaben:

$$496. I = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_3 = ?$$

$$497. f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}}$$

$$L = ?$$

$$498. Z = \frac{R \cdot X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$R = ?$$

$$499. \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$C = ?$$

$$500. R_1 = \frac{n}{p} \cdot R_1$$

$$n = ?$$

$$p = ?$$

$$501. P = \frac{U^2}{R}$$

$$U = ?$$

$$502. \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega = ?$$

$$503. I = \frac{n \cdot U_0}{\frac{n}{p} \cdot R_1 + R_2}$$

$$n = ?$$

$$p = ?$$

$$R_1 = ?$$

$$R_2 = ?$$

$$504. R = \frac{U_{01} - U_{02}}{I_1 - I_2}$$

$$U_{01} = ?$$

$$I_1 = ?$$

$$505. U_0 - I \cdot R_1 = I \cdot R_2 + I \cdot R_3$$

$$I = ?$$

$$R_1 = ?$$

$$506. \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = I_1 + I_2$$

$$R_1 = ?$$

$$U_2 = ?$$

$$507. R_1 = \frac{U_0 - I \cdot R_2}{I}$$

$$I = ?$$

$$R_2 = ?$$

$$508. C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_r^2 L}$$

$$f_r = ?$$

Übungsaufgaben:

$$509. U_0 = \frac{I (n \cdot R_1 + R_2)}{n}$$

$$n = ?$$

$$R_2 = ?$$

$$R_1 = ?$$

$$510. A = \frac{(D^2 - d^2) \cdot \pi}{4}$$

$$D = ?$$

$$d = ?$$

$$511. U = \frac{q \cdot l \cdot I}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$$

$$d = ?$$

$$512. U - I \cdot R_1 = I \cdot R_2$$

$$R_1 = ?$$

$$I = ?$$

$$513. R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_2 = ?$$

$$514. \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$C_3 = ?$$

$$515. R_2 = R_1 \cdot [1 + \alpha (t_2 - t_1)]$$

$$t_2 = ?$$

$$t_1 = ?$$

$$516. U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 + U_V \cdot I_V$$

$$U_V = ?$$

$$I_2 = ?$$

$$517. Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$R = ?$$

$$518. Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$R = ?$$

$$X_L = ?$$

$$X_C = ?$$

$$519. X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega L = ?$$

$$L = ?$$

$$C = ?$$

$$520. Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$R = ?$$

$$\omega L = ?$$

$$\omega C = ?$$

$$L = ?$$

$$C = ?$$

$$521. U^2 = U_W^2 + (U_L - U_C)^2$$

$$U_W^2 = ?$$

$$U_L = ?$$

$$U_C = ?$$

Übungsaufgaben:

$$522. \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}$$

$$\begin{aligned} Z &= ? \\ R &= ? \\ X &= ? \end{aligned}$$

$$523. \frac{1}{X} = \frac{X_C - X_L}{X_C \cdot X_L}$$

$$\begin{aligned} X &= ? \\ X_C &= ? \\ X_L &= ? \end{aligned}$$

$$524. \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\begin{aligned} R &= ? \\ L &= ? \\ C &= ? \end{aligned}$$

525. Welche Zahl muß man von 847 subtrahieren, um 748 zu erhalten?

526. Welche Zahl muß man mit $\frac{4}{9}$ multiplizieren um $\frac{2}{3}$ zu erhalten?

527. Wie groß ist der Bestand der Kasse, wenn nach Auszahlung des dritten und siebenten Teils des vorhandenen Geldes noch 40 DM mehr als die Hälfte übrigbleibt?

528. Eine Leiter hat 30 Sprossen. Hätte man den Abstand der einzelnen Sprossen 6 cm größer gemacht, so wäre man mit 5 Sprossen weniger ausgekommen. Wie weit sind die Sprossen voneinander entfernt?

529. Es sollen 1000 DM unter 3 Personen A, B und C so verteilt werden, daß A 50 DM mehr als B und C 40 DM weniger als B erhält.

530. Durch Preisrückgang einer Ware um 50 DM für 100 kg verliert ein Geschäftsmann beim Verkauf 200 DM. Um wieviel kg Ware handelt es sich demnach?

531. Ein Arbeiter erhielt 100 DM Wochenlohn. Nachdem er 10 DM seines Barbestandes ausgegeben hatte, besaß er noch um $\frac{1}{10}$ mehr als vor der Lohnzahlung. Wie hoch war sein anfänglicher Barbestand?

532. Zwei Unternehmer haben für 7560 DM eine Wegstrecke auszubessern; sie beginnen gleichzeitig, und zwar an den entgegengesetzten Enden. Weil sie 22 m von der Mitte zusammentreffen, erhält der eine 560 DM mehr als der andere. Wie lang ist die Strecke?

6.5. Die allgemeine Bedeutung der Größen, Formelzeichen, Werte, Einheiten und der verschiedenartigen Gleichungen

6.5.1. Größen

Die Symbole in einer technischen oder physikalischen Formel repräsentieren **Größen**, die durch **Einheiten** und **Zahlenwerte** bestimmt sind.

Beispiel: $F = l \cdot b$
 $= 10 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}$

Die **Größenarten** wie z. B. **Länge**, **Masse** und **Zeit** werden durch die entsprechenden Formelzeichen l , m und t dargestellt.

Beispiele:

Größenart	Formelzeichen	Zahlenwert	Einheit
Länge	l	100	m
Masse	m	50	kg
Zeit	t	10	s
Wirkungsgrad	η	90	—

6.5.2. Vorsätze für Vielfache und Teile von Einheiten

Die technischen Größen lassen sich häufig durch Vorsätze für Vielfache und Teile von Einheiten wesentlich vereinfachen und leichter verständlich machen.

$$\begin{aligned} P &= 5000 \text{ W} = 5 \cdot 10^3 \text{ W} = 5 \text{ kW} \\ l &= 0,02 \text{ m} = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Bei Rechengvorgängen sollen möglichst Zahlenwerte zwischen 1 und 1000 verwendet werden. Hierdurch wird nicht nur die Rechnung vereinfacht, sondern es werden auch Rechenfehler vermieden.

6.5.3. Strich- und Punktrechnung mit gleich- und ungleichartigen Größen

Gleichartige Größen haben gleiche Einheiten, während das bei ungleichartigen Größen nicht der Fall ist.

Beispiele: $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 0,82 \text{ m}$ (gleichartige Größen)
 $G = 200 \text{ N}$, $m = 100 \text{ g}$ (ungleichartige Größen)

Gleichartige Größen kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Beispiele: $m = 1,2 \text{ kg} + 350 \text{ g} = 1,2 \text{ kg} + 0,35 \text{ kg} = 1,55 \text{ kg}$
 $m = 1,2 \text{ kg} - 200 \text{ g} = 1,2 \text{ kg} - 0,2 \text{ kg} = 1,0 \text{ kg}$
 $A = 2 \text{ m} \cdot 50 \text{ cm} = 2 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m} = 1 \text{ m}^2$
 $a = 1,6 \text{ m} : 80 \text{ cm} = 1,6 \text{ m} : 0,8 \text{ m} = 2$

Bei der Multiplikation werden auch die einzelnen gleichartigen Einheiten multipliziert ($\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$).

Bei der Division wird die Einheit des Quotienten gleich Eins ($\frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$).

Ungleichartige Größen können nicht addiert oder subtrahiert werden.

Beispiele: $100 \text{ kg} + 20 \text{ N} = (\text{nicht ausrechenbar})$
 $20 \text{ m}^2 - 10 \text{ cm} = (\text{nicht ausrechenbar})$

Die Strichrechnung kann mit ungleichartigen Größen also nicht ausgeführt werden. Dagegen ist die Punktrechnung mit ungleichartigen Größen möglich.

Bei der Multiplikation oder Division von ungleichartigen Größen ergeben sich zusammengesetzte Einheiten.

Beispiele: $20 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = 80 \text{ Nm}$
 $4 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 8 \text{ N}$
 $50 \text{ m} : 5 \text{ s} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zusammengesetzte Einheiten werden häufig nach Personen benannt; man nennt sie dann auch **benannte Einheiten**.

Beispiele: $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{Newton}$
 $\frac{\text{V}}{\text{A}} = \text{Ohm}$
 $\frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \text{Henry}$
 $\frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{Farad}$
 $\frac{\text{Vs}}{\text{V}} = \text{Weber}$
 $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{Tesla}$

6.5.4. Größengleichung

In einer Größengleichung lassen sich mit Hilfe von Formelzeichen gesetzmäßige Zusammenhänge in Kurzform niederschreiben. Außerdem dient die Größengleichung zur Ausrechnung einer abgeleiteten oder unbekannten Größe, wenn die anderen Größen bekannt sind.

Beispiel: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ (Hebelgesetz)

$$l_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{F_1}$$

6.5.5. Zahlenwertgleichung

Eine Zahlenwertgleichung ist eine Gleichung, in der nicht die Formelzeichen, sondern nur die Zahlenwerte mit den dazugehörigen Einheiten einzusetzen sind. Bei umfangreicheren Zahlenwertgleichungen empfiehlt es sich, die einzelnen Einheiten innerhalb der Gleichung wegzulassen und hierfür eine besondere Einheitengleichung aufzustellen (vgl. hierzu Abschn. 6.5.6).

Größengleichung

$$s = v \cdot t \text{ (m)}$$

Zahlenwertgleichung

$$s = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12 \text{ s} = 60 \text{ m}$$

$$s = 5 \cdot 12 = 60 \text{ m}$$

6.5.6. Einheitengleichung

Eine Einheitengleichung ist eine Gleichung, in der nicht die Formelzeichen und auch nicht die Zahlenwerte, sondern nur die Einheiten einzusetzen sind.

Größengleichung

$$s = v \cdot t \text{ (m)}$$

Einheitengleichung

$$s = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}$$

In der vorstehenden Einheitengleichung tritt „s“ einmal als Formelzeichen für den Weg (s) und zum anderen als Kurzzeichen für die Einheit „Sekunde“ (s) auf. Die Einheit für die Zeit (s) kann über und unter dem Bruchstrich gekürzt werden, so daß im Ergebnis die Einheit (m) für den Weg (s) übrigbleibt.

Wir sehen, daß ein Buchstabe (hier; s) u.U. in einer Gleichung eine unterschiedliche Bedeutung haben kann. Zur Unterscheidung gleicher Buchstaben für Formelzeichen und Einheiten werden die Formelzeichen stets schräg (kursiv), die Einheiten dagegen gerade abgedruckt.

6.5.7. Faktorengleichung

Faktorengleichungen sind Gleichungen, durch die feststehende Eigenschaften bestimmter Werkstoffe angegeben werden. Sie bestehen aus Formelzeichen, Zahlenwert und Einheit.

Beispiele: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$\rho = 8,91 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

6.5.8. Umrechnungsfaktorengleichung

Bei der Umrechnungsfaktorengleichung stehen auf beiden Seiten Zahlenwerte mit gleichen Einheiten, jedoch mit unterschiedlicher Größenordnung.

Beispiele: $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100\,000 \text{ cm}$

bei $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ beträgt der Umrechnungsfaktor:

$$l = 1 \text{ km} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$$

$$L = 0,008 \text{ H} = 0,008 \text{ H} \cdot \frac{1000 \text{ mH}}{\text{H}} = 8 \text{ mH}$$

$$f = 10000 \text{ Hz} = 10000 \text{ Hz} \cdot \frac{1 \text{ kHz}}{1000 \text{ Hz}} = 10 \text{ kHz}$$

7. Die grafische Darstellung von Funktionen

Wir haben im Abschn. 2 gesehen, daß die Veränderung einer Zahl bildlich an der Zahlengeraden gezeigt werden kann. Wenn aber zwei voneinander abhängige Größen vorhanden sind, dann kann das nicht mehr an einer Zahlengeraden dargestellt werden. Hierfür dienen zur besseren Übersicht die **grafischen Darstellungen**.

Eine Größe, die in ihrem Wert von einer anderen abhängt, ist eine Funktion der anderen Größe.

Wollen wir z. B. einen Überblick über den Verlauf der Temperatur eines bestimmten Zeitabschnitts (z. B. eines Tages) bekommen, so lesen wir von 0 bis 24 Uhr alle 2 Stunden (u. U. auch stündlich) am Thermometer die Temperatur ab und tragen sie in eine Tabelle ein.

Zeit h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temp. °C	12	10	10	9	11	13	20	22	22,5	21	20	18	15

Nach der vorstehenden Tabelle kann man sich nur mühsam einen Überblick über die Temperaturverhältnisse während eines Zeitabschnitts verschaffen. Dagegen ist die folgende grafische Darstellung (Abb. 7.1) von weit größerer Anschaulichkeit.

Das Bild zeigt deutlich die Vorteile der grafischen Darstellung. Man erkennt sofort, wann die höchste und tiefste Temperatur herrscht, in welchem Zeitraum die Temperatur am stärksten stieg, in welchem Zeitraum sie gleichblieb usw. Auch ist es möglich, Zwischenwerte abzulesen (zu interpolieren). Welche Temperatur herrschte um 11.00 Uhr oder um 19.30 Uhr? Doch ist hierbei Vorsicht geboten. Wollen wir die Änderung der Temperatur genauer wissen, so müssen mehr Temperaturmessungen durchgeführt werden (etwa alle 30 Minuten).

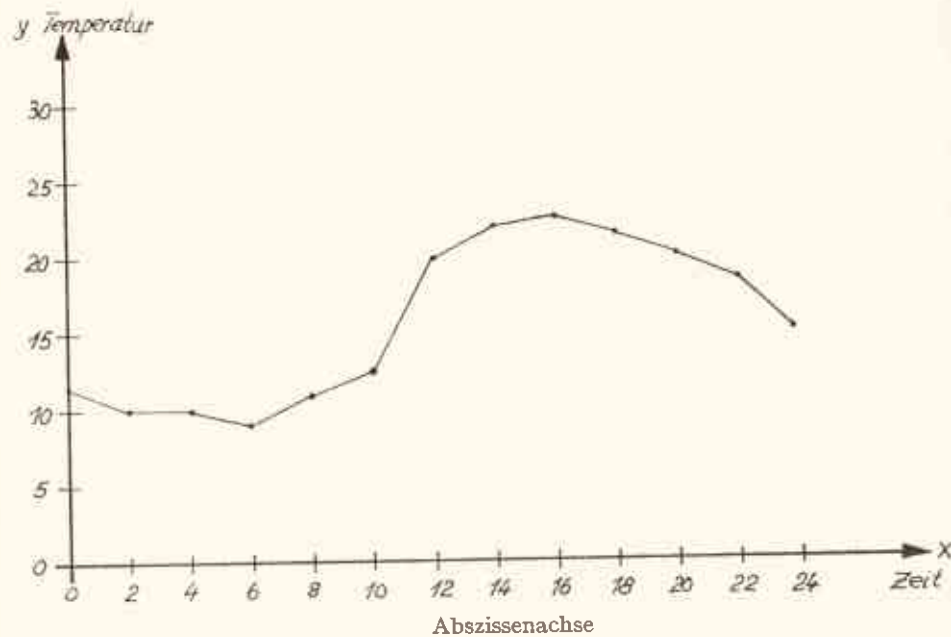


Abb. 7.1

Auf Millimeterpapier oder anderem Papier tragen wir auf einem waagerechten Strahl, der Abszissenachse, gleiche Teilstrecken ab, die dem aufeinanderfolgenden Zeitraum von 2 Stunden entsprechen. Beim Nullpunkt errichten wir die Senkrechte (Ordinate), die für die Temperatur gleichmäßig unterteilt ist. Die gemessenen Temperaturwerte werden als Punkte bei der dazugehörigen Uhrzeit eingetragen. Verbinden wir jetzt die einzelnen Meßpunkte durch gerade Verbindungsstrecken, so erhalten wir den Temperaturverlauf **grafisch** dargestellt. Man spricht von der **Temperaturkurve**.

In der Mathematik und in der Technik handelt es sich weniger um derartige Beobachtungen, sondern um Gleichungen, die man auch **Funktionsgleichungen** nennt. Zu diesem Zweck zeichnet man ein **Koordinatenkreuz** (vgl. hierzu Abb. 7.2).

Die waagerechte Achse heißt **Abszissen- oder x-Achse**, die senkrechte Achse heißt **Ordinaten- oder y-Achse**. Vom Schnittpunkt der Koordinatenachsen trägt man auf beiden Achsen (x und y) nach beiden Richtungen Maßeinheiten ab. Die Richtung der **Abszissenachse** nach rechts ist **positiv**, nach links **negativ**. Die Richtung der **Ordinatenachse** nach oben ist **positiv**, nach unten **negativ**. Dementsprechend haben Abszissen und Ordinaten positive und negative Werte.

Jeder Punkt (P_1 usw.) im Kreuz hat immer zwei Werte, einen x - und einen y -Wert.

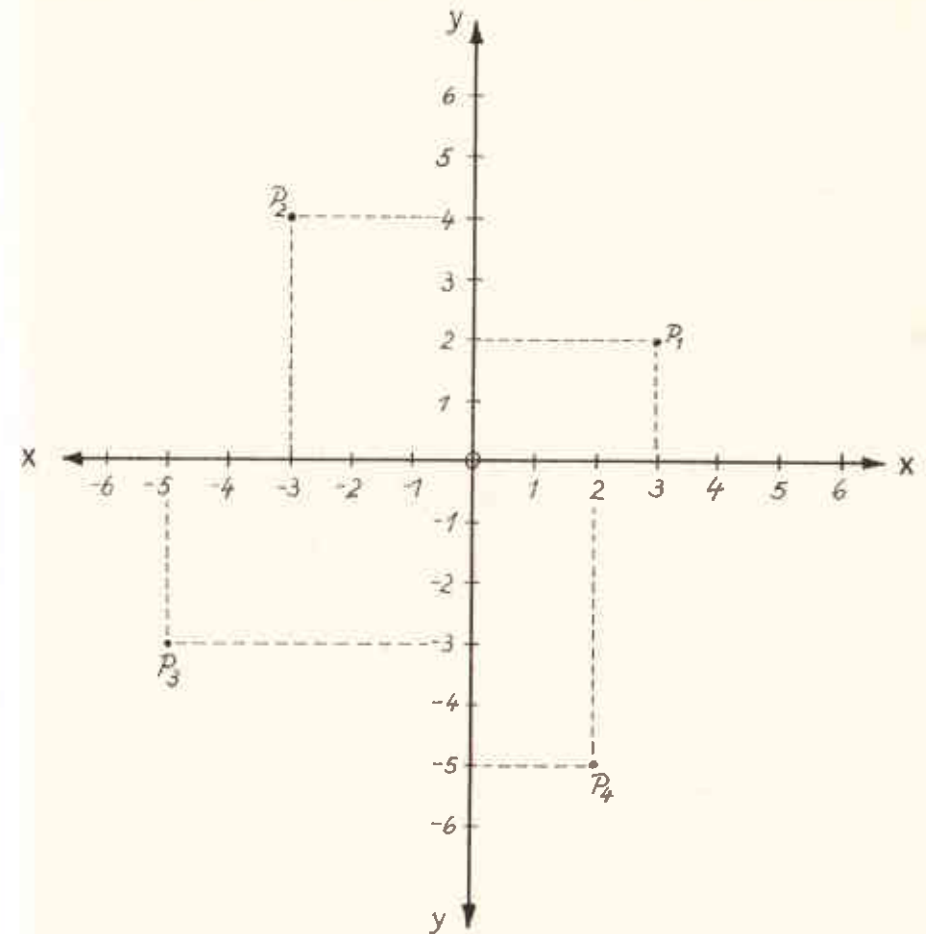


Abb. 7.2

Die mathematische Abhängigkeit zweier Größen voneinander bezeichnet man als **Funktion**.

Im folgenden Beispiel ist y eine Funktion von x . Das bedeutet, daß y von x abhängig ist. Eine solche Funktionsgleichung kann z. B. heißen:

$$y = 2x$$

Wir stellen zunächst wieder eine Tabelle auf.

x	1	2	3	-1	-2
y	2	4	6	-2	-4

Der Wert y kann für die eingetragenen x -Werte aus der vorstehenden Gleichung ermittelt werden.

Für $x = 1$ ist $y = 2$ usw.

Jetzt zeichnen wir das Koordinatenkreuz.

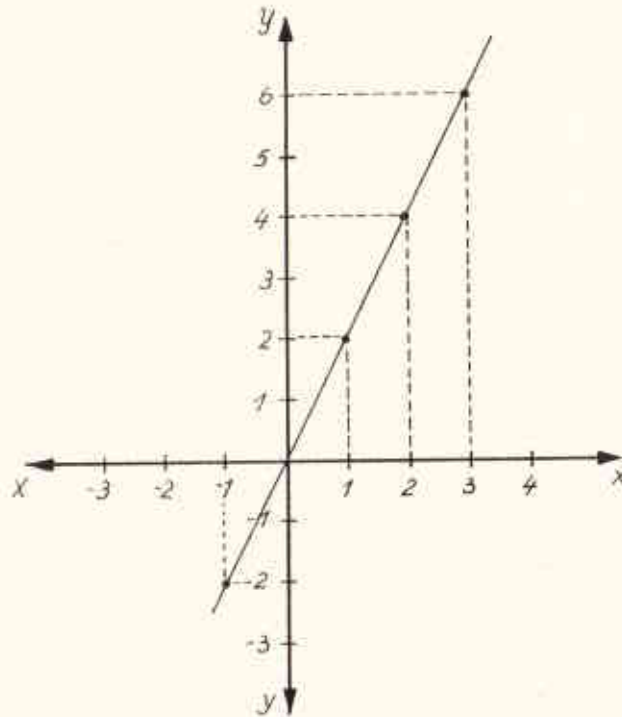


Abb. 7.3

In dieses Achsenkreuz werden die einzelnen Werte aus der Tabelle als Punkte eingetragen. So wird z. B. für $x = 1$ und $y = 2$ der Schnittpunkt ermittelt usw. Wenn man die einzelnen Punkte miteinander verbindet, so erhält man die **Kurve** der Funktion. In diesem Beispiel hat die Kurve einen **geradlinigen Verlauf**; diese Funktion bezeichnet man daher als **lineare Funktion**. Das braucht nicht immer der Fall zu sein, so zeigt z. B. die Funktion $y = x^2$ einen **nichtlinearen** Verlauf. Besondere Bedeutung kommt im Abschnitt 10.1.4 den Winkel- oder Kreisfunktionen zu, die keinen geradlinigen Verlauf haben und von einem Kreis abgeleitet werden.

Ebenso kann man Funktionsgleichungen aus der Elektrotechnik grafisch darstellen.

Beispiel:

Der Spannungsabfall an einem Widerstand ist grafisch darzustellen:

$$U = I \cdot R$$

Da der Widerstand R im Stromkreis mit $1 \text{ k}\Omega$ konstant bleibt, ist der Spannungsabfall U eine Funktion von der Stromstärke I .

I in mA	10	20	30	40
$U = I \cdot R$ (V)	10	20	30	40

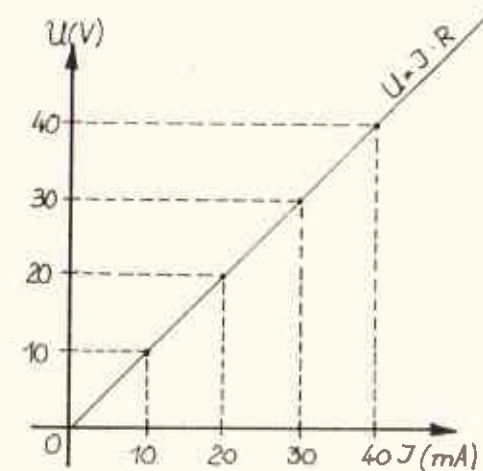


Abb. 7.4

In das Achsenkreuz werden die einzelnen Werte wieder eingetragen. Die Verbindung der eingezeichneten Punkte ergibt die Strom-Spannungskurve bei gleichbleibendem Widerstand. Es handelt sich auch hier wieder um eine Gerade.

8. Proportion

Haben 2 Verhältnisse denselben Wert (z. B. $18 : 12 = \frac{3}{2}$ und $9 : 6 = \frac{3}{2}$), so sind sie gleich. Werden sie durch das Gleichheitszeichen zu einer Gleichung verbunden, so erhält man eine **Proportion**.

$$18 : 12 = 9 : 6$$

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{äußere Glieder}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{innere Glieder}} \end{array}$$

Gelesen: a verhält sich zu b wie c zu d .

Man nennt die 4 Glieder der Reihe nach das 1., 2., 3. und 4. Glied der Proportion. a und c heißen die **vorderen**, b und d die **hinteren** Glieder, ferner a und d die **äußeren**, b und c die **inneren** Glieder der Proportion.

Die Proportion kann auch als Bruchgleichung geschrieben werden:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Beispiel: Bei der Karte 1 : 100 000 verhält sich:

$$\frac{\text{Kartenstrecke}}{\text{wirkliche Strecke}} = \frac{1}{100\,000}$$

Hat man eine Proportion, so ergibt sich durch das **kreuzweise** Multiplizieren die Produktengleichung:

$$a : b = c : d$$

$$\text{oder } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{Produktengleichung: } ad = bc$$

In einer Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren Glieder. Im praktischen Rechnen hat die Proportion eine große Bedeutung. Ist in einer Proportion ein Glied unbekannt, so kann man dieses aus den drei anderen berechnen.

Beispiel: $5 : x = 10 : 3$

$$\frac{5}{x} = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{5 \cdot 3}{10}$$

Praktische Anwendung findet die Proportion beim Lösen von Dreisatzaufgaben:

1. Beispiel:

Ein Schlossermeister zahlt für 4 Gesellen 96 DM Tagelohn. Wieviel hat er täglich zu zahlen, wenn er noch 2 Gesellen dazunimmt?

Die Aufgabe enthält 2 Verhältnisse: Ein Verhältnis zwischen der Zahl der Gesellen und ein Verhältnis zwischen den Tagelöhnen.

$$\begin{array}{l} \frac{4 \text{ Gesellen}}{4 + 2 \text{ Gesellen}} = \frac{96 \text{ DM}}{x \text{ DM}} \\ \frac{4}{6} = \frac{96}{x} \\ x = \frac{96 \cdot 6}{4} \\ x = 144 \text{ DM} \end{array}$$

2. Beispiel:

Drei Arbeiter graben einen Garten in 8 Tagen um. Wie lange brauchen 4 Arbeiter hierzu?

Auch diese Aufgabe enthält 2 Verhältnisse: Ein Verhältnis zwischen der Zahl der Arbeiter und ein Verhältnis zwischen der Zahl der Arbeitstage.

Die Vermehrung der Arbeiter hat jedoch keine Vermehrung, sondern eine Verminderung der Arbeitstage zur Folge, also ist das **umgekehrte** Verhältnis der Arbeitstage dem der Arbeiter gleichzusetzen:

$$\begin{array}{l} \frac{3 \text{ Arbeiter}}{4 \text{ Arbeiter}} = \frac{x \text{ Tage}}{8 \text{ Tage}} \quad \left. \vphantom{\frac{3 \text{ Arbeiter}}{4 \text{ Arbeiter}}} \right\} \text{umgekehrtes Verhältnis} \\ \frac{3}{4} = \frac{x}{8} \\ x = \frac{3 \cdot 8}{4} \\ x = 6 \text{ Tage} \end{array}$$

Merke:

Wenn beide Größen in demselben Verhältnis wachsen oder abnehmen, dann stehen sie in einem geraden Verhältnis zueinander, sie sind **direkt proportional**.

Stehen dagegen die Größen im **umgekehrten** Verhältnis zueinander, d. h. wird die eine größer, dann wird die andere kleiner, so sind sie **umgekehrt proportional**.

3. Beispiel:

Der Sockel eines Gebrauchsgegenstandes vom Ausmaß 5 : 8 soll auf eine im genau gleichen Verhältnis stehende Unterlage gesetzt werden, die eine Breite von 11,2 mm haben soll. Wie groß ist die Länge?

$$\frac{5}{8} = \frac{11,2}{x}$$

$$x = \frac{11,2 \cdot 8}{5}$$

$$x = 17,92 \text{ mm}$$

Übungsaufgaben:

533. a) $3 : 4 = 9 : x$

534. a) $42 : 15 = 28 : x$

535. a) $52 : x = 68 : 51$

536. a) $14 : 5 = 28 : x$

537. a) $48 : 73 = x : 50$

538. a) $5,25 : x = 9,8 : 0,28$

539. a) $96 : 4x = 72 : 21$

540. a) $0,4x : 0,35 = 7,2 : 0,021$

541. a) $1\frac{3}{7} : x = 8 : 1\frac{3}{4}$

542. a) $(27 + x) : x = 8 : 5$

543. a) $38 : x = 16 : (44 + x)$

544. a) $7x : (51 - 2x) = 49 : 37$

545. a) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{d} : x$

546. $\frac{a}{b} : \frac{5c}{2d} = \frac{4a}{15c} : x$

b) $14 : x = 91 : 65$

b) $6 : 4 = x : 4$

b) $x : 76 = 45 : 57$

b) $0,28 : x = 9,8 : 10,5$

b) $x : 0,84 = 3,5 : 1,2$

b) $x : 0,248 = 25 : 1,55$

b) $135 : 72 = 5x : 64$

b) $3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = \frac{8}{9} : x$

b) $4\frac{3}{8} : x = 6\frac{3}{4} : 14\frac{2}{5}$

b) $x : (63 - x) = 3 : 4$

b) $(56 - 3x) : x = 25 : 15$

b) $4x : 29 = (157 - 5x) : 9$

b) $\frac{2a}{3b} : \frac{3a}{4c} = \frac{8c}{45b} : x$

Übungsaufgaben:

547. $\frac{3}{4}a^2b : \frac{1}{2}ac = 1\frac{1}{2}b^2 : x$

548. $x : \frac{2}{3}ac = 7\frac{1}{2}ab : 3\frac{1}{8}b^2c$

549. Teilen Sie die Zahl 200 in drei Teile x, y, z , so daß $x : y = 2 : 3, y : z = 12 : 5$ ist.

550. Von drei Zahlen verhält sich die erste zur zweiten wie 2 zu 3, die zweite zur dritten wie 5 zu 8; ihre Summe beträgt 98. Wie heißen die Zahlen?

551. Eine 2 cm lange Linie stellt in einer Zeichnung eine 28 m lange Strecke dar. Welche Strecke wird entsprechend durch eine 3,5 cm lange Linie dargestellt?

552. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 78 cm; Schenkel und Grundlinie verhalten sich wie 5 : 3. Wie lang sind die Seiten?

553. In einem Stromkreis mit $R_1 = 10 \Omega$ Widerstand fließt ein Strom $I_1 = 5 \text{ A}$. Wie groß ist der Strom I_2 bei einem Widerstand von $R_2 = 2 \Omega$?

554. Ein Nickelinddraht von $A_1 = 3,14 \text{ mm}^2$ Querschnitt hat einen Widerstand $R_1 = 0,1 \Omega$. Wie groß ist der Widerstand R_2 bei einem Querschnitt $A_2 = 7,05 \text{ mm}^2$?

555. Wieviel reines Silber enthalten 17 Silbermünzen bei einem Gewicht von je 5,556 g und dem Mischungsverhältnis 9 : 1?

556. Wie lang sind die Höhen eines Dreiecks, die zu den Seiten $a = 12 \text{ cm}$ und $b = 17 \text{ cm}$ gehören, wenn sie sich um 3 cm unterscheiden?

557. Ein Winkel eines Dreiecks beträgt 36° . Wie groß sind die beiden anderen Winkel, wenn sie sich wie 7 : 2 verhalten?

558. Von vier flächengleichen Rechtecken sind die vier langen Seiten 15, 20, 24, 30 cm lang. Wie müssen sich die entsprechenden vier kurzen Seiten verhalten?

9. Der pythagoreische Lehrsatz

9.1. Allgemeines

Der Lehrsatz des Pythagoras ist einer der wichtigsten Lehrsätze der Geometrie. Pythagoras war ein griechischer Philosoph, der um 550 vor Chr. lebte. Sein Lehrsatz, der sich mit dem Verhältnis der einzelnen Seiten zueinander in einem **rechtwinkligen** Dreieck befaßt, ermöglicht uns in der Wechselstromlehre die Berechnung der Wirk-, Blind- und Scheinanteile.

Das rechtwinklige Dreieck hat, wie sein Name sagt, einen rechten Winkel (90°). Wo dieser Winkel von 90° liegt, spielt keine Rolle.

Die Summe der Winkel in jedem Dreieck beträgt immer 180° .

In einem Dreieck können nur ein **rechter** (und zwei **spitze**) Winkel enthalten sein, weil zwei rechte Winkel schon zusammen 180° haben. (Bei zwei rechten Winkeln ist das Dreieck praktisch zu einem Strich zusammengefallen.)

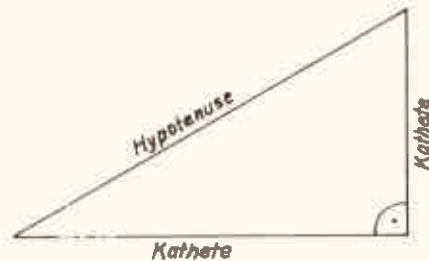


Abb. 9.1

Die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen **Katheten**; die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite hat den Namen **Hypotenuse**.

Beachten Sie auch die Schreibweise. Man liest oft das Wort **Hypotenuse** mit „th“ geschrieben; es hat aber mit Hypothese oder Hypothek nichts zu tun. Die Wörter „Kathete“ und „Pythagoras“ werden dagegen mit „th“ geschrieben.

9.2. Beweis für die Richtigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes

An einem **rechtwinkligen** Dreieck, in dem sich die Seiten wie $3 : 4 : 5$ verhalten, wollen wir jetzt den pythagoreischen Lehrsatz erläutern und beweisen. Wir zeichnen das Dreieck mit der Hypotenuse von 5 cm und den beiden Katheten von 4 und 3 cm Länge. Über die einzelnen Dreieckseiten wird je ein Quadrat errichtet. Wir erhalten also ein großes Kathetenquadrat von 4 cm Seitenlänge, ein kleines Kathetenquadrat von 3 cm Seitenlänge und ein Hypotenusenquadrat von 5 cm Seitenlänge. Die einzelnen Quadrate ergeben folgende Flächen:

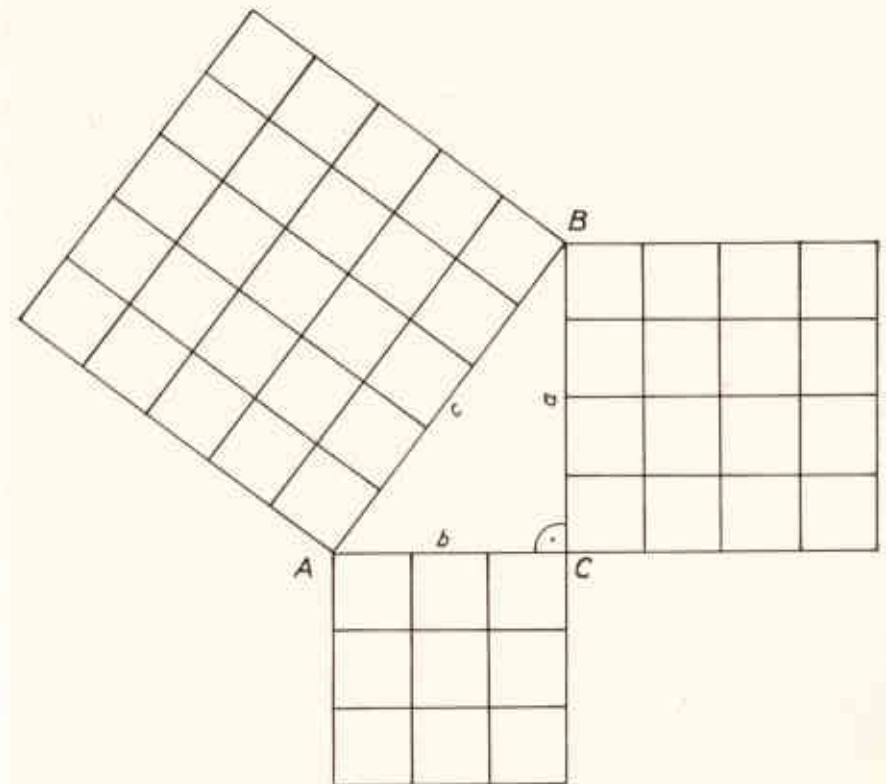


Abb. 9.2

- | | |
|----------------------------|---|
| a) Großes Kathetenquadrat | $a^2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$ |
| b) Kleines Kathetenquadrat | $b^2 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$ |
| | Summe <u>25 cm^2</u> |
| c) Hypotenusenquadrat | $c^2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$ |

Beim Vergleichen der Flächen ist zu erkennen, daß die beiden Kathetenquadrate mit zusammen 25 cm^2 in der Größe dem Hypotenusenquadrat von ebenfalls 25 cm^2 entsprechen.

In dem vorstehenden Beispiel haben wir gesehen, daß bei einem Seitenverhältnis von 3 : 4 : 5 ein **rechtwinkliges Dreieck** herauskommt. Es gibt aber auch noch andere Zahlengruppen, die die Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken angeben, z. B. 5 : 12 : 13, 7 : 24 : 25, 8 : 15 : 17 usw., sie werden **pythagoreische Zahlen** genannt. Wenn man sie mit beliebigen Zahlen multipliziert, erhält man neue pythagoreische Zahlen.

Der pythagoreische Lehrsatz:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Daraus folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Setzen wir für $a = 4$ und $b = 3$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ c &= \sqrt{16 + 9} \\ c &= \sqrt{25} \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Die Seite c haben wir über die Formel des pythagoreischen Lehrsatzes durch Umstellung der Gleichung ermitteln können. Ebenso kann man die Gleichung nach a oder b umstellen.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

9.2.1. Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes

Bei einem rechtwinkligen Dreieck soll die unbekannte Seite ermittelt werden:

$a = 40 \text{ cm}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = 9 \text{ cm}$	$c = \sqrt{40^2 + 9^2}$
$c = ?$	$c = \sqrt{1600 + 81}$
	$c = \sqrt{1681}$
	$c = 41 \text{ cm}$

$c = 41 \text{ cm}$	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
$b = 9 \text{ cm}$	$a = \sqrt{41^2 - 9^2}$
$a = ?$	$a = \sqrt{1681 - 81}$
	$a = \sqrt{1600}$
	$a = 40$

$c = 41$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$a = 40$	$b = \sqrt{41^2 - 40^2}$
$b = ?$	$b = \sqrt{1681 - 1600}$
	$b = \sqrt{81}$
	$b = 9$

Beispiele aus der Elektrotechnik:

In dem rechtwinkligen Dreieck soll der unbekannte Wechselstromwiderstand Z ermittelt werden:

Wirkwiderstand	$R = 100$
Blindwiderstand	$X = 1750$
Scheinwiderstand	$Z = ?$
	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
	$Z = \sqrt{100^2 + 1750^2}$
	$Z = 1753$

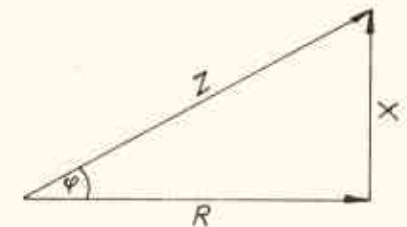


Abb. 9.3

Die unbekannte Blindleistung ist zu ermitteln:

Scheinleistung	$S = 4400$
Wirkleistung	$P = 3000$
Blindleistung	$Q = ?$
	$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$
	$Q = \sqrt{4400^2 - 3000^2}$
	$Q = 3210$

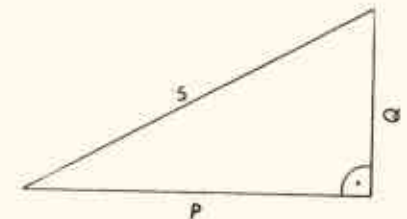


Abb. 9.4

Übungsaufgaben:

Ermitteln Sie vom rechtwinkligen Dreieck die unbekannte Seite.

$$559. \quad a = 6 \quad b = 8 \quad c = ?$$

$$560. \quad c = 29 \quad a = 21 \quad b = ?$$

$$561. \quad a = 6 \quad c = 10 \quad b = ?$$

$$562. \quad b = 12 \quad c = 15 \quad a = ?$$

$$563. \quad a = 35 \quad b = 12 \quad c = ?$$

$$564. \quad c = 17 \quad a = 8 \quad b = ?$$

$$565. \quad a = 10,6 \quad b = 8,4 \quad c = ?$$

$$566. \quad a = b = 18,38 \quad c = ?$$

$$567. \quad R = 36 \quad X = 48 \quad Z = ?$$

$$568. \quad Z = 70 \quad X = 56 \quad R = ?$$

$$569. \quad P = 100 \quad Q = 75 \quad S = ?$$

$$570. \quad S = 165 \quad P = 132 \quad Q = ?$$

571. Der Umfang eines quadratischen Zimmers beträgt 18,20 m. Wie lang ist die Diagonale?

572. Der Abstand vom Fußende einer Leiter bis zur Wand beträgt 90 cm, von der Erde bis zur Leiterspitze 3,60 m. Wie lang ist die Leiter?

573. Die Radarmessung ergibt eine Entfernung des Flugzeugs von 41 km. Die waagerechte Erdentfernung beträgt 40 km. Wie hoch ist das Flugzeug?

10. Kreisfunktionen

10.1. Die Kreisfunktionen Sinus und Kosinus

Die Kreisfunktionen werden auch Winkelfunktionen oder trigonometrische Funktionen genannt. Sie lassen sich im Einheitskreis mit dem Radius $r = 1$ darstellen.

Im Einheitskreis wird der Drehschenkel aus der waagerechten Lage heraus gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

Der Koordinatenpunkt P_1 ist vom Drehwinkel α — das ist der Winkel zwischen der waagerechten x-Achse und dem Drehschenkel — abhängig. Die Projektion des Punktes P_1 auf die x- bzw. y-Achse ergibt die Werte x und y .

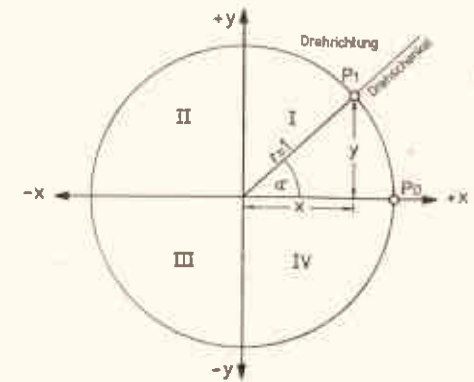


Abb. 10.1 — Einheitskreis

10.1.1. Sinus des Winkels α

Die Länge der vom Punkt P_1 im Einheitskreis projizierten Strecke y ist eine Funktion des Winkels α . Diese Funktion bezeichnet man als den Sinus des Winkels α .

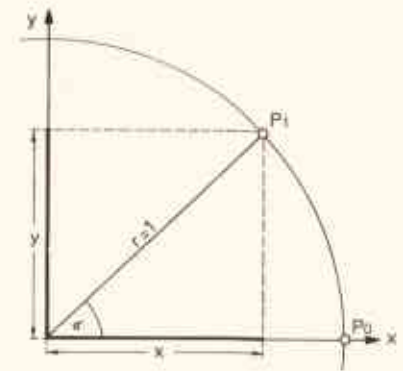


Abb. 10.2 — Projektion von P_1

10.1.2. Kosinus des Winkels α

Die Länge der vom Punkt P_1 im Einheitskreis projizierten Strecke x ist ebenfalls eine Funktion des Winkels α . Diese Funktion bezeichnet man als den Kosinus des Winkels α .

10.1.3. Rechtwinkliges Dreieck

Wenn die Strecke y in der Abb. 10.2 parallel nach rechts bis zum Ende der Strecke x verschoben wird, so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten x , y und r .

- $r = 1$ ist die Hypotenuse und liegt dem rechten Winkel gegenüber,
- $x = \cos \alpha$ ist die Ankathete zum Winkel α ,
- $y = \sin \alpha$ ist die Gegenkathete zum Winkel α .

Unterteilt man jeden Quadranten nach **Winkelgraden**, so können im Einheitskreis für **jeden möglichen Winkel α** die Werte für $y = \sin \alpha$ und $x = \cos \alpha$ ermittelt werden.

Quadrant	Winkel α in °	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
I	0—90	0 bis +1	+1 bis 0
II	90—180	+1 bis 0	0 bis -1
III	180—270	0 bis -1	-1 bis 0
IV	270—360	-1 bis 0	0 bis +1

Aus den entsprechenden Tabellen (vgl. hierzu auch Abschn. 22) können die Funktionswerte für die einzelnen Winkelgrade entnommen werden.

10.1.4. Sinuskurve

Die grafische Darstellung für den Sinus des Winkels α ergibt eine Kurve mit **sinusförmigem Verlauf**.

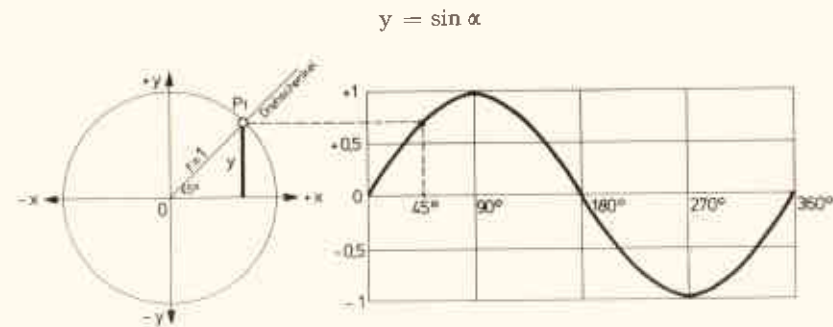


Abb. 10.3 — Einheitskreis und Diagramm

Wenn die zum jeweiligen Winkel gehörenden y -Werte in ein Diagramm projiziert werden, dann ergibt sich eine **Sinuskurve**.

10.2. Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Aus dem rechtwinkligen Dreieck können die einzelnen Funktionen auch **trigonometrisch** abgeleitet werden. In den folgenden Betrachtungen wollen wir uns so weit mit den einfachen Winkelfunktionen eines **rechtwinkligen** Dreiecks befassen, wie es für das Verständnis in der Elektrotechnik (Wechselstromtechnik) erforderlich ist.

Das rechtwinklige Dreieck enthält die Winkel α (Alpha), β (Beta) und γ (Gamma).

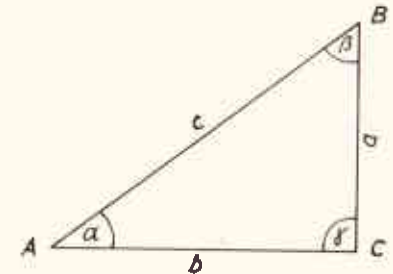


Abb. 10.4

Das Verhältnis der Seiten a und b ändert sich bei **kleineren oder größeren Dreiecken nicht**, solange die Winkel unverändert bleiben. **Zu jedem Verhältnis von zwei Seiten müssen also in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmte Winkel α und β gehören.**

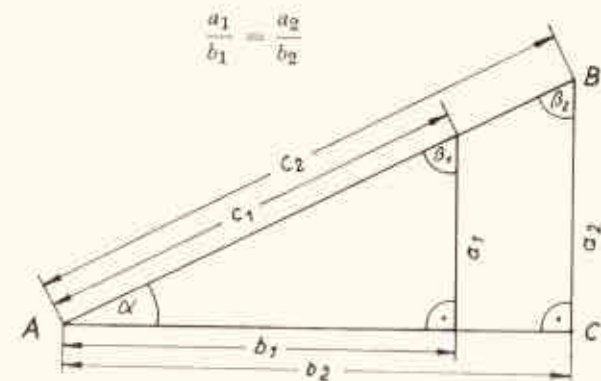


Abb. 10.5

Nun wollen wir uns aber nicht nur mit den Seiten, sondern auch mit den Winkeln befassen. Nehmen wir den spitzen Winkel bei A , also den Winkel α .

In der nebenstehenden Zeichnung ergeben sich zu den verschiedenen Winkeln von α im Punkt A die Seiten a , a_1 , a_2 und c , c_1 , c_2 .

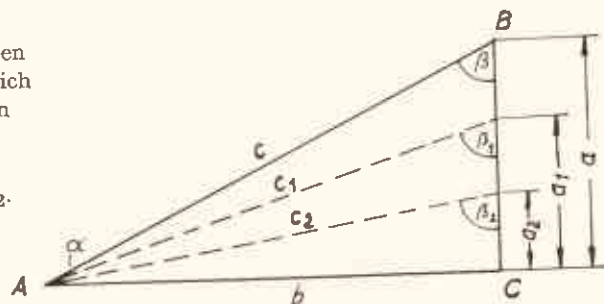


Abb. 10.6

Werden die Seiten a und c kleiner, so wird auch der Winkel α kleiner, und zwar im gleichen Verhältnis.

Solche Abhängigkeitsverhältnisse nennt man „Funktionen“, und da diese mit der Änderung des Winkels zusammenhängen, „Winkelfunktionen“.

Wir können also sagen:

der Winkel α hat das Verhältnis $a : c$
 der Winkel α_1 hat das Verhältnis $a_1 : c_1$
 der Winkel α_2 hat das Verhältnis $a_2 : c_2$

Merke:

Der Winkel α kann durch das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete a zur Hypotenuse c bestimmt werden. Diese Winkelfunktion wird „Sinus“ genannt und „sin“ geschrieben.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Eine Winkelfunktion drückt das Verhältnis zweier Dreiecksseiten in einem rechtwinkligen Dreieck zueinander in Zahlen aus. Oder anders ausgedrückt: Kennt man das Verhältnis zweier bestimmter Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck zueinander, so läßt sich jeder Winkel bestimmen.

Beispiel:

Gegeben: $a = 3$; $c = 6$

Gesucht: $\alpha = ?$

Lösung: $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{6} = 0,5$ $\alpha = 30^\circ$ (Tabelle)

Merke:

Der Winkel α kann aber auch durch das Verhältnis der anliegenden Kathete b zur Hypotenuse c bestimmt werden. Diese Winkelfunktion wird „Kosinus“ genannt und „cos“ geschrieben.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Beispiel:

Gegeben: $b = 2$; $c = 4$

Gesucht: $\alpha = ?$

Lösung: $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{4} = 0,5$ $\alpha = 60^\circ$ (Tabelle)

Bisher wurde der Winkel α durch das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse bestimmt (sin und cos). Der Winkel α kann außerdem durch das Verhältnis der beiden Katheten bestimmt werden (tan und cot).

Merke:

Das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete ist der Tangens (geschrieben: tan).

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Merke:

Das Verhältnis der Ankathete zur Gegenkathete wird Kotangens genannt (geschrieben: cot).

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

Wir haben bisher immer nur vom Winkel α gesprochen. Das rechtwinklige Dreieck enthält aber außerdem noch den spitzen Winkel „ β “. Die für den Winkel α entwickelten Beziehungen gelten aber genauso für den Winkel β . Wir dürfen uns nur nicht zu ängstlich an die Buchstaben in den Formeln klammern, wie das der Ungeübte gern macht. Es kommt nicht darauf an, daß $\sin \alpha = a : c$ ist, sondern $\sin \alpha = \text{Gegenkathete} : \text{Hypotenuse}$.

Beim Winkel „ β “ ist z. B.:

$$\sin \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} & \sin \beta &= \frac{b}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} & \cos \beta &= \frac{a}{c} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} & \tan \beta &= \frac{b}{a} \\ \cot \alpha &= \frac{b}{a} & \cot \beta &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

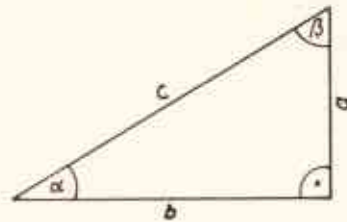


Abb. 10.7

Aus der vorstehenden Gegenüberstellung ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \cos \beta \left(\frac{a}{c} \right) & \tan \alpha &= \cot \beta \left(\frac{a}{b} \right) \\ \cos \alpha &= \sin \beta \left(\frac{b}{c} \right) & \cot \alpha &= \tan \beta \left(\frac{b}{a} \right)\end{aligned}$$

Wenn wir in den vorstehenden Gleichungen für den Winkel $\beta = 90^\circ - \alpha$ einsetzen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \cos (90^\circ - \alpha) & \tan \alpha &= \cot (90^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= \sin (90^\circ - \alpha) & \cot \alpha &= \tan (90^\circ - \alpha)\end{aligned}$$

Merke:

Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels (Ergänzungswinkel zu 90°).

Von den vier Funktionen steht beim „Sinus“ und „Kosinus“ die Hypotenuse im Nenner, während die Katheten im Zähler stehen. Da aber die Hypotenuse die längste Seite im Dreieck ist, müssen alle Sinus- und Kosinus-Werte im rechtwinkligen Dreieck kleiner als 1 sein. (Genau liegen sie zwischen den Werten 0 und 1.) Die Tangens- und Kotangensfunktionen können dagegen jeden beliebigen Zahlenwert zwischen den Werten „Null“ und „ ∞ “ haben. Messen wir z. B. in mehreren beliebig großen rechtwinkligen Dreiecken, deren Winkel α alle 30° sind, die Längen der Seiten a und c nach, so stellen wir fest, daß ihr Verhältnis zueinander in jedem Falle 1 : 2, d. h. 0,5 ist. Das bedeutet also, daß das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse in jedem rechtwinkligen Dreieck, dessen Winkel $\alpha = 30^\circ$ ist, gleich 0,5 ist. Haben wir einen Winkel von $\alpha = 60^\circ$, so stellen wir fest, daß die Seite a sich zur Hypotenuse c in jedem Dreieck im Verhältnis von 0,866 : 1 verhält. So ist das Verhältnis für alle übrigen Winkel zwischen 0° und 90° eine ganz bestimmte feststehende Zahl. Ebenso verhält es sich bei den übrigen Funktionen aller Winkel zwischen 0° und 90° .

Man hat die Werte der vier Funktionen für alle Winkel zwischen 0° und 90° in Abständen von je 10 Minuten in den „Tabellen der Winkelfunktionen“ für „sin, cos, tan und cot“ zusammengestellt (vgl. hierzu Abschn. 22.3).

Da sich die sin- und cos-Funktionen bei den einzelnen Winkeln in umgekehrter Richtung ändern, kann man für beide Funktionen sogar dieselbe

Sinus		Minuten							
		0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0°	0,0000							0,0175	89°
1°	0,1564							0,1736	88°
2°	0,1736							0,1908	87°
3°									
4°	0,3256							0,3420	70°
5°	0,3420							0,3584	69°
6°									
7°	0,4848							0,5000	60°
8°	0,5000							0,5150	59°
9°									
10°	0,6293							0,6428	50°
11°	0,6428							0,6561	49°
12°									
13°	0,7547							0,7660	40°
14°	0,7660							0,7771	39°
15°									
16°	0,8572							0,8660	30°
17°	0,8660							0,8746	29°
18°									
19°	0,9336							0,9397	20°
20°	0,9397							0,9455	19°
21°									
22°	0,9816							0,9848	10°
23°	0,9848							0,9877	9°
24°									
25°	0,9998							1,0000	0°
26°									
27°									
28°									
29°									
30°									
31°									
32°									
33°									
34°									
35°									
36°									
37°									
38°									
39°									
40°									
41°									
42°									
43°									
44°									
45°									
46°									
47°									
48°									
49°									
50°									
51°									
52°									
53°									
54°									
55°									
56°									
57°									
58°									
59°									
60°									
61°									
62°									
63°									
64°									
65°									
66°									
67°									
68°									
69°									
70°									
71°									
72°									
73°									
74°									
75°									
76°									
77°									
78°									
79°									
80°									
81°									
82°									
83°									
84°									
85°									
86°									
87°									
88°									
89°									
90°									
		60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
		Minuten						Kosinus	

Tabelle benutzen. Denn es ist z. B. der Wert des Sinus von 30° gleich dem Kosinus des Winkels von 60° (also $90^\circ - 30^\circ$) und umgekehrt. Ebenso ist es mit den Werten für alle anderen Winkel. Das gleiche trifft auch für den Tangens und Kotangens zu. Angedeutet wird diese Möglichkeit auch bereits durch die Beisilbe „Ko“ = zugehörig“ (Ko-sinus, Ko-tangens). Die Tabellen werden so benutzt, daß man die Werte für den Sinus für die Winkelgradwerte meist von oben nach unten und für die Minutenwerte von links nach rechts gehend abliest, während man die Kosinuswerte der gleichen Tabelle für die Winkelgradwerte von unten nach oben und für die Minutenwerte von rechts nach links entnimmt.

Die Tabelle der Tangens- und Kotangensfunktionen ist genauso zusammengestellt, jedoch ergeben die Verhältnisse der entsprechenden Seiten andere Zahlenwerte als bei den Sinus- und Kosinusfunktionen (z. B. $\tan 0^\circ = 0,0000$; $\tan 30^\circ = 0,5774$; $\tan 45^\circ = 1,0000$; $\tan 60^\circ = 1,732$; $\tan 70^\circ = 2,747$; $\tan 80^\circ = 5,671$; $\tan 90^\circ = \infty$).

10.3. Beispiele für die Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken

Zur Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks müssen außer dem rechten Winkel noch zwei Größen bekannt sein; das können sein:

1. die beiden Katheten,
2. die Hypotenuse und eine Kathete,
3. die Hypotenuse und ein spitzer Winkel oder
4. eine Kathete und ein spitzer Winkel.

Beispiele:

Gegeben: $a = 8$; $b = 6$

Gesucht: c ; α ; β

Lösung: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $c = \sqrt{64 + 36}$
 $c = \sqrt{100}$
 $c = 10$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{10} = 0,8$$

nach der Tabelle: $\alpha = 53^\circ$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \text{oder} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{6}{10} \quad \beta = 90 - 53$$

$$\sin \beta = 0,6 \quad \beta = 37^\circ$$



Abb. 10.8

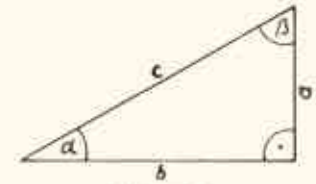


Abb. 10.9

Gegeben: $c = 15$; $a = 9$

Gesucht: b ; α ; β

Lösung: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
 $= \sqrt{15^2 - 9^2}$
 $= \sqrt{144}$
 $= 12$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{15} = 0,8$$

$$\alpha = 37^\circ$$

$$\beta = 90 - \alpha = 53^\circ \text{ oder}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{9}{15} = 0,6$$

$$\beta = 53^\circ \quad \text{oder}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{12}{9} = 1,33$$

$$\beta = 53^\circ \quad \text{oder}$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = 0,75$$

$$\beta = 53^\circ$$

Gegeben: $c = 5,1$; $b = 4,5$; $\gamma = 90^\circ$

Gesucht: a ; α ; β

Lösung: $a^2 = c^2 - b^2$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{5,1^2 - 4,5^2}$$

$$a = 2,4$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$a = c \cdot \cos \beta$$

$$a = 5,1 \cdot 0,4706$$

$$a = 2,4$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{4,5}{5,1}$$

$$\sin \beta = 0,8824$$

$$\beta = 61^\circ 56'$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\alpha = 90^\circ - 61^\circ 56'$$

$$\alpha = 28^\circ 04'$$

Übungsaufgaben:

574. Lesen Sie die Werte für folgende Funktionen aus einer Tabelle ab:

a) $\sin 30^\circ =$ b) $\sin 85^\circ =$ c) $\sin 46^\circ 50' =$ d) $\sin 39^\circ 40' =$
e) $\cos 35^\circ =$ f) $\cos 48^\circ =$ g) $\cos 23^\circ 10' =$ h) $\cos 50^\circ =$
i) $\tan 13^\circ =$ j) $\tan 1^\circ =$ k) $\tan 89^\circ 48' =$ l) $\tan 27^\circ 30' =$
m) $\cot 88^\circ =$ n) $\cot 12' =$ o) $\cot 73^\circ 40' =$ p) $\cot 57^\circ 20' =$

575. Wie groß sind die Winkel nachstehender Funktionen?
(Zur Feststellung sind die Tabellen zu verwenden.)

a) $\cos \alpha = 0,9833$	b) $\cos \varphi = 0,3987$	c) $\cos \beta = 0,00524$
d) $\sin \alpha = 0,0993$	e) $\sin \varphi = 0,4909$	f) $\sin \beta = 0,9191$
g) $\tan \alpha = 3,606$	h) $\tan \varphi = 4,645$	i) $\tan \beta = 0,0125$
j) $\cot \alpha = 5,193$	k) $\cot \varphi = 0,8312$	l) $\cot \beta = 3,614$

576. Gegeben: $\alpha = 40^\circ$ Gesucht: $a = ?$
 $c = 12 \text{ cm}$

577. Gegeben: $\beta = 20^\circ$ **Gesucht:** $a = ?$
 $b = 12 \text{ cm}$ $c = ?$
 $\alpha = ?$

578. Gegeben: $\varphi = 60^\circ$ Gesucht: $Z = ?$
 $R = 50 \Omega$

579. Gegeben: $P = 86,6 \text{ W}$ Gesucht: $\varphi = ?$
 $S = 100 \text{ VA}$ $\cos \varphi = ?$

580. Gegeben:

a	=	7,79
b	=	3,4

Gesucht:

α	=	?
β	=	?
c	=	?

581. Gegeben:	$P = 120 \text{ W}$	Gesucht:	$Q = ?$
	$S = 200 \text{ VA}$		$\cos \varphi = ?$
			$\sin \varphi = ?$
			$\varphi = ?$

582. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten $a = 5 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ und die Hypotenuse 13 cm lang. Welche Werte ergeben sich für die vier trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$ und $\cot$ des Winkels α ?

Übungsaufgaben:

583. Der Tangens des Winkels α beträgt 1,0, eine Kathete ist 4 cm lang. Wie groß ist die Hypotenuse, und wie groß sind die Werte für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$?

584. Wie groß sind $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ und $\cot \alpha$ in dem rechtwinkligen Dreieck ABC, wenn die Katheten $a = 15 \text{ cm}$ und $b = 8 \text{ cm}$ lang sind?

585. In einem rechtwinkligen Dreieck betragen der Flächeninhalt 50 cm^2 und der Winkel $\alpha = 45^\circ$. Wie groß sind die beiden Katheten a und b sowie die Hypotenuse c ?

586. Welchen Winkel bildet eine an einer Gebäudewand anliegende Leiter von 10 m Länge mit dem Boden, wenn der Leiterfuß 3 m von der Wand entfernt aufsteht? Wieviel Meter über dem Erdboden liegt die Leiter an der Wand an?

11. Dreisatz- und Prozentrechnung

11.1. Einfacher Dreisatz mit geradem Verhältnis

Ein Flugzeug legt in 1 Stunde 300 km zurück. Welche Strecke legt es in 2,5 Stunden zurück? — Solche Aufgaben kann man auch als Dreisatz schreiben, z. B.:

$$\begin{array}{l} \text{in 1 h fliegt das Flugzeug 300 km} \\ \text{in 2,5 h fliegt das Flugzeug } x \text{ km} \\ \hline x = 2,5 \cdot 300 = 750 \text{ km} \end{array}$$

Die Dreisatzrechnung (oder „Regeldetri“ = Regel von 3 Zahlen) dient dazu, aus 3 bekannten Zahlen eine 4. unbekannte zu berechnen. Diese unbekannte Zahl bezeichnen wir mit x . Bei der vorstehenden Aufgabe hätte man natürlich auch gleich die Lösung finden können, aber wir wollen uns sofort daran gewöhnen, bei jeder Aufgabe den Ansatz in dieser Form hinzuschreiben.

Jeder Dreisatz besteht aus

- a) einem Bedingungssatz (in 1 h fliegt das Flugzeug 300 km) und
- b) einem Fragesatz (in 2,5 h fliegt das Flugzeug x km).

Bei dem Ansatz ist immer darauf zu achten, daß gleichbenannte Zahlen stets untereinander stehen müssen (h unter h und km unter km). Unter den Ansatz kommt ein langer Strich, und dann folgt die Ausrechnung!

1. Beispiel:

3 m Stoff kosten in einem Kaufhaus 36 DM. Wieviel kosten 5 m von diesem Stoff?

Im Ansatz schreiben wir wieder den Bedingungssatz und Fragesatz untereinander:

$$\begin{array}{l} \text{Bedingungssatz:} \quad 3 \text{ m Stoff kosten } 36 \quad \text{DM} \\ \text{Fragesatz:} \quad \quad 5 \text{ m Stoff kosten } x \quad \text{DM} \\ \hline 1. \text{ Wir schließen auf die Einheit: } 1 \text{ m Stoff kostet } \frac{36}{3} \quad \text{DM} \\ 2. \text{ Was wir wissen wollen:} \quad 5 \text{ m Stoff kosten } \frac{36}{3} \cdot 5 \text{ DM} \\ \hline 3. \text{ Ergebnis:} \quad \quad \quad x = \frac{36}{3} \cdot 5 = 60 \text{ DM} \end{array}$$

2. Beispiel:

In $2\frac{3}{4}$ h legt jemand $17\frac{1}{4}$ km zurück. Wie lange braucht er bei gleicher Geschwindigkeit für 23 km?

Da nach der Zeit gefragt wird und die unbekannte Zahl x immer im Fragesatz rechts stehen soll, müssen auch im Bedingungssatz die Zeit h rechts und die km links stehen.

$$\begin{array}{l} \text{Bedingungssatz:} \quad \quad \quad \text{Für } \frac{69}{4} \text{ km braucht er } \frac{11}{4} \text{ h} \\ \text{Fragesatz:} \quad \quad \quad \text{Für 23 km braucht er } x \text{ h} \end{array}$$

1. Wir schließen gleich auf die Einheit: Für 1 km braucht er $\frac{11}{4} : \frac{69}{4}$ h

2. Was wir wissen wollen: Für 23 km braucht er $\frac{11}{4} : \frac{69}{4} \cdot 23$ h

3. Ergebnis: $x = \frac{11 \cdot 4 \cdot 23}{4 \cdot 69} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ h

3. Beispiel:

In $2\frac{3}{4}$ h ist ein Fußgänger $17\frac{1}{4}$ km gewandert. Wieviel km legt er bei gleicher

Geschwindigkeit in $5\frac{1}{3}$ h zurück?

In $\frac{11}{4}$ h legt er $\frac{69}{4}$ km zurück

In $\frac{16}{3}$ h legt er x km zurück

$$\text{Lösung:} \quad x = \frac{69 \cdot 4 \cdot 16}{4 \cdot 11 \cdot 3} = \frac{368}{11} = 33\frac{5}{11} \text{ km}$$

Während Sie $x = \frac{368}{11}$ hinschreiben, überlegen Sie:

Bei $\frac{11}{4}$ h sind es $\frac{69}{4}$ km (schreiben Sie $\frac{69}{4}$).

Bei 1 h muß ich durch $\frac{11}{4}$ dividieren, also mit $\frac{4}{11}$ multiplizieren (schreiben Sie $\cdot \frac{4}{11}$).

Bei $\frac{16}{3}$ h sind es $\frac{16}{3}$ mal so viel km, also mal $\frac{16}{3}$ (schreiben Sie $\cdot \frac{16}{3}$).

4. Beispiel:

$\frac{1}{2}$ kg kosten 10,80 DM. Wieviel kosten $17\frac{1}{4}$ kg?

$$\frac{9}{2} \text{ kg kosten } \frac{54}{5} \text{ DM}$$

$$\frac{69}{4} \text{ kg kosten } x \text{ DM}$$

$$x = \frac{54 \cdot 2 \cdot 69}{5 \cdot 9 \cdot 4} = 41,40 \text{ DM}$$

5. Beispiel:

Eine Mühle mahlt in $\frac{3}{4}$ Tg. 90 Zentner Roggen aus. Wie lange braucht sie für 330 Zentner?

$$90 \text{ Zentner werden in } \frac{3}{4} \text{ Tg. gemahlen}$$

$$330 \text{ Zentner werden in } x \text{ Tg. gemahlen}$$

$$x = \frac{3 \cdot 330}{4 \cdot 90} = 2\frac{3}{4} \text{ Tg.}$$

6. Beispiel:

Beim Bau einer Autostraße wurden 806,4 m³ Erde in 12 Tagen ausgeschachtet. Wie lange braucht dieselbe Anzahl Arbeiter, um 2150,4 m³ fortzuschaffen?

$$806,4 \text{ m}^3 \text{ werden in 12 Tg. ausgeschachtet}$$

$$2150,4 \text{ m}^3 \text{ werden in } x \text{ Tg. ausgeschachtet}$$

$$x = \frac{12 \cdot 2150,4}{806,4} = 32 \text{ Tg.}$$

7. Beispiel:

Ein Rad macht gerade $4\frac{1}{2}$ Umdrehungen auf einer Strecke von 10,125 m.

Wieviel Umdrehungen wird es auf einem 56,7 m langen Weg ausführen?

$$\text{Auf } \frac{81}{8} \text{ m Weg kommen } \frac{9}{2} \text{ Umdrehungen}$$

$$\text{Auf } \frac{567}{10} \text{ m Weg kommen } x \text{ Umdrehungen}$$

$$x = \frac{9 \cdot 8 \cdot 567}{2 \cdot 81 \cdot 10} = 25\frac{1}{5} \text{ Umdrehungen}$$

Übungsaufgaben:

587. Ein Flachstahl von $\frac{3}{4}$ m Länge wiegt $1\frac{1}{2}$ kg. Wie schwer ist ein Stück des gleichen Flachstahls, das $3\frac{1}{2}$ m lang ist?

588. 50 l kosten 270 DM. Wieviel kosten $179\frac{1}{2}$ l?

589. 13,5 m kosten 3,50 DM. Wieviel erhält man für 17 DM? (auf 2 Dezimalstellen!)

590. Eine Gasrohrverschraubung hat 19 Gang auf einen engl. Zoll (1"). Wieviel mm hoch ist ein Gewindegang? (1" = 25,4 mm; Rechnung auf 1 Dezimalstelle!)

591. Ein Radfahrer legt in 1 h $13\frac{1}{3}$ km zurück. Wieviel Stunden braucht er für 126 km? (Ergebnis ist in h und min umzurechnen.)

592. $16\frac{3}{4}$ kg frische Seife hatten durch Eintrocknen nach einiger Zeit $1\frac{1}{4}$ kg an Gewicht verloren. Wie groß war der Gewichtsverlust auf 5 kg? (3 Dezimalstellen).

593. Ein Kapital bringt in $5\frac{2}{3}$ Jahren $90\frac{2}{3}$ DM Zinsen. Wieviel Zinsen bringt es in $1\frac{3}{4}$ Jahren?

594. Ein Kapital bringt in $3\frac{1}{6}$ Jahren $50\frac{2}{3}$ DM Zinsen. In wieviel Jahren bringt es 36 DM Zinsen?

11.2. Einfacher Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis

Wir unterscheiden Dreisatzaufgaben mit geradem und mit umgekehrtem Verhältnis. Vergleichen Sie einmal die beiden Dreisatzaufgaben:

1. Beispiel: 1 Arbeiter erhält wöchentlich 300 DM Lohn
4 Arbeiter erhalten wöchentlich x DM Lohn
- $$x = ?$$

Je mehr Arbeiter — desto mehr Lohn
(4 mal soviel Arbeiter erhalten 4 mal soviel Lohn),
also ein gerades Verhältnis

2. Beispiel: 1 Arbeiter braucht 20 Tage zu einer Arbeit
4 Arbeiter brauchen x Tage zu einer Arbeit
- $$x = ?$$

Je mehr Arbeiter — desto weniger Zeit
(4 mal soviel Arbeiter brauchen nur $\frac{1}{4}$ an Zeit),
also ein umgekehrtes Verhältnis

Ebenso stehen Menge und Preis einer Ware in einem geraden Verhältnis (je mehr Ware — desto mehr beträgt der Preis; oder je weniger — desto weniger). Dagegen stehen Zeit und Geschwindigkeit in einem umgekehrten Verhältnis zueinander. (Wenn ich einen Weg in der doppelten Geschwindigkeit zurücklege, dann brauche ich die halbe Zeit; je mehr an Geschwindigkeit — desto weniger an Zeit usw.)

Wir müssen bei jeder Dreisatzaufgabe erst untersuchen, was für ein Verhältnis vorliegt, denn beim umgekehrten Verhältnis kehrt sich alles um; Faktoren, die sonst in den Zähler kommen, treten in den Nenner und umgekehrt.

1. Beispiel:

Wenn jemand täglich 8 DM ausgibt, reicht er mit seinem Gelde $7\frac{1}{2}$ Tage.

Wie lange wird er reichen, wenn er täglich 10 DM ausgibt?

Zuerst die Frage: Gerades oder umgekehrtes Verhältnis? Je mehr man täglich ausgibt, desto weniger lange reicht man. Also haben wir ein umgekehrtes Verhältnis.

Bei 8 DM täglich reicht er $\frac{15}{2}$ Tage

Bei 10 DM täglich reicht er x Tage

1. Wir schließen auf die Einheit:

Bei 1 DM täglich reicht er $\frac{15}{2} \cdot 8 = \frac{15 \cdot 8}{2}$ Tage (also 8mal soviel Zeit).

2. Was wir wissen wollen:

Bei 10 DM täglich reicht er $\frac{15 \cdot 8}{2} : 10 = \frac{15 \cdot 8}{2 \cdot 10}$ (also $\frac{1}{10}$ der Zeit)

3. Ergebnis: $x = \frac{15 \cdot 8}{2 \cdot 10} = 6$ Tage

2. Beispiel:

Ein rechteckiger Platz ist $22\frac{1}{2}$ m lang und $10\frac{1}{2}$ m breit. Wie lang ist ein gleich großer Platz von $7\frac{1}{2}$ m Breite?

Zeichnen Sie im Maßstab 1 : 10000, also mit 22,5 mm $\cdot$ 10,5 mm das erste Rechteck, muß nun das zweite mit 7,5 mm Breite eine größere oder geringere Länge haben?

Es ist leicht zu erkennen, daß es sich um ein umgekehrtes Verhältnis handelt.

Bei $\frac{21}{2}$ m Breite hat das Rechteck $\frac{45}{2}$ m Länge

Bei $\frac{15}{2}$ m Breite hat das Rechteck x m Länge

Bei 1 m Breite hat das Rechteck $\frac{45}{2} \cdot \frac{21}{2}$ m Länge

Bei $\frac{15}{2}$ m Breite hat das Rechteck $\frac{45 \cdot 21}{2 \cdot 2} : \frac{15}{2}$ m Länge

$x = \frac{45 \cdot 21 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 15} = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2}$ m Länge

3. Beispiel:

Bei einer Geschwindigkeit von $3\frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ braucht ein Radfahrer 84 min für einen Weg. Wie lange braucht er bei der Geschwindigkeit von $3\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Erstens untersuchen wir das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Zeit. Je mehr Geschwindigkeit — desto weniger Zeit wird benötigt. Also handelt es sich hier um ein umgekehrtes Verhältnis.

Bei der Geschwindigkeit $\frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ braucht er 84 min

Bei der Geschwindigkeit $\frac{7}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ braucht er x min

Bei der Geschwindigkeit $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ braucht er $84 \cdot \frac{10}{3}$ min

Bei der Geschwindigkeit $\frac{7}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ braucht er $\frac{84 \cdot 10}{3} : \frac{7}{2}$ min

$$x = \frac{84 \cdot 10 \cdot 2}{3 \cdot 7} = 80 \text{ min}$$

Übungsaufgaben:

595. Wenn eine Arbeit bei täglich 12 h Arbeitszeit in 30 Tagen vollendet wird, wieviel Tage sind dann bei 10stündiger Arbeitszeit erforderlich?
596. 3 Rohre füllen einen Kessel in 3 h 20 min. Wieviel Zeit werden 5 Rohre vom gleichen Durchmesser brauchen?
597. Ein Fußgänger braucht 10 Tage für einen Weg, wenn er täglich 30 km zurücklegt. Wieviel km müßte er täglich gehen, wenn er erst in 15 Tagen am Ziel sein wollte?
598. Zur Belegung eines Flures braucht man 1536 quadratische Platten von je 400 cm^2 . Wieviel Platten von je 256 cm^2 müßte man statt dessen nehmen?
599. Ein Rad von $2\frac{2}{3} \text{ m}$ Umfang hat auf einer Strecke 375 Umdrehungen gemacht. Wieviel Umdrehungen macht auf derselben Strecke ein Rad von $2\frac{1}{2} \text{ m}$ Umfang?
600. 8 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit $67\frac{1}{2}$ Tage. Wieviel Tage brauchen dann 12 Arbeiter?
601. Für den Fußboden eines Zimmers sollte eine Anzahl Bretter von $4\frac{1}{4} \text{ m}$ Länge und $\frac{1}{5} \text{ m}$ Breite verwendet werden. Es sind aber nur Bretter von $3\frac{2}{5} \text{ m}$ Länge erhältlich. Welche Breite müssen diese Bretter besitzen, damit jedes eine ebensogroße Oberfläche hat wie ein Brett der ersten Sorte?

Übungsaufgaben:

602. Ein Zähler zeigt im Dezember 28 kWh (Kilowattstunden) Verbrauch an elektrischer Energie an. Dazu kommt eine Grundgebühr von 2,30 DM. Es waren im ganzen 7,90 DM zu zahlen. Berechnen Sie die Zahlung für Januar, wenn der Zähler einen Verbrauch von 23 kWh angibt! (Die Grundgebühr ist die gleiche.)
603. Ein Schnellzug legt die 145 km lange Strecke in 1 h 22 min zurück. In welcher Zeit legt der Zug die Strecke von 540 km zurück? (Das Ergebnis ist auf ganze min abzurunden.)
604. Das Vorderrad eines Fahrrads von 2,25 m Umfang macht auf einer bestimmten Strecke 2352 Umdrehungen. Wieviel Umdrehungen muß das Vorderrad eines Motorrads machen, dessen Radumfang nur $1\frac{3}{4} \text{ m}$ ist?
605. Wieviel kostet ein rechtwinkliges Grundstück von 37 m Länge und $34\frac{1}{2} \text{ m}$ Breite, wenn 1 m^2 24 DM kostet?
606. Ein rechteckiger Wasserbehälter ist 2,4 m lang, 2,1 m breit und 1,5 m hoch. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn in jeder Minute 28 l hineinfließen? (Rauminhalt = Länge mal Breite mal Höhe.)
607. Bei $3\frac{1}{2} \text{ m}$ Abstand lassen sich 100 Bäume längs eines Weges pflanzen. Wieviel Bäume braucht man bei $1\frac{2}{5} \text{ m}$ Abstand?
608. In $12\frac{3}{5}$ Monaten schaffen 15 Mann eine Arbeit. Wieviel Mann leisten dieselbe Arbeit schon in $6\frac{4}{3}$ Monaten?
609. Ein PKW braucht bis zum Zielort bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h 8 Stunden. Um wieviel verkürzt sich die Fahrzeit, wenn er 7 km/h schneller wird?

11.3. Prozentrechnung (Allgemeines)

Die Prozentrechnung ist eine Dreisatzrechnung mit der feststehenden Zahl 100. Die zu vergleichenden Werte werden auf die Zahl 100 bezogen; **Prozent** bedeutet vom Hundert. Die Abkürzung für Prozent ist v.H., das Zeichen ist %.

Grundwert: Der Grundwert „k“ (auch Kapital genannt) entspricht 100 Hundertsteln, also dem Ganzen oder 100 %.

Prozentsatz: Der Prozentsatz „p“ ist stets ein Teil von Hundert. Er wird immer in bezug auf Hundert angegeben. Der Prozentsatz $p = 1$ bedeutet 1 Prozent des Grundwertes oder 1 Hundertstel vom Grundwert.

Prozentwert: Der Prozentwert „z“ ist ein bestimmter Teil des Ganzen.

Von diesen drei Werten sind stets zwei Werte gegeben, der 3. Wert wird gesucht.

1. Beispiel:

Mit 600 DM gewinnt ein Kaufmann 30 DM.

Mit 1 DM gewinnt er $30 : 600 = 0,05$ DM.

Mit 100 DM gewinnt er $0,05 \cdot 100 = 5$ %.

Die 600 DM Kapital nennen wir den **Grundwert** „k“, die 30 DM Gewinn bezeichnen wir mit **Prozentwert** „z“, den Gewinn pro Hundert bezeichnen wir mit **Prozentsatz** „p“.

2. Beispiel:

Von dem Grundwert 500 DM sollen 30 % berechnet werden.

100 % entsprechen gleich 500 DM

30 % entsprechen gleich x DM

1. Wir schließen auf die Einheit: 1 % entspricht gleich $\frac{500}{100}$ DM

2. Was wir wissen wollen: 30 % entsprechen gleich $\frac{500}{100} \cdot 30$ DM

3. Ergebnis: $x = \frac{500 \cdot 30}{100} = 150$ DM

Wenn wir auf diese Weise eine Reihe von Aufgaben lösen, so können wir feststellen: Auf dem Bruchstrich erscheinen stets der Grundwert und der Prozentsatz, unter dem Bruchstrich steht immer die Zahl 100.

$$\text{Prozentwert} = \frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz}}{100}$$

$$z = \frac{k \cdot p}{100}$$

Durch Umstellung der Formel ergibt sich: $k = \frac{z \cdot 100}{p}$

$$\text{und } p = \frac{z \cdot 100}{k}$$

3. Beispiel:

Ein Kupfererz enthält 35 % Kupfer. Wie groß ist der Kupfergehalt einer Ladung von 8,6 t Kupferkies?

In diesem Beispiel sind der Prozentsatz p und der Grundwert k bekannt. Der Prozentwert z wird gesucht.

$$z = \frac{k \cdot p}{100}$$

$$z = \frac{8,6 \cdot 35}{100}$$

$$z = 3 \text{ t Kupferkies}$$

4. Beispiel:

Eine Ware wiegt insgesamt 400 kg. Die Verpackung wiegt 12 kg. Wieviel % des Gesamtgewichts sind das?

In diesem Beispiel sind der Grundwert k und der Prozentwert z bekannt. Der Prozentsatz p wird gesucht.

$$p = \frac{z \cdot 100}{k}$$

$$p = \frac{12 \cdot 100}{400}$$

$$p = 3 \%$$

5. Beispiel:

Eine Hausfrau hat bei ihrem Kaufmann 9 DM Rückvergütung bekommen. Der Einzelhändler gibt 1,5 % Rabatt. Für wieviel DM hat die Hausfrau gekauft?

In diesem Beispiel sind der Prozentwert z und der Prozentsatz p bekannt. Der Grundwert k wird gesucht.

$$k = \frac{z \cdot 100}{p}$$

$$k = \frac{9 \cdot 100}{1,5}$$

$$k = 600 \text{ DM}$$

Übungsaufgaben:

Wie groß sind die Prozentwerte?

610. 2%, 3% und 5% von

- a) 3 DM b) 15 DM c) 320 DM d) 4 510 DM e) 22 320 DM
f) 186 420 DM

611. $\frac{1}{2}\%$, $\frac{2}{3}\%$ und $\frac{3}{4}\%$ von

- a) 12 DM b) 48 DM c) 384 DM d) 7 584 DM e) 36 408 DM
f) 403 320 DM

612. $1\frac{1}{2}\%$, $2\frac{2}{3}\%$ und $3\frac{3}{4}\%$ von

- a) 60 DM b) 84 DM c) 672 DM d) 6 096 DM e) 42 864 DM
f) 208 176 DM

613. Wieviel Roheisen läßt sich aus 450 t schwedischen Erzes gewinnen, wenn dieses 55% Eisen enthält?

614. Im Jahre 1970 sind rund 52 Millionen DM umgesetzt worden. Im Jahre 1971 betrug der Umsatz schon 34,62% mehr. Berechnen Sie diesen Prozentsatz und dann den gesamten Umsatz 1971.

615. Wieviel beträgt die Versicherungsgebühr von $1\frac{1}{4}\%$ auf ein mit 37 420 DM versichertes Warenlager?

616. Wieviel beträgt a) die Preisermäßigung von $4\frac{3}{4}\%$ (im kaufmännischen Leben Rabatt, Diskont oder Skonto genannt) für 265 m Formstahl, wenn 1 m 1,60 DM kostet? b) Wieviel ist bei diesem Preisnachlaß dann nur noch zu zahlen?

617. Eine Rechnung lautet auf 176,50 DM, darauf werden $12\frac{1}{2}\%$ Rabatt gewährt. Wieviel ist dann bar zu bezahlen?

618. Eine Werkstatt bezieht 18 Parallelschraubstöcke, das Stück zu 42 DM. Der Lieferant gewährt bei Zahlung innerhalb 4 Wochen 3% Skonto. Welcher Betrag wäre in diesem Falle zu zahlen?

619. Wieviel beträgt der Tagesverdienst eines Schlossers, wenn er von 49 DM um 15% erhöht wurde?

Übungsaufgaben:

620. Bauxit (Tonerde) enthält etwa 55% Aluminium. Wieviel t Aluminium sind in $2\frac{1}{2}$ t Bauxit enthalten?

621. Von einem Dieselmotor wird eine Leistung von $12\frac{1}{2}$ PS erzeugt; die praktisch verwendbare Nutzleistung beträgt 80% davon. Wieviel PS sind das?

622. Auf einen Rechnungsbetrag von 126 DM wird $2\frac{3}{4}\%$ Rabatt gewährt. Wieviel ist nur zu zahlen?

623. Einkaufspreis 436 DM, Gewinn $6\frac{1}{4}\%$. Wie groß ist der Verkaufspreis?

624. Ein Schiffseigentümer versichert sein Schiff zu 45 200 DM und zahlt der Versicherungsgesellschaft jährlich $2\frac{1}{2}\%$ Prämie. Wieviel DM sind das?

625. Ein Beamter mit einem Jahreseinkommen von 17 200 DM wird in den Ruhestand versetzt und erhält 75% Ruhegehalt. Wieviel Ruhegehalt bekommt er monatlich?

626. An einem Betriebsausflug nahmen 880 Personen teil. Davon waren 25% Jugendliche, die eine Verzehrkarte über 5 DM erhielten. Von den Erwachsenen erhielten 55% Männer eine Verzehrkarte über 10 DM, die Ehefrauen eine über 7,50 DM. Wieviel gab der Betrieb für Verzehrkarten aus?

627. Ein Angestellter mit einem Monatseinkommen von 1 100 DM spart für das Studium seiner Kinder monatlich $4\frac{1}{2}\%$. Wieviel spart er in 18 Jahren?

11.4. Prozentrechnung mit dem vermehrten und verminderten Grundwert

Beispiel:

Der neue Preis einer Ware beträgt 309 DM. Der Aufschlag ist hierbei 3%. Wie hoch war der alte Preis?

Wir stellen fest: der neue Preis entspricht dem vermehrten Grundwert v.G.,
 der Aufschlag entspricht dem Prozentsatz p,
 der alte Preis entspricht dem Grundwert k.

Ausrechnung:

Der um 3 % **vermehrte Grundwert** beträgt 103 % = 309 DM.

Wir schließen auf die Einheit: 1% ist der 103. Teil = $\frac{309}{103}$

Was wir wissen wollen: 100 % (der alte Preis) sind = $\frac{309}{103} \cdot 100$

Hieraus ergibt sich die Formel:

$$k = \frac{\text{vermehrter Grundwert} \cdot 100}{\text{vermehrter Grundwert in \%}}$$

$$k = \frac{309 \cdot 100}{103}$$

$$k = 300 \text{ DM}$$

Dieselbe Überlegung gilt auch für den verminderten Grundwert.

Hierfür lautet die Formel:

$$k = \frac{\text{verminderter Grundwert} \cdot 100}{\text{verminderter Grundwert in \%}}$$

Beispiel:

Der neue Preis (verminderter Grundwert) beträgt 342 DM; der Abschlag (Prozentsatz) beträgt 5%. Wie groß war der alte Preis (Grundwert)?

Ausrechnung:

Der um 5 % **verminderte Grundwert** beträgt 95 % = 342 DM

Wir schließen wieder auf die Einheit: 1% ist der 95. Teil = $\frac{342}{95}$

Was wir wissen wollen: 100 % (der alte Preis) sind = $\frac{342 \cdot 100}{95}$

$$k = \frac{342 \cdot 100}{95}$$

$$k = 360 \text{ DM}$$

Übungsaufgaben:

628. Nach einer Gehaltserhöhung von 6% erhält ein Beamter ein Monatsgehalt von 1272 DM. Wie hoch waren die alten Bezüge?
629. Eine Aktentasche, die bei 35% Gewinnaufschlag mit 60,75 DM verkauft werden sollte, wurde wegen Räumung des Geschäfts zum Einkaufspreis abgegeben. Wieviel betrug der Einkaufspreis?
630. Der Monatsumsatz einer Firma ist im Juni um $7\frac{1}{2}\%$ auf 37625 DM angestiegen. Wie groß war der Umsatz im Mai?
631. Die Werbe- und Reklamekosten einer Firma wurden für das neue Geschäftsjahr um 15% erhöht und betragen nun 3910 DM. Wie hoch waren die Werbekosten des vergangenen Jahres?
632. Nach einer Anzahlung von 52,48 DM bezahlt jemand einen Kühlschrank in 12 Monatsraten von je 35 DM. Der Teilzahlungsaufschlag beträgt 12%. Wieviel hätte der Kühlschrank bei Barzahlung gekostet?
633. Nach Abzug von $2\frac{1}{2}\%$ wurden 331,50 DM auf ein Postscheckkonto überwiesen. Wie hoch war der Rechnungsbetrag?
634. Kaffee verliert beim Rösten 18%. Das Gewicht nach dem Rösten beträgt 295,20 kg. Berechnen Sie das Gewicht des Rohkaffees!
635. Eine Schlafzimmereinrichtung wird um $7\frac{1}{2}\%$ im Preis herabgesetzt und kostet nun 740 DM. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?
636. Der Jahresumsatz einer Firma ist um $12\frac{1}{2}\%$ auf 191520 DM zurückgegangen. Wie groß war der Umsatz des Vorjahres?
637. Auf einer Leitung beträgt der Spannungsverlust 5%. Wie groß ist die Endspannung, wenn die Eingangsspannung 220 V beträgt?
638. Durch eine Widerstandsänderung geht der Strom von 5 A auf 2,4 A zurück. Wie groß ist die Widerstandszunahme in %?
639. Nach einer Verringerung der Stromstärke um 12% werden 3,52 A gemessen. Wie groß war der Strom vorher?

12. Zahlensysteme

12.1. Dezimalzahlensystem

Die natürlichen Zahlen werden im allgemeinen im dezimalen Zahlensystem mit den 10 Dezimalziffern 0, 1, 2...9 geschrieben. Sie dienen als Zahlzeichen für die ersten zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von 0 bis 9. Alle weiteren natürlichen Zahlen werden durch Kombinationen dieser Ziffern dargestellt. Nach 9 folgt 10, dann folgen die Zahlen 11, 12, 13 usw. Für den Wert einer Zahl sind jedoch nicht nur die in ihr vorkommenden Ziffern, sondern auch deren Stellung innerhalb der Zahl von Bedeutung. Die erste Ziffer von rechts gibt die Anzahl der Einer an, die zweite die Anzahl der Zehner, die dritte die der Hunderter, die vierte die der Tausender usw.

So besteht z. B. die Zahl 5302 aus 5 Tausendern, 3 Hunderten, 0 Zehnern und 2 Einern.

Da neben den Ziffern die Stellen einer Zahl entscheidende Bedeutung haben, spricht man von einem Stellenwertsystem, das auf Potenzen mit der Basis 10 begründet ist. Man nennt es auch Zehnersystem oder Dezimalsystem.

Beispiel: $5302 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
 $= 5000 + 300 + 0 + 2$

Die Lage der Dezimalziffern innerhalb der Zahl, kurz als Stelle bezeichnet, geht also entscheidend in die Summenbildung ein. Die einzelnen Dezimalziffern werden hierbei mit Potenzen der Basis 10 multipliziert.

Für das Rechnen mit Dezimalzahlen gibt es Rechenmaschinen, bei denen die zehn Ziffern durch die Zähne eines Zahnrads dargestellt werden. Ein einfaches Beispiel ist auch der Kilometerzähler. Im rechten Fenster erscheinen nacheinander die Zahlen 0, 1, 2...9, die auf einem ringförmigen Metallband aufgedruckt sind. Nach einer vollen Umdrehung erscheint wieder die 0, zugleich jedoch im benachbarten Fenster die 1, weil durch einen Mechanismus das links benachbarte Metallband um einen Schritt weitergedreht wird. In der Mechanik macht es also keine Schwierigkeiten, 10 verschiedene Zustände sicher voneinander zu unterscheiden. Da die mechanischen Rechenmaschinen verhältnismäßig langsam arbeiten und im Laufe der Zeit durch die Abnutzung der Zahnräder leicht Fehler auftreten können, werden in modernen Rechenanlagen zur Darstellung der Zahlen und zum Rechnen mit ihnen elektrische Bauelemente verwendet. Dazu ist allerdings das Dezimalsystem nicht besonders gut geeignet, weil die in Betracht kommenden Bauelemente — wie Schalter, Magnetkern und Transistor — von zweiwärtiger Natur sind. Diese zweiwärtigen (binären) Bauelemente können nicht 10, sondern nur 2 verschiedene Zahlzeichen verarbeiten. Hierfür ist das Dualzahlensystem gut geeignet.

12.2. Dualzahlensystem

Im Gegensatz zum Dezimalzahlensystem mit der Basis 10 besitzt das Dualzahlensystem die Basis 2.

Es werden deshalb nicht 10, sondern nur 2 Ziffern, die Dualziffern 0 und 1, für die Darstellung von Dualzahlen verwendet. Sonst erfolgt der Aufbau einer Dualzahl genauso wie der Aufbau einer Dezimalzahl. Wie also bei der Dezimalzahl die Zehnerpotenzen von links nach rechts fallend mit den einzelnen Dezimalziffern multipliziert werden,

$$\text{z. B. } 253 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0,$$

so werden bei einer Dualzahl die Zweierpotenzen von links nach rechts fallend mit den Dualziffern 0 oder 1 multipliziert.

Beispiel: $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
 $= 4 + 2 + 0$
 also $6 \hat{=} 110$ (Dualzahl)

In dem vor- und nebenstehenden Beispiel handelt es sich um eine dreistellige Dualzahl „110“. Wenn die drei Potenzen 2^2 , 2^1 und 2^0 der Reihe nach mit den einzelnen Dualziffern multipliziert werden, so erhalten wir bei der Summenbildung die Dezimalzahl „6“.

Dualzahl: 110

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^2 &= 1 \cdot 4 = 4 \\ + 1 \cdot 2^1 &= 1 \cdot 2 = 2 \\ + 0 \cdot 2^0 &= 0 \cdot 1 = 0 \\ \hline \text{Dezimalzahl} &= 6 \end{aligned}$$

In der nebenstehenden Tabelle sind für einige Dezimalzahlen die zugehörigen Dualzahlen angegeben.

Dezimalzahl	Dualzahl $2^3 \ 2^2 \ 2^1 \ 2^0$
0	0
1	1
2	1 0
3	1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0

Die Dualziffer „1“ gibt das Vorhandensein und die Ziffer „0“ das Nichtvorhandensein der betreffenden Zweierpotenz an.

Wenn wir mehrere gleichwertige Dualzahlen und Dezimalzahlen miteinander vergleichen, so können wir feststellen, daß im Durchschnitt die Länge der Dualzahl der 3,3fachen Länge der zugehörigen Dezimalzahl entspricht. Dies liegt natürlich daran, daß die Dezimalzahl aus 10 Zahlzeichen (1—9) und die Dualzahl aus 2 Zahlzeichen (0 und 1) besteht.

12.3. Umwandlung der beiden Zahlensysteme

Die Zahlen werden in der Regel im Dezimalsystem dargestellt. Zur Verarbeitung in den elektronischen Rechenanlagen ist jedoch eine Umwandlung der Dezimalzahlen in den **Dualcode** erforderlich. Da das Ergebnis in der Rechenanlage als Dualzahl ermittelt wird, muß es anschließend wieder in eine Dezimalzahl zurückverwandelt werden. Die Umwandlung der Zahlen nennt man auch **Codierung**, bei der Rückverwandlung spricht man von **Decodierung**.

12.3.1. Umwandlung von Dualzahlen in Dezimalzahlen

Zur Umwandlung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl wird jede Dualziffer in das Dezimalsystem übertragen, die so entstehenden Dezimalzahlen werden addiert.

Die Dualziffern 0 oder 1 geben jeweils an, ob die zu ihrer Stelle gehörende Zweierpotenz zu berücksichtigen ist oder nicht.

Ist die Dualzahl z. B. siebenstellig 1010011, so ist die erste Dualziffer (von links beginnend) mit der zu ihr gehörenden Zweierpotenz 2^6 zu multiplizieren, die nächste mit 2^5 usw. Die Ergebnisse werden addiert und ergeben die Dezimalzahl.

Beispiele: a) Dualzahl: 1010011

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^6 &= 1 \cdot 64 = 64 \\ + 0 \cdot 2^5 &= 0 \cdot 32 = 0 \\ + 1 \cdot 2^4 &= 1 \cdot 16 = 16 \\ + 0 \cdot 2^3 &= 0 \cdot 8 = 0 \\ + 0 \cdot 2^2 &= 0 \cdot 4 = 0 \\ + 1 \cdot 2^1 &= 1 \cdot 2 = 2 \\ + 1 \cdot 2^0 &= 1 \cdot 1 = 1 \\ \hline \text{Dezimalzahl: } &83 \end{aligned}$$

b) Dualzahl: 101100110

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^8 &= 1 \cdot 256 = 256 \\ + 0 \cdot 2^7 &= 0 \cdot 128 = 0 \\ + 1 \cdot 2^6 &= 1 \cdot 64 = 64 \\ + 1 \cdot 2^5 &= 1 \cdot 32 = 32 \\ + 0 \cdot 2^4 &= 0 \cdot 16 = 0 \\ + 0 \cdot 2^3 &= 0 \cdot 8 = 0 \\ + 1 \cdot 2^2 &= 1 \cdot 4 = 4 \\ + 1 \cdot 2^1 &= 1 \cdot 2 = 2 \\ + 0 \cdot 2^0 &= 0 \cdot 1 = 0 \\ \hline \text{Dezimalzahl: } &358 \end{aligned}$$

12.3.2. Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen

Zur Umwandlung einer Dezimalzahl in eine **Dualzahl** wird zunächst die größte Zweierpotenz gesucht, die in der Dualzahl enthalten ist.

$$\begin{aligned} \text{In der Dezimalzahl 13 ist es } 2^3 &= 8. & 13 &= 1 \cdot 2^3 + 5 \\ \text{Für den Rest 5 wird festgestellt, ob} & & &= 8 + 5 \\ \text{die nächstniedrigere Zweierpotenz} & & 13 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \\ 2^2 &= 4 \text{ darin enthalten ist. Das ist} & &= 8 + 4 + 1 \\ \text{hier der Fall. Es bleibt ein Rest von} & & &= 8 + 4 + 0 + 1 \\ 1, \text{ der wieder daraufhin überprüft} & & 13 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \\ \text{wird, ob die nächstniedrigere} & & &= 8 + 4 + 0 + 1 \\ \text{Zweierpotenz } 2^1 &= 2 \text{ darin enthal-} & 13 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ \text{ten ist. Das ist nicht der Fall, folg-} & & &= 8 + 4 + 0 + 1 \\ \text{lich darf sie — mit Hilfe der Dual-} & & & \\ \text{ziffer 0 — keine Berücksichtigung} & & 13 &\hat{=} \boxed{1101} \text{ Dualzahl} \\ \text{finden. Dagegen geht der Rest 1} & & & \\ \text{in der nächstniedrigeren Zweier-} & & & \\ \text{potenz } 2^0 &= 1 \text{ auf.} & & \end{aligned}$$

Diese Rechnung ist umständlich, wir wollen deshalb folgendes Verfahren anwenden.

Die Dualzahl wird durch eine fortgesetzte Division durch die Basis 2 ermittelt. Bei jeder Division entsteht ein Rest, der entweder 0 oder 1 sein kann. Die Reste ergeben dann, von unten nach oben gelesen, die gesuchte Dualzahl.

Beispiele: a) Dezimalzahl: 75

$$\begin{array}{ll} 75 : 2 = 37 & \text{Rest 1} \\ 37 : 2 = 18 & \text{Rest 1} \\ 18 : 2 = 9 & \text{Rest 0} \\ 9 : 2 = 4 & \text{Rest 1} \\ 4 : 2 = 2 & \text{Rest 0} \\ 2 : 2 = 1 & \text{Rest 0} \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest 1} \end{array}$$

Dualzahl: 1001011

b) Dezimalzahl: 121

$$\begin{array}{ll} 121 : 2 = 60 & \text{Rest 1} \\ 60 : 2 = 30 & \text{Rest 0} \\ 30 : 2 = 15 & \text{Rest 0} \\ 15 : 2 = 7 & \text{Rest 1} \\ 7 : 2 = 3 & \text{Rest 1} \\ 3 : 2 = 1 & \text{Rest 1} \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest 1} \end{array}$$

Dualzahl: 1111001

12.4. Addition von Dualzahlen

Die Addition von Dualzahlen entspricht weitgehend der Addition von Dezimalzahlen. Beide Systeme unterscheiden sich lediglich in der **Basis** und in der **Anzahl der verwendeten Ziffern**. Wie beim Rechnen im Dezimalsystem wird die Addition zweier Dualzahlen Stelle um Stelle von rechts nach links vorgenommen.

Dabei gelten für die Addition von Dualzahlen folgende Regeln.

2 Dualziffern:	$0 + 0 = 0$	2 Dualziffern	$0 + 0 + 0 = 0$
	$0 + 1 = 1$	einschl. Übertrag:	$0 + 0 + 1 = 1$
	$1 + 0 = 1$		$0 + 1 + 0 = 1$
	$1 + 1 = 10$		$0 + 1 + 1 = 10$
			$1 + 0 + 0 = 1$
			$1 + 0 + 1 = 10$
			$1 + 1 + 0 = 10$
			$1 + 1 + 1 = 11$

Wenn sich bei der Addition eine **zweistellige** Dualzahl als Summe ergibt, z. B. $1 + 1 = 10$, so ist die rechte Ziffer als **Summenergebnis** und die linke als **Übertrag** in der nächsthöheren Stelle zu berücksichtigen.

Beispiele: a)	Dualzahl	→	Dezimalzahl	b)	Dualzahl	→	Dezimalzahl
	1100		12		100010		34
	+ 1110		14		+ 11001		25
Überträge:	1						
	11010		26		111011		59
c)	111011		59	d)	101110		46
	+ 101100		44		+ 11011		27
Überträge:	11		1		+ 1111		1
	1100111		103		1001001		73

Übungsaufgaben:

Umwandlung in Dezimalzahlen:

640. a) 1011 b) 10101 c) 100101 d) 1101101 e) 1101101010

Umwandlung in Dualzahlen:

641. a) 23 b) 37 c) 86 d) 124 e) 276 f) 517

Addition von Dualzahlen:

642. a) 10101 + 1010 b) 11010 + 1101 c) 110101 + 101110
d) 10111000 + 1111011 e) 1100111001 + 1011101111

13. Rechenstab

13.1. Allgemeines

Zahlenrechnungen können schriftlich, mit dem Rechenstab oder mit Rechentabellen ausgeführt werden. Welche Rechenart man für die Ausrechnung eines Ergebnisses wählt, hängt von der erforderlichen Rechengenauigkeit ab; sie muß dem jeweiligen Zweck entsprechen. In den meisten Fällen genügt der Rechenstab, der eine dreiziffrige Rechengenauigkeit gewährleistet. Reicht diese Rechengenauigkeit nicht aus, dann muß das Ergebnis schriftlich ausgerechnet oder den Rechentabellen entnommen werden.

Sind die in die Zahlenrechnung eingehenden Größen dreiziffrig, dann wäre es sinnlos, auf 4, 5 oder gar 10 Stellen „genau“ zu rechnen, weil das Ergebnis niemals genauer sein kann als die Werte, die für die Ausrechnung verwendet werden. Die letzteren Ziffern des „zu genau“ ausgerechneten Ergebnisses wären nicht nur überflüssig, sondern sogar falsch.

Sind die in die Zahlenrechnung eingehenden Größen mehr als dreiziffrig und wird eine höhere Rechengenauigkeit gefordert, dann reicht der Rechenstab für die Ausrechnung nicht mehr aus; vielmehr muß das Ergebnis dann schriftlich ausgerechnet oder anhand von Rechentabellen ermittelt werden.

1. Beispiel:

Der Querschnitt einer Kupferleitung ergibt sich aus folgender Zahlenrechnung:

$$R = \frac{2 \cdot 350 \cdot 0,0178}{0,283}$$

Die Zahlen 0,0178 und 0,283 sind dreiziffrig; für die Ausrechnung genügt der Rechenstab. Das Ergebnis lautet nicht $R = 44,0282$ Ohm, sondern $R = 44,0$ Ohm (letzte Ziffer gerundet).

2. Beispiel:

Die Meßgenauigkeit einer Meßschaltung ergibt sich aus folgender Zahlenrechnung:

$$p_m = \frac{2000 \cdot 100}{2001}$$

Die Zahl 2001 ist vierziffrig; für die Ausrechnung genügt der Rechenstab nicht mehr; vielmehr muß die Ausrechnung schriftlich vorgenommen werden. Da die für die Rechnung verwendete Zahl 2001 vierziffrig ist, muß auch das Ergebnis vierziffrig sein; es lautet:

$$p_m = 99,95 \text{ v.H.}$$

3. Beispiel:

Der Heißwiderstand eines Kaltleiters ergibt sich aus folgender Zahlenrechnung:

$$R_2 = 330 \cdot 1,052$$

Die Zahl 1,052 ist vierziffrig, so daß die Rechengenauigkeit des Rechenstabs nicht mehr ausreicht. Erlaubt aber die Rechengenauigkeit des Ergebnisses eine Rundung dieser Zahl von 1,052 auf 1,05, dann kann der Rechenschieber trotzdem benutzt werden:

$$R_2 = 330 \cdot 1,05 = 346,5 \text{ Ohm, gerundet auf } R_2 = 347 \text{ Ohm.}$$

In dem unteren Zahlenbereich (Bereich 1 bis 2) können drei Stellen direkt abgelesen, die vierte Ziffer muß geschätzt werden, z. B.

$$R_2 = 330 \cdot 1,052 = 347 \text{ Ohm}$$

Merke:

Die Benutzung des Rechenstabs ergibt sich aus der jeweilig erforderlichen Rechengenauigkeit für das Rechenergebnis. Ist die geforderte Rechengenauigkeit mehr als dreiziffrig, dann reicht die Einstell- und Ablesegenauigkeit des Rechenstabs nicht mehr aus und die Ausrechnung muß erforderlichenfalls schriftlich vorgenommen werden.

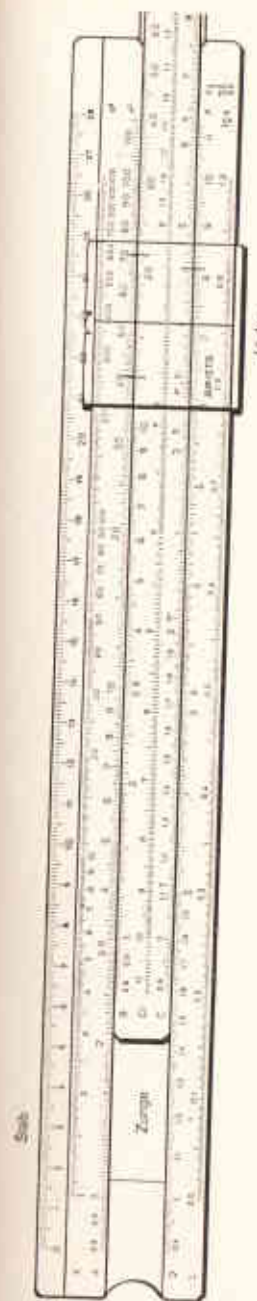


Abb. 13.1 — Rechenstab

Jeder Rechenstab besteht aus einem festen Stab und einer daran entlanggleitenden Zunge. Zur Erleichterung des Ablesens und des Einstellens von Zahlenwerten dient ein durchsichtiger Läufer mit dem Läuferstrich. Wir behandeln hier nur die grundsätzlichen Rechenarten: Malnehmen, Teilen, Quadratwurzelziehen und Quadrieren. Hierfür verwenden wir die Zahlenreihen A, B, C und D. Darüber hinaus weisen noch viele Rechenstäbe die Zahlenreihen K für Kubikzahlen und -wurzeln sowie CI für Reziprokrechnungen (Kehrwertrechnungen) auf. Ferner sind manche Rechenstäbe mit Zahlenreihen für Winkelfunktionswerte und logarithmische Werte ausgestattet.

Das praktische Rechnen des Fernmeldetechnikers besteht vorwiegend aus einer geeigneten Verbindung von Stab- und Tabellenrechnen.

Jede Zahlenrechnung beginnt mit einer Überschlagsrechnung.

Beispiele:

$$31,4 \cdot 192 \approx 30 \cdot 200 \approx 6000$$

$$\frac{3,14}{192} \approx \frac{3}{200} \approx \frac{3}{2} \cdot 10^{-2} \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \approx 0,015$$

Nach der Überschlagsrechnung wird der Rechenstab auf die für die Ausrechnung verwendeten Zahlen eingestellt.

Beim Einstellen von Zahlenwerten mit Hilfe der Zunge oder des Läuferstrichs zählt man nicht 0,015 (Null-Komma-Null-Eins-Fünf), sondern 1-5 (Eins-Fünf). Die Stellenzahl des Ergebnisses wird danach durch Überschlagsrechnung ermittelt.

Beim Stabrechnen soll die Zunge möglichst wenig bewegt werden. Zu diesem Zweck bedient man sich weitgehend der Reziprokrechnung mit Hilfe der Zahlenreihe CI in der Zungenmitte.

13.2. Malnehmen

Malgenommen wird mit den Zahlenreihen C und D. Man nimmt zwei Zahlenwerte miteinander mal, indem man die Zahlenwertstrecken des Stabs und der Zunge zusammenzählt.

Beispiel: $1,8 \cdot 4,0 = 7,2$

Einstellung:

1. Die Zunge, Zahlenreihe C, Ziffer 1, wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Faktor 1,8, eingestellt.
2. Der Läuferstrich wird auf die Zunge, Zahlenreihe C, Faktor 4,0, eingestellt.
3. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis 7,2.

13.2.1. Malnehmen — reziprok

Für das reziproke Malnehmen verwendet man die Zahlenreihen D und CI. Man nimmt zwei Zahlenwerte miteinander reziprok mal, indem man die Zahlenwertstrecken des Stabs und der Zunge zusammenzählt.

Beispiel: $1,8 \cdot 4 = 7,2$

Einstellung:

1. Der Läuferstrich wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Faktor 1,8, eingestellt.
2. Die Zunge, Zahlenreihe CI, Faktor 4, wird auf den eingestellten Läuferstrich eingestellt.
3. Der Läuferstrich wird auf die Zunge, Zahlenreihe CI, Ziffer 1, eingestellt.
4. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis 7,2.

Abb. 13.2 — Malnehmen

13.3. Teilen

Geteilt wird mit den Zahlenreihen C und D. Man teilt einen Zahlenwert durch einen anderen Zahlenwert, indem man die Zahlenwertstrecke der Zunge von der des Stabs abzieht.

Beispiel: $7,2 : 4 = 1,8$

Einstellung:

1. Der Läuferstrich wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Dividend 7,2, eingestellt.
2. Die Zunge, Zahlenreihe C, Divisor 4,0, wird auf den Läuferstrich eingestellt.
3. Der Läuferstrich wird auf die Zunge, Zahlenreihe C, Ziffer 1, eingestellt.
4. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis 1,8.

13.3.1. Teilen — reziprok

Für das reziproke Teilen verwendet man die Zahlenreihen D und CI. Man teilt einen Zahlenwert durch einen anderen, indem man die Zahlenwertstrecke der Zunge von der des Stabs abzieht.

Beispiel: $7,2 : 4 = 1,8$

Einstellung:

1. Der Läuferstrich wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Dividend 7,2, eingestellt.
2. Die Zunge, Zahlenreihe CI, Ziffer 1, wird auf den eingestellten Läuferstrich eingestellt.
3. Der Läuferstrich wird auf die Zunge, Zahlenreihe CI, Divisor 4,0, verschoben.
4. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis 1,8.

Abb. 13.3 — Teilen

13.4. Quadratwurzeln ziehen

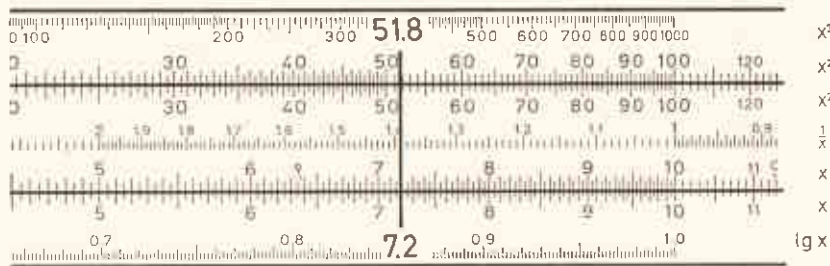


Abb. 13.4 — Quadratwurzeln ziehen

Quadratwurzeln werden gezogen mit den Zahlenreihen A und D.

Beispiel: $\sqrt{51,8} = 7,2$

Einstellung:

1. Der Läuferstrich wird auf den Stab, Zahlenreihe A, Radiant 51,8, eingestellt.
2. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis 7,2.

13.5. Quadrieren



Abb. 13.5 — Quadrieren

Quadriert wird mit den Zahlenreihen D und A.

Beispiel: $1,8^2 = 3,24$

Einstellung:

1. Der Läuferstrich wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Basis 1,8, eingestellt.
2. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe A; Ergebnis 3,24.

Weitere Beispiele zum Abschnitt 13:

1. Beispiel:

$$R = \frac{240 \cdot 0,018}{16} \quad \text{Überschlag: } \frac{2,4 \cdot 1,8}{16} \approx 0,25$$

Einstellung:

1. Der Läuferstrich wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Faktor 240, eingestellt.
2. Die Zunge, Zahlenreihe CI, Faktor 0,018, wird auf den eingestellten Läuferstrich eingestellt.
3. Der Läuferstrich wird auf die Zunge, Zahlenreihe CI, Divisor 16, eingestellt.
4. Ablesen über Läuferstrich auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis 0,27.

2. Beispiel:

$$L = \frac{1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 1200^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-2}}$$

Eine dreiziffrige Rechengenauigkeit ist ausreichend; wir runden die Zahl 1,257 auf 1,26.

$$L = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1200^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-2}} \quad 1200^2 = 1,44 \cdot 10^6$$

$$L = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1,44 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-2}} \quad \text{Zehnerpotenzen ordnen!}$$

$$L = \frac{1,26 \cdot 1,44 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{6}$$

$$\text{Überschlag: } \frac{1,25 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{6} \approx \frac{7,5}{6} \cdot 10^{-2} \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$$

Einstellung:

1. Die Zunge, Zahlenreihe C, Ziffer 1, wird auf den Stab, Zahlenreihe D, Faktor 1,26, eingestellt.
2. Der Läuferstrich wird auf die Zunge, Zahlenreihe C, Faktor 1,44, eingestellt.
3. Die Zunge, Zahlenreihe CI, Faktor 4, wird auf den eingestellten Läuferstrich eingestellt.
4. Der Läuferstrich wird auf die Zahlenreihe CI, Divisor 6, eingestellt.
5. Ablesen auf dem Stab, Zahlenreihe D; Ergebnis $1,21 \cdot 10^{-2} \text{ H} = 12,1 \text{ mH}$.

Übungsaufgaben:

643. a) $28,2 \cdot 6,78$ b) $2450 \cdot 0,0075$ c) $0,0012 \cdot 48,6$

644. a) $28,2 : 6,78$ b) $2450 : 0,0075$ c) $0,0012 : 48,6$

645. a) $\frac{26,7 \cdot 0,81}{4,36}$ b) $\frac{2980 \cdot 184}{0,051}$ c) $\frac{0,0316 \cdot 64,2}{0,36 \cdot 185}$

646. a) $\sqrt{47,6}$ b) $\sqrt{25900}$ c) $\sqrt{0,00462}$

647. a) $28,2^2$ b) 25900^2 c) $0,00216^2$

648. a) $\frac{12^2 \cdot 3,14}{4}$ b) $\frac{0,6^2 \cdot 3,14}{4}$ c) $\frac{0,08^2 \cdot 3,14}{4}$

649. $F = \frac{0,303^2 \cdot 1,11 \cdot 10^{-4}}{1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 2}$

650. $I_s = \frac{1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 2400^2 \cdot 2,56 \cdot 10^{-4}}{6,32 \cdot 10^{-2}}$

651. $C = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4,62 \cdot 258 \cdot 10^{-4}}{0,35 \cdot 10^{-3}}$

Grundkenntnisse der Physik

14. Begriffe und Einheiten

In der Technik werden physikalische und chemische Vorgänge unterschieden. Von einem **physikalischen Vorgang** spricht man, wenn bei einem technischen Vorgang z. B. die Form, die Lage oder der Zustand eines Stoffes verändert wird.

Beispiele:

- Zerkleinern eines Stoffes
- Niederdrücken einer Türklinke
- Wasser kann fest, flüssig oder gasförmig auftreten

Wenn bei einem technischen Vorgang ein Stoff in einen anderen Stoff oder in mehrere andere Stoffe umgewandelt wird, so spricht man von einem **chemischen Vorgang**.

Beispiele:

- Das Rosten von Eisen
- Wasser kann in Wasserstoff und Sauerstoff zersetzt werden

Alle physikalischen oder chemischen Vorgänge kann man auf physikalische oder chemische Gesetze zurückführen. Diese Gesetze lassen sich am kürzesten durch mathematische **Formeln** ausdrücken und als **Gleichungen** schreiben.

Die physikalischen Größen (z. B. die Fläche, die Kraft, die Geschwindigkeit usw.) werden in den Formeln (Gleichungen) durch **Formelzeichen** angegeben.

Beispiel für eine Formel:

$$\begin{array}{lcl} \text{Rechteckfläche} & = & \text{Länge} \cdot \text{Breite} \\ A & = & a \cdot b \end{array}$$

Für die physikalischen Größen sind **Einheiten** (Maßeinheiten, Maßgrößen, Dimensionen) festgelegt, die ebenfalls durch Kurzzeichen angegeben werden.

Beispiel:

m = Kurzzeichen für das Meter (Einheit der Länge)

14.1. Die Grundeinheiten des Internationalen Einheitensystems

Seit langem bemühen sich internationale Organisationen, ein gemeinsames Einheitensystem zu schaffen. Von der Generalkonferenz für Maß und Gewicht wurde deshalb im Jahre 1960 ein Einheitensystem beschlossen, das den Namen „Système International d'Unités“ (SI) erhielt. Die Bundesrepublik ist als Mitglied der Meterkonvention verpflichtet, ihre Gesetze den Beschlüssen der Generalkonferenz für Maß und Gewicht anzupassen. Aus diesem Grunde wurde ein neues Einheitengesetz und eine ergänzende Rechtsverordnung geschaffen; diese sind am 5. 7. 1970 in Kraft getreten.

Im Gesetz werden die sechs Basiseinheiten Meter [m], Kilogramm [kg], Sekunde [s], Ampere [A], Kelvin [K] und Candela [cd] genannt. In der folgenden Aufstellung sind die nach der Ausführungsverordnung uneingeschränkt verwendbaren Einheiten auszugsweise aufgeführt.

Die Ausführungsverordnung enthält außerdem eine Liste von Einheiten, die nur noch bis zum 31. 12. 1977 verwendet werden dürfen. Dazu gehören u. a.:

Kilopond	1 kp	= 9,80665 N
Kalorie	1 cal	= 4,1868 J
Pferdestärke	1 PS	= 735,49875 W

Verein- fachte Großen- Gleichung	Formel- zeichen	Größe Bedeutung	Name Einheits- zeichen	Gesetzliche SI-Einheit Definition	Weitere zulässige Einheiten und Definitionen
l	l	Länge	Meter m	Basis- einheit	
$A = l^2$	A	Fläche	Quadratmeter (Meterquadrat) m ²		
$V = l^3$	V	Volumen	Kubikmeter m ³		Liter 1 l = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³
$\varphi = \frac{b}{r}$	φ	Ebenes Winkel	Radian rad		Rechter 1 L = $\frac{\pi}{2}$ rad Grad 1° = $\frac{1 L}{90} = \frac{\pi}{180}$ rad Minute 1' = $\frac{1^\circ}{60} = \frac{\pi}{10800}$ rad Sekunde 1'' = $\frac{1'}{60} = \frac{\pi}{648000}$ rad Gon 1 gon = 10 ⁻² L = $\frac{\pi}{200}$ rad Vollwinkel = 2π rad

1) 1 Radian ist gleich dem ebenen Winkel, der als Zentrivinkel eines Kreises vom Halbmesser 1 m aus dem Kreis einen Bogen von der Länge 1 m ausschneidet.

Verein- fachte Größen- Gleichung	Formel- zeichen	Größe Bedeutung	Gesetzliche SI-Einheit		Weitere zulässige Einheiten und Definitionen
	t	Zeit (Zeitspanne)	Sekunde	Basis- einheit	Minute 1 min = 60 s Stunde 1 h = 60 min = 3600 s Tag 1 d = 24 h = 86400 s
$f = \frac{1}{T}$	f	Frequenz	Hertz	Hz $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$	
$v = \frac{l}{t}$	v	Geschwindigkeit	Meter durch Sekunde	m/s	Längeneinheit/Zeiteinheit (z. B. cm/min)
$a = \frac{v}{t}$	a	Beschleunigung	Meter durch Sekundenquadrat	m/s ²	Längeneinheit/(Zeiteinheit) ²
$\omega = \frac{\varphi}{t}$	ω	Winkelgeschwindigkeit		rad/s	Winkелеinheit/Zeiteinheit
$\alpha = \frac{\omega}{t}$	α	Winkelbeschleunigung		rad/s ²	Winkелеinheit/(Zeiteinheit) ²
m	m	Masse	Kilogramm	kg Basis- einheit	Gramm 1 g = 10 ⁻³ kg Tonne 1 t = 1 Mg
$\rho = \frac{m}{V}$	ρ	Dichte		kg/m ³	Masseneinheit/Volumeneinheit
$F = m \cdot a$	F	Kraft	Newton	N 1 N = 1 kgm/s ²	Masseneinheit · Beschleunigungs- einheit

Verein- fachte Größen- Gleichung	Formel- zeichen	Größe Bedeutung	Gesetzliche SI-Einheit		Weitere zulässige Einheiten und Definitionen
$p = \frac{F}{A}$	p	Druck	Pascal	Pa 1 Pa = 1 N/m ²	Krafteinheit/Flächeneinheit 1 bar = 10 ⁵ Pa
$W = F \cdot l$	W	Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J 1 J = 1 Nm = 1 Ws	Krafteinheit · Längeneinheit Leistungseinheit · Zeiteinheit
$P = \frac{W}{t}$	P	Leistung ¹⁾ , Energiestrom, Wärmestrom	Watt	W 1 W = 1 J/s	Energieeinheit/Zeiteinheit
$U = \frac{P}{I} = \frac{W}{Q}$	U	Elektrische Stromstärke	Ampere	A Basis-einheit	
$R = \frac{U}{I}$	R	Elektrische Spannung, elektr. Potentialdifferenz	Volt	V 1 V = 1 W/A	
$G = \frac{I}{R}$	G	Elektrischer Widerstand	Ohm	Ω 1 Ω = 1 V/A	
$\bar{Q} = I \cdot t$	$\bar{Q}$	Elektrischer Leitwert	Siemens	S 1 S = 1 Ω^{-1}	
$Q = I \cdot t$	Q	Elektrizitätsmenge, elektr. Ladung	Coulomb	C 1 C = 1 As	Elektr. Stromstärkeeinheit · Zeiteinheit
$C = \frac{Q}{U}$	C	Elektrische Kapazität	Farad	F 1 F = 1 C/V	

¹⁾ Bei der Angabe von elektr. Scheinleistung darf das Watt auch als Voltampere (Einheitenzeichen VA) bezeichnet werden. Bei der Angabe von elektr. Blindleistung darf das Watt auch als Var (Einheitenzeichen var) bezeichnet werden.

Verein- fachte Größen- Gleichung	Formel- zeichen	Größe Bedeutung	Name	Gesetzliche SI-Einheit Einheit- zeichen	Weitere zulässige Einheiten und Definitionen
$D = \frac{Q}{A}$	D	Elektrische Flußdichte (elektr. Verschiebung)		C/m^2	Elektr. Ladungseinheit/Flächen- einheit
$E = \frac{U}{l}$	E	Elektrische Feldstärke		V/m	Elektr. Spannungseinheit/Längen- einheit
$\Phi = U_{ind} \cdot I$	Φ	Magnetischer Fluß	Weber	Wb $1 Wb = 1 Vs$	Voltsekunde Vs
$B = \frac{\Phi}{A}$	B	Magnetische Flußdichte, Induktion	Tesla	T $1 T = 1 Wb/m^2$	Magnetische Flußeinheit/Flächen- einheit
$L = \frac{\Phi}{I}$	L	Elektromagn. Induktivität	Henry	H $1 H = 1 Wb/A$	Elektr. Stromstärkeinheit/Längen- einheit
$H = \frac{I}{l}$	H	Magnetische Feldstärke		A/m	
T, θ	T, θ	Thermodynamische Temperatur	Kelvin	K Basiseinheit	
t, ϑ	t, ϑ	Celsius-Temperatur	Kelvin	K	Grad Celsius °C; °C ist gleich Einheit K Bei °C keine Vorsätze verwenden
I_v	I_v	Lichtstärke	Candela	cd	
L_v	L_v	Leuchtdichte		cd/m^2	Lichtstärkeinheit/Flächeneinheit
Φ_v	Φ_v	Lichtstrom	Lumen	lm $1 lm = 1 cd \cdot sr$	
E_v	E_v	Beleuchtungsstärke	Lux	lx $1 lx = 1 lm/m^2$	

Die wichtigsten physikalischen Vorgänge können auf drei Grundgrößen, für die international anerkannte Grundeinheiten festgelegt worden sind, zurückgeführt werden:

1. Grundgröße: Länge
2. Grundgröße: Zeit
3. Grundgröße: Masse (Kraft)

Von diesen drei Grundgrößen werden alle anderen Größen abgeleitet, indem sie durch **Multiplikation** von Grundgrößen (Arbeit = Kraft · Weg) oder durch die **Division** von Grundgrößen (Geschwindigkeit = Weg : Zeit) dargestellt werden.

14.2. Länge

Die Länge ist die Entfernung zwischen zwei Punkten.

Formelzeichen für die Länge: l (a, b, c)

Die Längeneinheit ist das Meter (abgekürzt m). Bei der internationalen Einführung des Meters wurde von dem 40 000 000. Teil des Erdumfangs, bzw. von dem 10 000 000. Teil des Meridianquadranten ausgegangen. Im internationalen Büro für Maße und Gewichte, im Pavillon de Breteuil in Sèvres bei Paris, wird ein Platin-Iridium-Stab, dessen Querschnitt in Abb. 14.1 dargestellt ist, als **Urmeter** aufbewahrt.

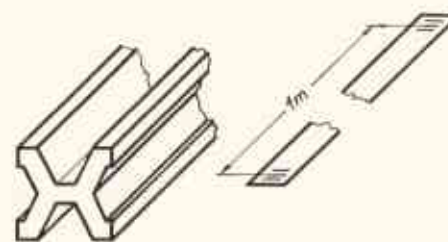


Abb. 14.1 — Urmeter

Da bei der Anfertigung von Nachbildungen Ungenauigkeiten nicht auszuschließen sind, werden seit 1960 bereits Lichtwellen der modernen Meßtechnik als Meßgrundlage verwendet.

Das Meter ist deshalb als das 1650763,73fache der Wellenlänge des leuchtenden Kryptonisotops 86 festgelegt worden. Das Vergleichen mit dem in Paris aufbewahrten Urmeter ist nicht mehr erforderlich, weil mit Hilfe von techn. Einrichtungen Kryptonlicht als Meßgrundlage überall erzeugt werden kann.

Neben dem Meter [m] sind in der Technik folgende vom Meter abgeleitete Längeneinheiten üblich:

1 Kilometer [km]	= 10^3 m
1 Zentimeter [cm]	= 10^{-2} m
1 Millimeter [mm]	= 10^{-3} m
1 Mikron [μ]	= 10^{-6} m
1 Millimikron [$m\mu$]	= 10^{-9} m
1 Mikromikron [$\mu\mu$]	= 10^{-12} m

Meßgeräte:

Bandmaß, Maßstab, Schieblehre, Meßschraube.

Das Lichtjahr ist eine Längeneinheit der Astronomie; die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt, entspricht $0,94608 \cdot 10^{13}$ km.

Aus der Längeneinheit werden die Flächeneinheit und die Einheit des Raumes (Volumeneinheit) abgeleitet. Flächeneinheit ist das Quadratmeter (m^2), ein Quadrat, dessen Seitenlänge 1 m beträgt. Volumeneinheit ist das Kubikmeter (m^3), ein Würfel, dessen Kantenlänge 1 m beträgt.

14.3. Zeit

Jeder Vorgang im praktischen Leben, auch in der Physik, besteht aus einer Folge von Ereignissen. Jedem Ereignis ist dabei eine bestimmte Zeit zugeordnet; die einzelnen Ereignisse können gleichzeitig stattfinden, sie können aber auch zeitlich aufeinanderfolgen. Der Zeitbegriff und die Zeitmessung spielen in den Beobachtungsreihen der Naturlehre eine wichtige Rolle.

Die Zeiteinheit ist die Sekunde s.

Für die exakte physikalische Definition der Zeiteinheit wird die 9192631770-fache Periodendauer der Strahlung von Cäsium-133-Atomen benutzt.

Außerdem ist sie der 86400ste Teil des mittleren Sonnentages.

Ein Tag ist die Dauer einer vollen Umdrehung der Erde um die Achse.

1 Tag = 24 Stunden = 1440 Minuten = 86400 Sekunden
1 Tag = 24 h = 1440 min = 86400 s

Die Umdrehung der Erde wird ermittelt durch die Beobachtung der Stellung der Erde zur Sonne, und zwar wird der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Kulminationen¹⁾ der Sonne gemessen (wahrer Sonnentag).

¹⁾ Kulmination = Durchgang eines Gestirns durch den Meridian; hierbei erreicht das Gestirn seine größte Höhe über dem Horizont. Die „obere Kulmination“ der Sonne findet um 12,00 Uhr, die „untere Kulmination“ um Mitternacht statt.

Jeder Längengrad der Erde hat seine eigene Zeit (Ortszeit). Um im praktischen Leben die Zeitbestimmung zu vereinfachen, ist die Erde in 15° breite Zonen eingeteilt worden, in denen jeweils die gleiche Zeit gilt (Zonenzeit). Diese Zonen haben einen Zeitunterschied von jeweils einer Stunde. Für Deutschland und die übrigen mitteleuropäischen Länder gilt die mitteleuropäische Zeit (MEZ), d. h. die Ortszeit des 15° Längengrades östlich von Greenwich. Die Ortszeit von Greenwich ist als Weltzeit festgelegt worden.

Meßgeräte:

Uhr, Pendeluhr, Chronometer (Zeitmesser).

14.4. Masse und Kraft (Gewichtskraft)

Unter der Masse eines begrenzten Körpers verstehen wir eine bestimmte Stoffmenge. Diese Stoffmenge ist eine Summe vieler Teilchen (z. B. Moleküle, Atome, Ionen). Die Maßeinheit der Masse, das Kilogramm (kg), ist durch das Urmaß der Masse, einen Platin-Iridium-Zylinder von 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser, festgelegt. Ebenso wie das Urmaß des Meters wird es in Paris aufbewahrt. Es entspricht dem Gewicht von 1 l Wasser bei 4°C . Gleichartige Urmaße sind an alle Mitgliedsstaaten der Meterkonvention verteilt worden.

Durch die Anziehungskraft der Erde wird von jedem Körper auf seine Unterlage eine Kraft (ein Druck) ausgeübt. Die auf die Unterlage wirkende Kraft heißt auch Gewicht. Die Anziehungskraft der Erde ist nicht überall gleich groß. Sie nimmt mit zunehmender Entfernung vom Erdmittelpunkt ab; in 6370 km Höhe ist sie auf $\frac{1}{4}$ gesunken. Im freien Weltraum würde ein Körper zwar sein Gewicht — infolge fehlender Anziehungskraft — vollkommen verlieren, doch bleibt seine Masse als die Menge der Materie unverändert. Der Mond übt in seinem Anziehungsbereich auch eine Anziehungskraft auf alle Körper aus, die jedoch nur den 6. Teil der Erdanziehungskraft beträgt.

Ein Raumfahrer kann also auf dem Mond 6mal so hoch springen wie auf der Erde. Aus diesen Überlegungen ergibt sich:

Das Gewicht ändert sich mit dem Ort.

Anders ist es jedoch mit der Masse des Körpers. Die Substanzmenge (Masse) bleibt unabhängig vom Ort immer erhalten.

Die Masse eines Körpers ist überall gleich groß.

Nach dem Grundgesetz von Newton gibt es zwischen der Kraft, der Masse und der Beschleunigung einen gesetzmäßigen Zusammenhang.

Wirkt auf einen Wagen eine konstante **beschleunigende** Kraft F ein, so erhöht sich seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um den gleichen Betrag; die Beschleunigung a ist konstant.

Die Beschleunigung gibt die Zunahme der Geschwindigkeit pro Sekunde an. Da die Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ angegeben wird, ist die Einheit für die Beschleunigung

$$a = \frac{m}{s} : s = \frac{m}{s^2}$$

Außerdem ist uns aber bekannt, daß die Kraft für den zu beschleunigenden Wagen um so stärker sein muß, je mehr der Wagen geladen hat und je schneller er anfahren soll. **Hieraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Kraft, der Masse und der Beschleunigung.**

Wenn zwei gleiche Wagen die gleiche Beschleunigung erhalten sollen, so benötigt man für beide Wagen zusammen die doppelte Kraft. Demzufolge sind beide Wagen nicht nur gleich schwer, d. h., sie werden gleich stark von der Erde angezogen, sondern sie haben auch die gleiche träge Masse, die auf die Beschleunigung einwirkt.

Da dieser natürliche Zusammenhang besteht, können wir die Massen von Körpern entweder a) mit Hilfe ihres **Gewichts** oder b) aufgrund ihrer **Trägheit** untereinander vergleichen.

Das bedeutet für einen Körper mit der Masse von 1 kg:

- a) er ist so schwer wie das Urkilogramm und wird am gleichen Ort gleich stark von der Erde angezogen,
- b) er ist so träge wie das Urkilogramm und bekommt überall durch die gleiche Kraft die gleiche Beschleunigung.

Aufgrund der Erkenntnis nach b) wurde die Krafteinheit Newton [N] eingeführt.

1 Newton [N] ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung von $1 \frac{m}{s^2}$ erteilt.

Das Newtonsche Beschleunigungsgesetz lautet:

Kraft = Masse · Beschleunigung $F = m \cdot a$
--

Einheitengleichung: $N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$

Setzen wir für die Kraft F die Gewichtskraft G und für die beliebige Beschleunigung a die Fallbeschleunigung g in die Formel ein, so erhalten wir:

Gewichtskraft = Masse · Fallbeschleunigung $G = m \cdot g$
--

Einheitengleichung: $N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$

Die Gewichtskraft eines Körpers ist also abhängig von der Fallbeschleunigung. Die Fallbeschleunigung wiederum wird von der Anziehungskraft bestimmt.

Da zwei Körper gleicher Masse **am selben Ort** auch die gleiche Gewichtskraft haben, läßt sich die Masse eines Körpers auf einer **Hebelwaage** durch **Vergleich mit Gewichtsstücken** bestimmen, d. h. wiegen.

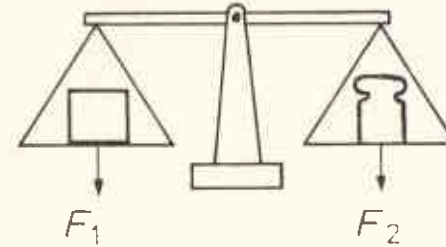


Abb. 14.2 — Hebelwaage

$$F_1 = F_2$$

In diesem Fall ist auch:

$$m_1 = m_2$$

Dies ist erklärlich, da beide Körper — das Gewichtsstück und der zu wiegende Körper — **am selben Ort einer gleich großen Erdanziehung** unterliegen.

Alle Mitglieder der Meterkonvention haben die gleichen Urmaße für das **Kilogramm** erhalten, d. h., daß diese Urtypen für die im Handel usw. zu verwendenden **Gewichtsstücke** alle die **gleiche Masse** haben. Gleichgültig, wo man auf der Erde **1 kg Butter** einkauft, man erhält überall die **gleiche Menge Butter**, wenn sie auf der Hebelwaage abgewogen wird. Deshalb ist im Handels- und Wirtschaftsleben sowie im täglichen Leben fast nur das Kilogramm als Maßeinheit gebräuchlich.

In der Technik ist jedoch die Unterscheidung nach Gewicht und Masse erforderlich, allerdings wird heute noch in vielen Fällen als Maßeinheit für die Kraft das Kilopond [kp] verwendet (bis 1977 noch zulässig):

1 Kilopond [kp] ist die Kraft, die eine Masse von 1 Kilogramm [kg] unter 45° geographischer Breite in Meeresspiegelhöhe infolge ihres Gewichts auf ihre Unterlage ausübt.

Wir wollen jedoch das Einheitengesetz vom 5. 7. 1970 beachten und künftig in unseren Beispielen und Überlegungen Newton [N] als Maßeinheit für die Kraft verwenden. Eine Umrechnung in kp ist wie folgt möglich:

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ Newton}$$

$$1 \text{ Newton} = 102 \text{ p}$$

14.4.1. MKS-System

Die 3 Grundgrößen Länge, Masse und Zeit werden auf die Grundeinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde zurückgeführt. Hieraus ergibt sich das MKS-System. Mit Hilfe dieser Grundgrößen lassen sich andere Größenarten ableiten (Fläche m^2 , Geschwindigkeit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ usw.). Hierdurch wird das Nacheichen der Grundnormalen auf ein Mindestmaß beschränkt und die physikalischen Gleichungen werden weitgehend von den Proportionalitätsfaktoren befreit. Würde z. B. in der Gleichung $F = m \cdot a$ die Kraft nicht in Newton $\left[\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}\right]$, sondern in kp angegeben, so müßten wir den Faktor 9,81 einsetzen und in der Rechnung mitschleppen. Außerdem erhalten wir eine Rechenkontrolle, indem auf beiden Seiten der Gleichung die gleichen Grundeinheiten auftreten müssen.

14.4.2. MKSA-System

Nimmt man zu den Grundeinheiten Meter, Kilogramm und Sekunde noch die Einheit der Stromstärke [Ampere], so erhält man das MKSA-System.

15. Aufbau und Zustandsformen der Körper

Jeder Körper beansprucht für sich einen **Raum**. Der physikalisch kleinste erreichbare Teil eines Stoffes heißt **Molekül**. Die Moleküle sind die kleinsten Bausteine einer chemischen Verbindung. Die Zusammenhangskraft, die die Moleküle eines Stoffes zusammenhält, heißt **Kohäsion**. Ohne Kohäsion würden alle Körper auseinanderfallen.

Die Kraft, mit der verschiedene Stoffe äußerlich aneinanderhaften, nennt man **Adhäsion** (Anhangskraft), z. B. Kitt und Glas, Farbe und Metall.

Die Moleküle lassen sich chemisch noch weiter zerlegen in **Atome**. Atome sind die **kleinsten** Teile eines **Grundstoffs** oder **Elements**; es gibt etwa 100 Elemente. Das Atom ist unteilbar. Es besteht aus elektrisch ungeladenen Teilchen (Neutronen) und den elektrisch positiv und negativ geladenen Teilchen (Proton +, Elektron —).

Sämtliche Körper (Stoffe) sind aus den Grundstoffen zusammengesetzt. Sie unterscheiden sich voneinander durch die Art und Anzahl der in ihren Molekülen vorhandenen Atome.

Alle Körper können in **festem**, **flüssigem** oder **gasförmigem** Zustand den Raum ausfüllen. Diese Zustandsform oder **Aggregatzustände** der Körper hängen von der Stärke der **Kohäsion** ab. **Durch Temperaturveränderungen bzw. durch Druckänderungen kann die Stärke der Kohäsion und damit der Aggregatzustand geändert werden.**

15.1. Feste Körper

Die Stoffe der festen Körper haben einen **bestimmten Rauminhalt** und eine **bestimmte Gestalt**. Ihre Moleküle können nur schwer gegeneinander verschoben oder voneinander getrennt werden, weil zwischen den Molekülen eine **große Kohäsion** besteht.

Feste Körper haben verschiedene Eigenschaften. Sie können z. B. **hart** sein (wenn sie dem Eindringen eines anderen Körpers einen großen Widerstand entgegensetzen); sie können ferner **plastisch** (zäh, dehnbar; Verformung ohne Bruch), **elastisch** (Formänderung nur während Belastung, z. B. Gummi, Federstahl), **spröde** (Bruch bei geringer Formänderung, z. B. Glas, gehärteter Stahl) oder **porös** (durchlässig für gasförmige oder flüssige Stoffe) sein.

15.2. Flüssige Körper

Flüssige Körper haben auch einen **bestimmten Rauminhalt**, aber **keine** bestimmte Gestalt. Ihre Moleküle haben eine **schwache Kohäsion**.

15.3. Gasförmige Körper

Gas- und luftförmige Körper haben **keinen** bestimmten Rauminhalt und **keine** bestimmte Gestalt. Gase haben ein **Ausdehnungsbestreben**; sie lassen sich aber auch stark zusammendrücken. Zwischen den Molekülen der Gase ist praktisch **keine** Kohäsion vorhanden.

Ein Stoff kann durch Temperatur- oder Druckänderungen von einer Zustandsform in die andere übergehen. Das Wasser kann z. B. beim Gefrieren aus der flüssigen in die feste Form (Eis), beim Schmelzen aus der festen in die flüssige Form (Wasser), beim Sieden aus der flüssigen in die gasförmige Form (Dampf), beim Kondensieren aus der gasförmigen in die flüssige Form (Wasser) übergehen.

16. Mechanik der festen Körper

16.1. Statik der festen Körper

16.1.1. Kraft

Eine Kraft (Zugkraft oder Druckkraft) kann folgende Wirkungen verursachen:

- Eine Kraft kann den Körper verformen (statische Kräfte).
- Eine Kraft kann den Bewegungszustand eines Körpers verändern (dynamische Kräfte).
- Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, so ist stets eine gleich große, in entgegengesetzter Richtung wirkende Gegenkraft vorhanden:

$$\text{Kraft} = \text{Gegenkraft}$$

Durch einen Kraftpfeil (Vektor) kann man Größe, Richtung und Lage einer Kraft darstellen:

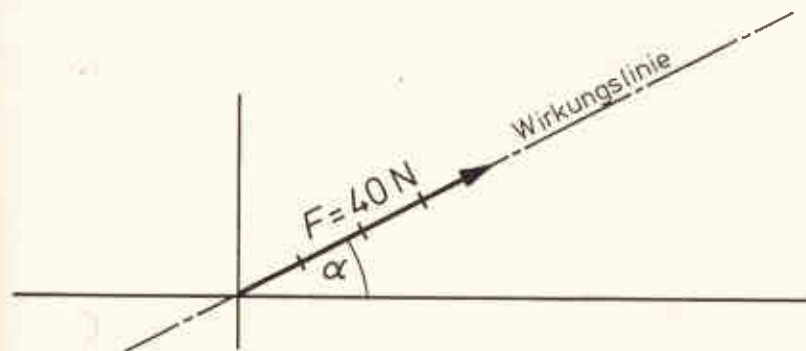


Abb. 16.1

Jeder Körper besitzt eine Gewichtskraft G , die nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet ist. Die Gewichtskraft ist einerseits abhängig von der Masse, d. h. von der Art und Größe des Körpers. Die Masse wird vom Volumen V [m^3] und von der Dichte ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$] des Körpers bestimmt.

$$\text{Masse} = \text{Volumen} \cdot \text{Dichte}$$
$$m = V \cdot \rho$$

Einheitengleichung:

$$\text{kg} = \text{m}^3 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Außerdem ist die Gewichtskraft abhängig von der Beschleunigung a , die der Masse durch die Erdanziehung erteilt wird.

Gewichtskraft = Masse · Beschleunigung			
G	$=$	m	$\cdot$ a

Einheitengleichung: $\text{N} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Beispiel:

Ein Fernmeldemast hat einen oberen Durchmesser von $d_1 = 16 \text{ cm}$ und einen unteren Durchmesser von $d_2 = 24 \text{ cm}$; seine Länge beträgt $l = 10 \text{ m}$. Die Dichte des Mastholzes ist $\rho = 0,5 \text{ kg/dm}^3$. Wie schwer ist der Fernmeldemast?

Gegeben: $d_1 = 16 \text{ cm}$; $d_2 = 24 \text{ cm}$; $l = 10 \text{ m}$; $\rho = 0,5 \text{ kg/dm}^3$; $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Gesucht: G

Lösung: $d_m = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{16 \text{ cm} + 24 \text{ cm}}{2} = 20 \text{ cm}$

$$A_m = \frac{d_m^2 \cdot \pi}{4} = \frac{20^2 \cdot 3,14}{4} = \frac{400 \cdot 3,14}{4} = 314 \text{ cm}^2$$

$$V = A_m \cdot l = 3,14 \text{ dm}^2 \cdot 100 \text{ dm} = 314 \text{ dm}^3$$

$$m = V \cdot \rho = 314 \text{ dm}^3 \cdot 0,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 157 \text{ kg}$$

$$G = m \cdot g = 157 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1540 \text{ N (157 kp)}$$

Die Gewichtskraft des Fernmeldemastes beträgt $G = 1540 \text{ N}$.

16.1.2. Zusammenwirken mehrerer Kräfte

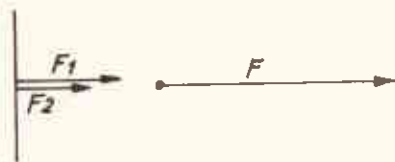


Abb 16.2

Greifen in einem Punkt zwei Einzelkräfte (F_1 und F_2) in der **gleichen Richtung** an, dann ist die Gesamtkraft F gleich der **Summe** der **Einzelkräfte**. Diese Gesamtkraft wird auch Resultante, Resultierende oder Mittelkraft genannt.

$$F = F_1 + F_2$$

Wirken zwei Einzelkräfte in entgegengesetzter Richtung, so ergibt sich die Gesamtkraft als **Differenz** dieser Teilkräfte.

$$F = F_1 - F_2$$

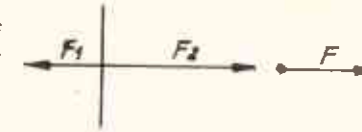


Abb. 16.3

Greifen die Kräfte F_1 und F_2 **unter einem Winkel an**, dann ist die Resultierende auch von dem Winkel abhängig, unter dem diese Kräfte angreifen. Die Ermittlung der Resultierenden erfolgt zeichnerisch durch Zusammensetzen der Kräfte zu einem **Kräfteparallelogramm**. In diesem Parallelogramm ist die vom Angriffspunkt ausgehende Diagonale die Resultierende nach Größe und Richtung.

$$F = F_1 + F_2 \text{ 1)}$$

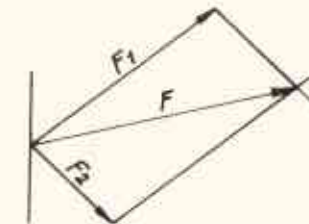


Abb. 16.4

Greifen mehrere Kräfte unter verschiedenen Winkeln an, so kann man jeweils zwei Kräfte zu einem Parallelogramm zusammenfassen. Die so gefundenen Resultierenden werden wieder zusammengefaßt.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \text{ 2)}$$

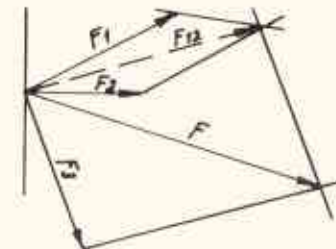


Abb. 16.5

1) Die Addition von nicht gleichgerichteten Kräften darf nicht arithmetisch, sondern muß geometrisch vorgenommen werden.
2) Geometrische Addition bzw. Subtraktion.

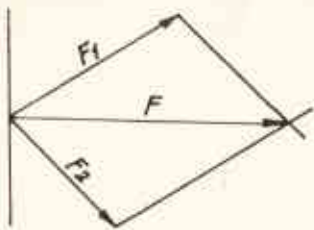


Abb. 16.6

Umgekehrt lässt sich eine Gesamtkraft mit Hilfe des Kräfteparallelogramms zerlegen, wenn z. B. die Richtungen der Einzelkräfte (oder auch Richtung und Größe einer Einzelkraft) bekannt sind.

$$F_2 = F - F_1^1)$$

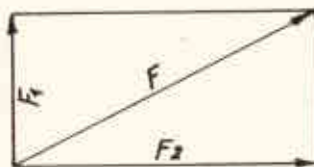


Abb. 16.7

Rechtwinklig zueinander gerichtete Kräfte werden quadratisch zusammengesetzt.

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Übungsaufgaben:

652. Am Endmast einer Freileitung sind zwei parallelverlaufende Doppelleitungen befestigt. Die Zugkraft je Draht beträgt 180 N. Wie groß ist die gesamte Zugkraft, die der Mast aufzunehmen hat?
653. An einem Mast befestigte Leitungen ziehen in entgegengesetzte Richtungen mit 250 N und 460 N. Wie groß ist die gesamte Zugkraft?
654. An einem Mast befestigte Leitungen schließen einen Winkel von 90° ein. Ihre Zugkräfte sind 900 N und 1,36 kN. Wie groß ist die gesamte Zugkraft?

¹⁾ Geometrische Addition bzw. Subtraktion.

Übungsaufgaben:

655. Auf einen Mast wirken die Zugkräfte von 1,9 kN und 1,45 kN unter einem Winkel von 120° ein. Wie groß ist die gesamte Zugkraft?
656. Eine Straßenlampe hat ein Gewicht von 400 N und wird mit 2 Spanndrähten befestigt. Diese bilden an der Lampe einen Winkel von 150° . Wie groß sind die Zugkräfte in den Spanndrähten? Wie groß sind diese bei einem Winkel von 176° und bei 180° (kein Durchhang)?
657. Zwei Kräfte $F_1 = 400$ N und $F_2 = 600$ N wirken unter einem Winkel von 90° auf einen Punkt eines Körpers ein. Wie groß ist die Resultierende und ihr Winkel α gegen die Kraft F_1 ?

16.1.3. Schwerpunkt

Der **Schwerpunkt** eines unregelmäßigen, flächenhaften Körpers kann durch einen einfachen Versuch bestimmt werden, indem der Körper nacheinander in zwei verschiedenen Punkten an einem Faden aufgehängt wird. Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Fadenrichtungen (Schwerelinien) (Abb. 16.8). Der Schwerpunkt regelmäßiger Flächen und Körper ist durch Zeichnung leicht zu finden (Beispiele: vgl. Abb. 16.9). Beim Dreieck (Abb. 16.9c) ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden,

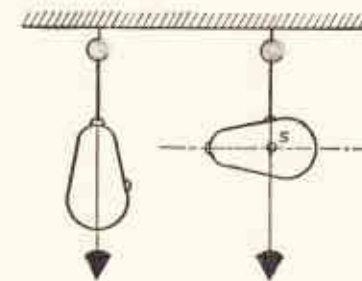


Abb. 16.8

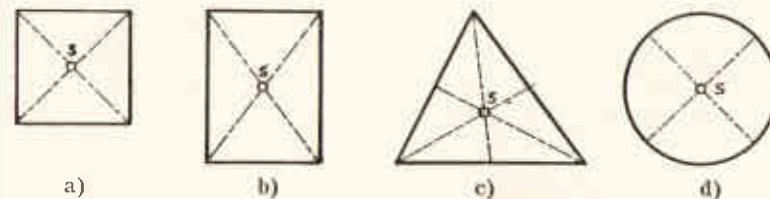


Abb. 16.9

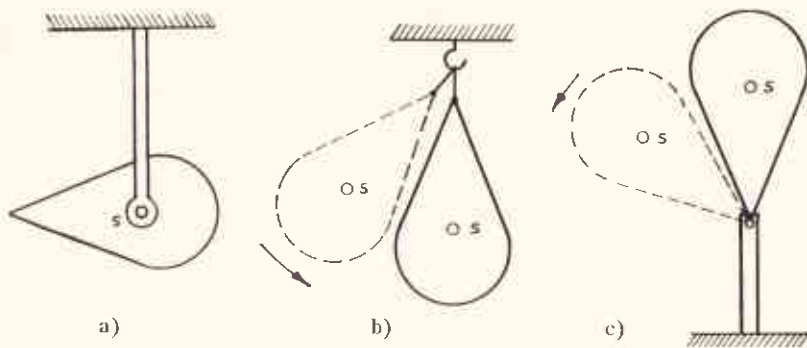


Abb. 16.10

Ist ein Körper in seinem Schwerpunkt unterstützt, ist er in jeder Lage im Gleichgewicht. Der Körper befindet sich dann in der stetigen, unterschiedslosen oder indifferenten Gleichgewichtslage (Abb. 16.10a).

Wird der Körper in einem anderen Punkt als dem Schwerpunkt unterstützt, dreht er sich und pendelt hin und her, bis sein Schwerpunkt genau lotrecht unter dem Unterstützungspunkt liegt (Abb. 16.10b). Der Körper befindet sich dann in der sicheren oder stabilen Gleichgewichtslage.

Ein Körper ist aber auch im Gleichgewicht, wenn sein Unterstützungspunkt lotrecht unter dem Schwerpunkt liegt (Abb. 16.10c). Der Körper nimmt aber umkippend die stabile Lage ein, wenn der Schwerpunkt aus dieser lotrechten Geraden gerät. Diese künstlich herbeigeführte Lage ist die unsichere oder labile Gleichgewichtslage.

16.1.4. Standfestigkeit

Wird ein Körper nicht in einem einzigen Punkt, sondern in einer Fläche unterstützt, ist für physikalische und praktische Betrachtungen seine Standfestigkeit wichtig. Ein Körper steht fest, wenn das Lot vom Schwerpunkt durch die Unterstützungsfläche geht (Abb. 16.11a). Geht das Lot vom Schwerpunkt seitlich an der Unterstützungsfläche vorbei, bleibt der Körper nicht in dieser Lage stehen, er fällt um (Abb. 16.11b).

Die Standfestigkeit ist um so größer, je weiter sich die Unterstützungsfläche nach allen Seiten erstreckt und je näher der Schwerpunkt bei der Unterstützungsfläche liegt (Abb. 16.11c).

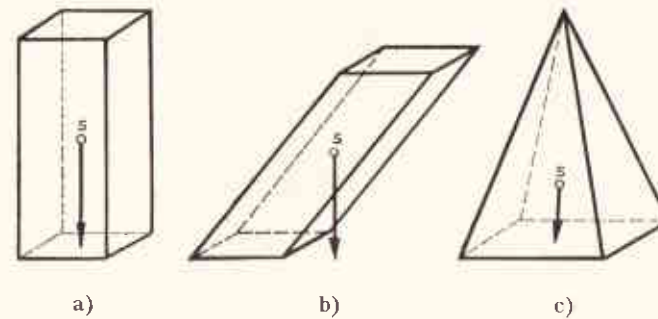


Abb. 16.11

16.1.5. Gleichgewicht der Kräfte

Zunächst müssen wir untersuchen, in welcher Weise Kräfte auf einen Körper einwirken können und unter welchen Bedingungen Kräfte im Gleichgewicht sind. Es kommt bei einem Körper nicht nur darauf an, wie groß eine Kraft ist und in welcher Richtung sie auf ihn wirkt, sondern auch, an welchem Punkt des Körpers die Kraft angreift. Kräfte, die in demselben Punkt eines Körpers angreifen, können im Gleichgewicht stehen, wenn die Gesamtkraft im Kräfteviereck Null ist (Abb. 16.12).

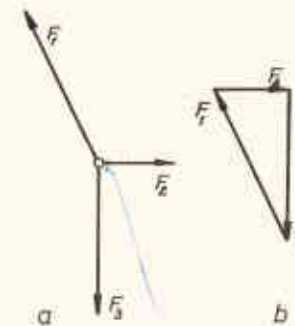


Abb. 16.12

Ferner können mehrere Kräfte an einem Körper auch dann im Gleichgewicht sein, wenn die Verlängerung ihrer Richtungspfeile, d. h. ihre Wirkungslinien, sich in einem Punkt schneiden und die Gesamtkraft Null ist (Abb. 16.13). Der Schnittpunkt der Wirkungslinien gilt dann als der gemeinsame Angriffspunkt der Kräfte. Jede Kraft kann also entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne daß sich ihre Wirkung verändert.

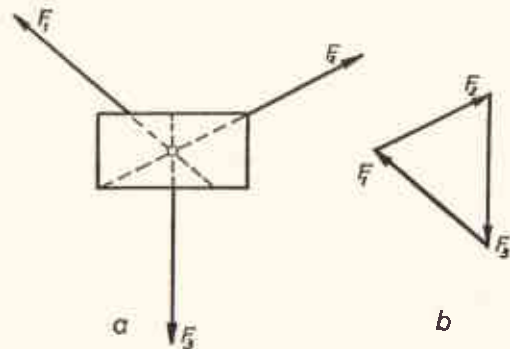


Abb. 16.13

16.1.6. Drehmoment

Haben zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte nicht dieselbe Wirkungslinie, stehen sie nicht mehr im Gleichgewicht. Zwei solche Kräfte werden ein **Kräftepaar** genannt; ein Kräftepaar übt auf den Körper ein **Drehmoment** aus, weil es einen Körper zu drehen versucht (in Abb. 16.14 im Sinne der gekrümmten Pfeile).

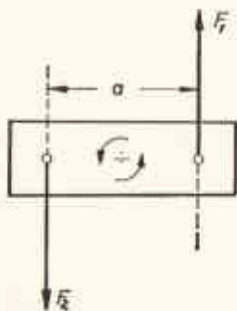


Abb. 16.14 — Drehmoment

Ist ein Körper drehbar gelagert, übt jede einzelne Kraft ein Drehmoment auf die Drehachse aus (Abb. 16.15). Die Größe des Drehmoments wird bestimmt durch die Größe der Kraft und durch den rechtwinkligen Abstand a der Wirkungslinien der Kräfte bzw. den rechtwinkligen Abstand a der Kraft vom Drehpunkt (Drehachse).

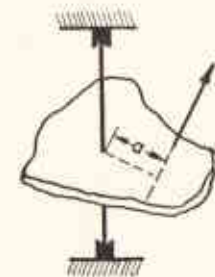


Abb. 16.15

Aus dem Produkt dieser beiden Größen ergibt sich die Größe des Drehmoments M :

$$\text{Drehmoment} = \text{Kraft} \cdot \text{Abstand}$$

$$M = F \cdot a$$

Einheitengleichung:

$$\text{Nm} = \text{N} \cdot \text{m}$$

Dabei ist zu beachten, daß neben der Größe des Drehmoments auch dessen Richtung wesentlich ist. Ein Drehmoment wird also ähnlich wie die Kraft erst durch Größe und Richtung genau festgelegt; ein **Drehmoment ist eine gerichtete Größe**. Wie bei den Kräften können auch mehrere Drehmomente zu einem Gesamtdrehmoment zusammengesetzt werden. Mehrere Drehmomente können sich gegenseitig aufheben (Abb. 16.16). Demnach müssen nicht nur Einzelkräfte, sondern auch **Drehmomente** an einem Körper im Gleichgewicht sein.

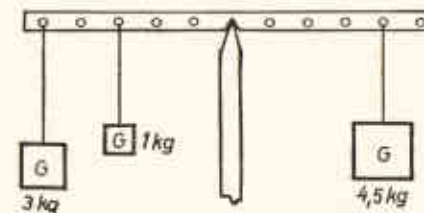


Abb. 16.16

16.1.7. Hebelgesetz

Bei einem drehbar gelagerten Körper herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente der links gerichteten Kräfte gleich der Summe der Drehmomente der rechts gerichteten Kräfte ist.

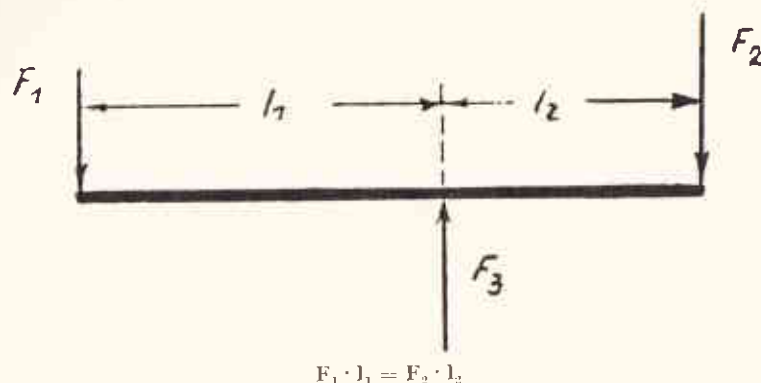


Abb. 16.17

Beispiel:

Am vorstehenden in Ruhe befindlichen Hebel betragen $F_1 = 80 \text{ N}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $F_2 = 60 \text{ N}$. Wie groß sind l_2 und F_3 ?

Gegeben: $F_1 = 80 \text{ N}$, $l_1 = 3 \text{ m}$; $F_2 = 60 \text{ N}$

Gesucht: l_2 ; F_3

Lösung: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

$$l_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{F_2} = \frac{80 \text{ N} \cdot 3 \text{ m}}{60 \text{ N}} = 4 \text{ m}$$

$$F_3 = F_1 + F_2 = 80 \text{ N} + 60 \text{ N} = 140 \text{ N}$$

Der Hebelarm beträgt $l_2 = 4 \text{ m}$, die Kraft $F_3 = 140 \text{ N}$.

16.2. Dynamik der festen Körper

16.2.1. Allgemeines

Man spricht von „Bewegung“ eines Körpers, wenn dieser seine Lage gegenüber seiner Umgebung ändert.

16.2.1.1. Trägheit

Jeder Körper beharrt in seinem jeweiligen Zustand (Zustand der Ruhe oder Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung), solange er nicht von äußeren Kräften gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern. Ein Körper kann also weder von selbst in Bewegung geraten, noch seinen Bewegungszustand von selbst ändern (Trägheit oder Beharrungsvermögen).

16.2.1.2. Reibung

Soll ein Körper auf seiner Unterlage fortbewegt werden, tritt ein die Bewegung hemmender Widerstand auf. Diesen Widerstand nennt man Reibung oder Reibungskraft. Zur Überwindung dieser Reibung ist eine bestimmte Mindestkraft erforderlich.

Die Reibung hängt ab vom Druck des gleitenden oder rollenden Gegenstandes auf die Unterlage sowie vom Werkstoff, von der Oberflächenbeschaffenheit und von der Schmierung.

Soll ein Körper aus dem Ruhezustand in Bewegung gebracht werden, ist die „Haftreibung“ zu überwinden. Um den Bewegungszustand zu erhalten, ist die etwas kleinere „Gleitreibung“ zu überwinden.

Rollende Reibung ist wesentlich kleiner als gleitende Reibung. Deshalb schiebt man runde Stangen (Walzen) unter schwere Gegenstände, um diese fortzubewegen. An einem Wagen bringt man Räder an und verlegt damit die gleitende Reibung in das Lager der Welle, wo man sie durch Schmiermittel wesentlich herabsetzen kann.

16.2.2. Trägheitskraft

Die Trägheitskraft eines beschleunigten Körpers ist nicht immer gleich der Antriebskraft. Nur zu Beginn der Beschleunigung, wenn der Körper aus dem Ruhezustand herausgebracht wird, trifft das zu. Ein beschleunigter Körper erfährt zwei Gegenkräfte: a) die Trägheitskraft und b) die Reibungskraft. Die Summe dieser beiden Kräfte ist gleich der Antriebskraft. Wird die

Bewegung gleichförmig, so ist die Reibungskraft gleich der Antriebskraft und die Trägheitskraft gleich Null. Bei Verzögerungen kehrt sich dieser Vorgang um.

16.2.3. Gleichförmige Bewegung

Die Bewegung eines Körpers ist gleichförmig, wenn der Körper in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt.

Die **Geschwindigkeit** v ist die Größe, die angibt, wie schnell ein Körper seinen **Ort** (seine Stellung im Raum) **verändert**. Die **Geschwindigkeit** v ist bei gleichförmiger Bewegung der **Weg** s , den ein Körper in einer **Zeiteinheit** t zurücklegt.

Legt ein Körper in 12 s einen Weg von 72 m zurück, so legt er in $1\text{ s} \frac{72}{12} \Rightarrow 6\text{ m}$ zurück; seine Geschwindigkeit beträgt $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Geschwindigkeit v eines Körpers wird also gefunden, indem der Weg s durch die Zeit t geteilt wird:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \\ v = \frac{s}{t} \end{array}}$$

Einheitengleichung: $\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die **Einheit der Geschwindigkeit** wird aus den **Grundgrößen** der **Zeit** und der **Länge** abgeleitet und ist Meter je Sekunde.

Für schnelle Bewegungen wird als Geschwindigkeitsmaß der Weg benutzt, der in einer willkürlich gewählten Zeitspanne, z. B. in einer Minute, in einer Stunde oder in einem Jahr zurückgelegt wird (wie Kilometer je Stunde).

Durch Umstellen der Gleichung lassen sich Weg und Zeit berechnen.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit} \\ s = v \cdot t \end{array}}$$

Einheitengleichung: $\text{m} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} \\ t = \frac{s}{v} \end{array}}$$

Einheitengleichung: $\text{s} = \frac{\text{m}}{\text{m/s}}$

Beispiel:

Mit einem Fahrrad wird eine Entfernung von 55 km in $3\frac{1}{2}$ Std. zurückgelegt. Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Gegeben: $s = 55\text{ km}$; $t = 3,5\text{ h}$

Gesucht: $v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Lösung: $v = \frac{s}{t}$
 $= \frac{55\text{ km}}{3,5\text{ h}}$
 $v = 15,72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15720 \frac{\text{m}}{\text{h}} = 4,37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Beispiel:

Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ einer Riemenscheibe von 160 mm Durchmesser bei der Drehzahl $1450 \frac{1}{\text{min}}$?

Gegeben: $d = 160\text{ mm}$; $n = 1450 \frac{1}{\text{min}}$

Gesucht: $v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Lösung: $v = d \cdot \pi \cdot n$
 $= \frac{160\text{ mm} \cdot 3,14 \cdot 1450 \cdot 1}{\text{min}}$
 $v = 728000 \frac{\text{mm}}{\text{min}} = 728 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 12,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

16.2.4. Kreisbewegung

Auch eine **Kreisbewegung (Drehbewegung)** kann eine gleichförmige Bewegung sein. Man spricht dann von der Umfangsgeschwindigkeit; das ist der Weg, den ein Punkt auf einer Kreisbahn in einer Zeiteinheit zurücklegt.

Sind bei einer Drehbewegung der Durchmesser der Kreisbahn „ d “ und die Drehzahl „ n “ (Zahl der **Umdrehung je Minute** oder **je Sekunde**) bekannt, so läßt sich die Umfangsgeschwindigkeit „ v “ berechnen.

Nach einer Umdrehung hat ein Punkt auf dem sich drehenden Teil einen Weg zurückgelegt, der gleich dem Kreisumfang ($d \cdot \pi$) ist. Nach n Umdrehungen ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg, also die **Umfangsgeschwindigkeit**:

$$v = \text{Umfangsgeschwindigkeit in } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\boxed{v = d \cdot \pi \cdot n} \quad d = \text{Durchmesser der Kreisbahn in m}$$

$$n = \text{Umdrehungszahl in } \frac{1}{\text{s}}$$

Einheitengleichung: $\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \frac{1}{\text{s}}$

Die Maßeinheit für die Umfangsgeschwindigkeit hängt von den Maßeinheiten für den Durchmesser und für die Drehzahl ab. Sie ergibt sich aus der Dimensionsgleichung.

Nach dem Trägheitsgesetz bewegt sich ein Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradeaus, solange keine Kraft auf ihn einwirkt. Soll er sich auf einer Kreisbahn bewegen, so muß auf den Körper dauernd eine Kraft einwirken, die ihn zwingt, die Kreisbahn einzuhalten. Diese nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete Kraft heißt **Zentripetalkraft** oder **Zentralkraft**. Die Kraft, die einen auf einer Kreisbahn bewegten Körper nach außen zieht, wird **Zentrifugalkraft** oder **Flickkraft** genannt.

16.2.5. Ungleichförmige Bewegung

Eine Bewegung ist nur selten wirklich gleichförmig, z. B. wird ein Radfahrer beschleunigt oder verzögert fahren, wenn Gefälle oder Steigungen, Kurven oder Hindernisse vorhanden sind, der Wegzustand ihn also zu Geschwindigkeitsänderungen zwingt.

Die Bewegung eines Körpers ist **ungleichförmig**, wenn der Körper in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten ungleiche Wege zurücklegt. Die Bewegung gilt als **ungleichförmig beschleunigt**, wenn die zurückgelegten Wege in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten größer werden (Geschwindigkeitszuwachs); sie ist **ungleichförmig verzögert**, wenn die zurückgelegten Wege in gleichen aufeinanderfolgenden Zeiten kleiner werden (Geschwindigkeitsabnahme).

Die **Beschleunigung** a einer Bewegung ist gegeben durch das **Verhältnis des Geschwindigkeitsunterschieds** $\Delta v = v_2 - v_1$ und der Zeit t , in der sie erfolgt.

$$\boxed{\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsunterschied}}{\text{Zeitdauer}}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

Einheitengleichung: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}}$

In der Gleichung ist Δv der **Geschwindigkeitsunterschied**, der sich aus der Differenz $v_2 - v_1$ errechnet; hierbei ist v_2 die **Endgeschwindigkeit** (am Ende der Meßzeit t) und v_1 die **Anfangsgeschwindigkeit** (am Anfang der Meßzeit t).

Beispiel:

Ein D-Zug erreicht seine Höchstgeschwindigkeit von $v_2 = 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $t = 3 \text{ min}$.

Wie groß ist die Beschleunigung des Zuges?

Gegeben: $v_1 = 0$; $v_2 = 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $t = 3 \text{ min}$

Gesucht: a

Lösung: $a = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{140 \cdot 1000 - 0}{3 \cdot 60 \cdot 3600} = \frac{1,4 \cdot 10^5}{6,48 \cdot 10^5} = 0,216 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Beschleunigung des Zuges beträgt $a = 0,216 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Beispiel:

Die Masse eines Personenkraftwagens beträgt einschließlich der Insassen $m = 900 \text{ kg}$. Das Fahrzeug soll in $t = 30 \text{ s}$ auf eine Geschwindigkeit von $v_2 = 120 \text{ km/h}$ beschleunigt werden. Sämtliche Reibungskräfte werden vernachlässigt. Wie stark muß die vom Motor zu erzeugende Antriebskraft sein?

Gegeben: $m = 900 \text{ kg}$; $v_1 = 0 \text{ km/h}$; $v_2 = 120 \text{ km/h}$; $t = 30 \text{ s}$

Gesucht: F

Lösung: $v_2 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 33,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{33,3 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{30 \text{ s}} = 1,11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F = m \cdot a = 900 \text{ kg} \cdot 1,11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1000 \text{ N (etwa 100 kp)}$$

Die Antriebskraft des Motors muß $F = 1000 \text{ N}$ betragen.

¹⁾ Δ = Delta, großer griechischer Buchstabe, mathematisches Kurzzeichen für „Differenz“.

Beispiel:

Die Entfernung zwischen Hamburg und Bremen beträgt 120 km. In beiden Städten fahren gleichzeitig zwei Kraftfahrer mit ihren Fahrzeugen in entgegengesetzter Richtung ab. Die Geschwindigkeit des einen Kraftfahrzeugs beträgt $v_1 = 90$ km/h, die des anderen Kraftfahrzeugs $v_2 = 60$ km/h. a) Nach welcher Fahrtdauer begegnen sich die beiden Fahrer auf der Autobahn? b) Welche Fahrstrecke hat jeder Fahrer am Treffpunkt bereits zurückgelegt? (Zeichnerische und rechnerische Lösung)

Gegeben: $v_1 = 90$ km/h; $v_2 = 60$ km/h; $s = 120$ km

Gesucht: t ; s_1 ; s_2

Lösung: a) Rechnerische Lösung

$$v = v_1 + v_2 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 150 \text{ km/h}$$

$$v = \frac{s}{t} \text{ umstellen nach } t!$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{120 \text{ km}}{150 \text{ km/h}} = 0,8 \text{ h} = 0,8 \text{ h} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} = 48 \text{ min}$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,8 \text{ h} = 72 \text{ km}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,8 \text{ h} = 48 \text{ km}$$

$$\text{Rechenprobe: } s = s_1 + s_2 = 72 \text{ km} + 48 \text{ km} = 120 \text{ km}$$

b) Zeichnerische Lösung

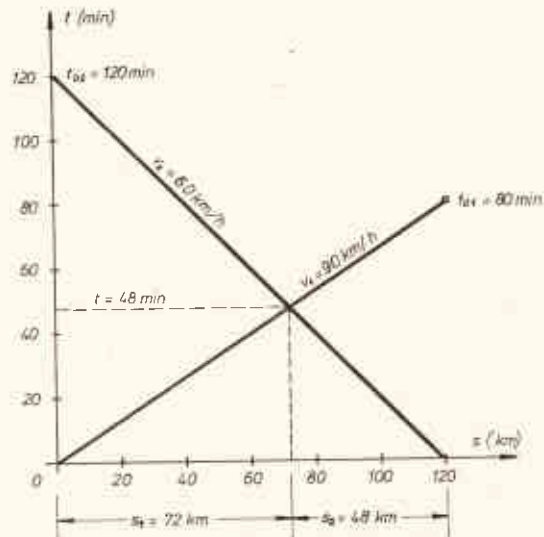


Abb. 16.18 — Geschwindigkeitsdiagramm

Wählen Sie für die Achsen des Diagramms einen Maßstab, der der verfügbaren Zeichenfläche sowie der Ablesegenauigkeit gerecht wird:

$$20 \text{ km} \hat{=} 1 \text{ cm},$$

$$20 \text{ min} \hat{=} 1 \text{ cm}.$$

Tragen Sie in das Diagramm die Geschwindigkeitsgeraden ein. Hierzu werden die Zeiten t_{01} und t_{02} benötigt.

t_{01} und t_{02} sind die Zeiten, die das zugehörige Fahrzeug für die gesamte Fahrstrecke benötigen würde.

$$t_{01} = \frac{s}{v_1} = \frac{120 \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = 2 \text{ h} = 120 \text{ min}$$

$$t_{02} = \frac{s}{v_2} = \frac{120 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 1,33 \text{ h} = 80 \text{ min}$$

Diese beiden Kennwertpunkte werden so in das Diagramm eingetragen, daß die Geschwindigkeitsgerade für v_1 von links unten nach rechts oben und die Geschwindigkeitsgerade für v_2 bei $s = 120$ km von rechts unten nach links oben gezeichnet werden können.

Der Schnittpunkt beider Geschwindigkeitsgeraden ergibt die gesuchten Werte: Senkrechte Achse $t = 48$ min; waagerechte Achse $s_1 = 72$ km, $s_2 = 48$ km.

Die zeichnerisch ermittelten Werte stimmen mit den rechnerisch ermittelten Werten überein. Sie betragen: $t = 48$ min, $s_1 = 72$ km und $s_2 = 48$ km.

Übungsaufgaben:

658. Ein PKW legt in 6 Stunden eine Strecke von 336 km zurück. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?
659. Ein Aufzug hat 180 m/min Hubgeschwindigkeit. Die Fahrzeit beträgt 6 Sekunden. Welche Höhendifferenz legt er zurück?
660. Ein Mopedfahrer legt eine Strecke von 18 km in 24 min zurück. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?
661. Wie weit kommt eine mit einer Geschwindigkeit von $640 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ fliegende Gewehrkegel in 5 s?
662. Welche durchschnittliche Reisegeschwindigkeit hat ein Verkehrsflugzeug, das die in der Luftlinie etwa 700 km lange Strecke von Berlin nach Basel in $1\frac{1}{4}$ Stunden zurücklegt?
663. Welche Umfangsgeschwindigkeit besitzt eine Riemenscheibe von 120 mm Durchmesser bei 800 U/min?

Übungsaufgaben:

664. Welchen Durchmesser besitzt eine Riemenscheibe, wenn sie bei 720 U/min dem Riemen eine Geschwindigkeit von $6,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erteilt?
665. Der Durchmesser eines Reifens beträgt 60 cm. Wieviel Umdrehungen je Minute macht das Rad bei 120 km/h Fahrgeschwindigkeit?
666. Eine Seilwinde mit 200 mm Trommeldurchmesser macht in 3 Sekunden 1 Umdrehung. Wie groß ist die Hubgeschwindigkeit?
667. Mit welcher Drehzahl arbeitet ein Bohrer von 20 mm Durchmesser und einer Schnittgeschwindigkeit von 16 m/min?
668. Ein Wagen erreicht beim Anfahren eine Beschleunigung von $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Nach welcher Zeit hat er eine Geschwindigkeit von $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
669. Ein D-Zug erreicht mit einer elektrischen Lokomotive aus dem Stand innerhalb von 22 s eine Geschwindigkeit von 130 km/h. Wie groß ist die Anfahrbeschleunigung und der während des Anfahrens zurückgelegte Weg?
670. Eine Riemenscheibe von 400 mm Durchmesser soll eine Umfangsgeschwindigkeit von $120 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ haben. Welche Drehzahl muß sie aufweisen?
671. Welche Beschleunigung muß eine Lokomotive haben, wenn sie nach 25 s eine Geschwindigkeit von $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreichen soll?

17. Arbeit und Leistung

17.1. Arbeit

Zum Verrichten einer Arbeit muß eine Kraft aufgewendet werden (Muskelkraft, Maschinenkraft u. a.).

Wenn z. B. ein Arbeiter eine Kraft aufwenden muß, um ein Gewicht von 500 N in die 3. Etage zu tragen, so verrichtet er eine Arbeit. Wenn er 500 N in die 5. Etage tragen muß, dann ist die Arbeit noch größer. Ebenso ist mehr Arbeit erforderlich, wenn 800 anstatt 500 N in dieselbe Etage getragen werden müssen.

Je größer die aufgewendete Kraft und je länger der Weg, desto größer ist die Arbeit!

Merke:

Mechanische Arbeit wird immer dann verrichtet, wenn eine Kraft längs eines Weges bewegt wird. Stimmen Krafrichtung und Bewegungsrichtung überein, dann ist die mechanische Arbeit das Produkt aus Kraft und Weg.

Als Einheit der mechanischen Arbeit dient die Arbeitsmenge, die erforderlich ist, um 1 N um 1 m zu heben.

Bisher verwendeten wir das kpm, es wird im MKS-System durch das Newton-Meter [Nm] ersetzt, auch Joule [J] genannt.

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ kpm} = 9,81 \text{ Nm} = 9,81 \text{ J}$$

Wird eine Last **senkrecht gehoben**, so ist die Arbeit gleich **Gewichtskraft mal Höhe**:

$$W = G \cdot h$$

W = Arbeit in J

G = Gewichtskraft in N

h = Höhe in m

Einheitengleichung: $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$

Wird eine Last auf einer waagerechten oder schrägen Bahn **gezogen oder geschoben**, so ist die Arbeit gleich **Kraft mal Weg**:

$$W = F \cdot s$$

W = Arbeit in J

F = Kraft in N

s = Weg in m

Einheitengleichung: $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$

Beispiel:

Zum Bewegen eines beladenen Wagens ist eine Kraft von 300 N erforderlich. Welche Arbeit wird auf einer Strecke von 500 m verrichtet?

Gegeben: $F = 300 \text{ N}$; $s = 500 \text{ m}$

Gesucht: W

Lösung: $W = F \cdot s$
 $= 300 \text{ N} \cdot 500 \text{ m}$
 $W = 150000 \text{ J}$
 $W = 150 \text{ kJ}$

17.2. Energie

Energie ist aufgespeicherte Arbeit. Fällt z. B. der Lastklotz eines Rammhämers aus einer bestimmten Höhe herab, so wird bei jedem Schlag ein Pfahl weiter in den Boden getrieben. Die geleistete Arbeit des Lastklotzes ist um so größer, je größer das gehobene Gewicht und der Hub sind (das ist die Höhe, um die der Lastklotz gehoben worden ist). Solange der Klotz oben eingeklemmt ist, ist in ihm Arbeit ($W = F \cdot s$) gespeichert. Wird der Lastklotz freigegeben, fällt er herab, und die in ihm gespeicherte Arbeit wird frei; die **Energie der Lage** ($W = F \cdot s$) wird in **Energie der Bewegung** umgewandelt. Zur genauen Berechnung erhält man aus der Formel $W = F \cdot s$ für die Bewegungsenergie:

$$W = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$W =$ Arbeit in J
 $m =$ Masse in kg
 $v =$ Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Einheitengleichung: $\text{J} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$

Diese Formel lehrt uns, daß die Bewegungsenergie mit der Masse und mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst; wenn also die Geschwindigkeit verdreifacht wird, so wächst die Bewegungsenergie auf das $3^2 = 9$ fache der ursprünglichen Größe an.

Das Vermögen, Arbeit zu verrichten, wird Energie genannt. Energie kann immer wieder in andere Energieformen umgewandelt werden: z. B. mechanische Energie in Wärmeenergie oder in elektrische Energie, elektrische Energie in mechanische, chemische oder Wärmeenergie. Die verbrauchte Energie der einen Form ist genauso groß wie die gewonnene Energie der anderen Formen. Es ist dabei jedoch nicht zu verhindern, daß ein Teil der verbrauchten Energie in nutzlose Wärmeenergie umgewandelt wird.

17.3. Leistung

Im allgemeinen kommt es nicht nur darauf an, daß eine Arbeit verrichtet wird; von großer Bedeutung ist auch, wie schnell man mit der Arbeit fertig wird.

Führen z. B. zwei Arbeiter die gleiche Arbeit aus und benötigt der eine für diese Arbeit 5 Stunden und der zweite Arbeiter arbeitet daran 10 Stunden, dann haben zwar beide ihre Arbeit ausgeführt, aber der erste war schneller damit fertig. Man sagt: „Der erste Arbeiter leistet mehr.“

Will man nun Arbeitskräfte, Maschinen usw. miteinander vergleichen, so vergleicht man ihre **Leistung**, das ist die in einer Sekunde verrichtete Arbeit.

$$P = \frac{W}{t}$$

$P =$ Leistung in W
 $W =$ Arbeit in J
 $t =$ Zeit in s

Einheitengleichung: $W = \frac{\text{J}}{\text{s}}$

Als Einheit wird für die Leistung $\frac{\text{J}}{\text{s}}$ oder das Watt [W] verwendet.

$$1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \text{ Watt}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

Neben den Maßeinheiten Watt, $\frac{\text{J}}{\text{s}}$ und $\frac{\text{Nm}}{\text{s}}$ wird noch 1 PS als größere Einheit für die Leistung verwendet.

$$1 \text{ PS} = 736 \text{ Watt}$$

$$1 \text{ kW} = 1,36 \text{ PS}$$

$$1 \text{ kW} = 102 \frac{\text{kp} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel:

Eine Last von 1,5 t soll in 50 s 18 m gehoben werden. Welche Mindestleistung in Watt und PS muß der eingesetzte Kran haben?

Gegeben: $F = 1500 \cdot 9,81 = 14715 \text{ N}$; $t = 50 \text{ s}$; $s = 18 \text{ m}$

Gesucht: P

Lösung: $P = \frac{W}{t}$

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

$$P = \frac{14715 \text{ N} \cdot 18 \text{ m}}{50 \text{ s}}$$

$$P = 5297,4 \text{ Watt} \approx 5,3 \text{ kW}$$

$$P = 5,3 \cdot 1,36 = 7,2 \text{ PS}$$

Beispiel:

Die Masse eines Personenkraftwagens einschließlich der Insassen beträgt $m = 900 \text{ kg}$. Das Fahrzeug soll in $t = 30 \text{ s}$ auf eine Geschwindigkeit von $v_2 = 120 \text{ km/h}$ beschleunigt werden. Sämtliche Reibungskräfte werden vernachlässigt. Die Antriebskraft des Motors muß für diesen Beschleunigungsantrieb $F = 1000 \text{ N}$ (etwa 100 kp) betragen. Welche mechanische Leistung muß der Motor abgeben?

Gegeben: $v_2 = 120 \text{ km/h}$; $F = 1000 \text{ N}$; $v_1 = 0 \text{ km/h}$; $t = 30 \text{ s}$

Gesucht: P

$$\text{Lösung: } v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0 \text{ km/h} + 120 \text{ km/h}}{2} = 60 \text{ km/h}$$

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16,7 \text{ m/s}$$

$$s = v \cdot t = \frac{16,7 \text{ m} \cdot 30 \text{ s}}{\text{s}} = 500 \text{ m}$$

$$W = F \cdot s = 1000 \text{ N} \cdot 500 \text{ m} = 500\,000 \text{ Nm} = 500 \text{ kJ}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{500\,000 \text{ Nm}}{30 \text{ s}} = 16\,700 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 16,7 \text{ kW (etwa 22,8 PS)}$$

Die abgegebene Leistung des Antriebsmotors muß $P = 16,7 \text{ kW}$ betragen.

17.4. Wirkungsgrad

Wir haben im Abschnitt 17.2 bereits gehört, daß die Energie immer wieder in andere Energieformen umgewandelt werden kann, z. B. elektrische Energie in mechanische Energie usw. **Jede Energieumwandlung ist jedoch mit Verlusten behaftet**, d. h., neben der gewonnenen umgewandelten Energie tritt eine **Verlustenergie** auf, die der technischen Anwendung verlorengeht. Meistens handelt es sich hierbei um Wärmeverluste, die durch Reibung in den Lagern oder auch durch Stromwärme auftreten.

Beim Elektromotor haben wir Lager- und Luftreibung, die Wicklungen erwärmen sich und es entstehen Magnetisierungsverluste.

Aus diesem Grunde ist bei jedem technischen Vorgang, also auch bei jeder Maschine (z. B. Pumpe, Winde, Motor), die abgegebene Leistung P_{ab} immer um die Verlustleistung P_v kleiner als die zugeführte Leistung P_{zu} .

Das Verhältnis der abgegebenen Nutzleistung P_{ab} zur zugeführten Leistung P_{zu} bezeichnet man in der Technik mit **Wirkungsgrad**, der mit dem Formelzeichen η (Eta) abgekürzt wird.

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}}$$
$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

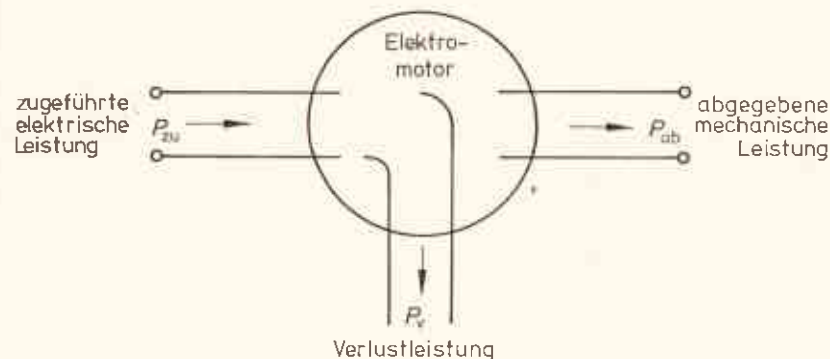


Abb. 17.1 — Elektromotor

$$\eta = \frac{P_{zu} - P_v}{P_{zu}}$$

Der Wirkungsgrad η ist eine dimensionslose Zahl, stets kleiner als 1 bzw. kleiner als 100%, weil die abgegebene Leistung nicht größer als die zugeführte Leistung sein kann.

So bedeutet z. B. ein Wirkungsgrad $\eta = 0,8$:

$$\begin{aligned} \text{zugeführte Leistung} & P_{zu} = 100\% \\ \text{abgegebene Netzleistung} & P_{ab} = 80\% \\ \text{Verlustleistung} & P_v = 20\% \end{aligned}$$

Sind mehrere Energieumwandler zusammengeschaltet, so ergibt sich der Gesamtwirkungsgrad aus der Multiplikation der Teilwirkungsgrade.

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \text{ usw.}$$

Beispiel:

Eine Pumpe mit einem Wirkungsgrad von 0,7 fördert in jeder Sekunde 20 Liter Wasser auf 21 m Höhe. Welche Antriebsleistung ist erforderlich?

Gegeben: $G = 20 \text{ l}$; $h = 21 \text{ m}$; $t = 1 \text{ s}$; $\eta = 0,7$

Gesucht: P_{zu}

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } P_{ab} &= \frac{W}{t} \\ &= \frac{G \cdot h}{t} \\ &= \frac{(20 \cdot 9,81) \text{ N} \cdot 21 \text{ m}}{1 \text{ s}} \end{aligned}$$

$$P_{ab} = 4120,2 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$P_{ab} = 4,12 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

$$\begin{aligned} P_{zu} &= \frac{P_{ab}}{\eta} \\ &= \frac{4120}{0,7} \end{aligned}$$

$$P_{zu} = 5885,7 \text{ Watt}$$

$$P_{zu} = 8 \text{ PS}$$

Übungsaufgaben:

672. Eine Last von 1,2 kN wird um 2,5 m gehoben. Welche Arbeit wird verrichtet?
673. Durch das Heben einer Kabeltrommel wird eine Arbeit von 14000 Nm verrichtet. Wie hoch wird die Kabeltrommel gehoben, wenn sie 5 kN Gewicht hat?
674. Welche Arbeit kann von 12 m³ Wasser verrichtet werden, wenn dies ein Gefälle von 8 m hat?
675. Auf einer Strecke von 12 km Länge muß ein Höhenunterschied von 30 m überwunden werden. Wie groß ist die verrichtete Arbeit bei einem Gewicht von 18 kN?
676. Eine Pumpe hebt in 20 Sekunden 500 l Wasser 12 m hoch. Wie groß ist die Hubarbeit und die Leistung?
677. Welche Leistung in PS hat eine Pumpe, die in 2 Minuten 2,5 m³ Wasser 12 m hochfördert?
678. Ein Lastenaufzug hebt 6 kN mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m/s. Wie groß ist die Hubleistung in kW und PS?

Übungsaufgaben:

679. Ein Generator wird von einem 200-PS-Dieselmotor angetrieben. Seine Leistungsabgabe beträgt 140 kW. Mit welchem Wirkungsgrad arbeitet der Generator?
680. Ein Elektromotor nimmt 12 kW elektrische Leistung auf und gibt 15,6 PS mechanische Leistung ab. Wie groß ist der Wirkungsgrad?
681. Eine Pumpe fördert in jeder Sekunde 30 l Wasser 20 m hoch. Welche Antriebsleistung in kW ist bei einem Wirkungsgrad von 79% erforderlich?
682. Ein 90-PS-Dieselmotor soll durch einen gleich starken Elektromotor ersetzt werden. Wie groß sind Leistungsaufnahme und Leistungsabgabe bei einem Wirkungsgrad von 83%?

18. Einfache Maschinen

18.1. Allgemeines

Goldene Regel der Mechanik:

„Was man an Kraft spart, muß man an Weg zugeben; was man an Weg spart, muß man an Kraft zugeben.“

Diese Regel gilt für sämtliche einfachen Maschinen (z. B. Hebel, schiefe Ebene, Rolle, Flaschenzug) und besagt, daß Arbeit nicht gespart, sondern umgeformt werden kann.

Die Größe der Arbeit, also das Produkt aus Kraft und Weg, ist konstant ($W = F \cdot s$). Bei einer Drehbewegung ist die Antriebskraft (das Drehmoment), also das Produkt aus Kraft und Radius, konstant ($M = F \cdot r$).

18.2. Hebel

Der Hebel ist eine einfache Vorrichtung zum Heben einer Last. Er besteht aus einer festen Stange, die um einen Punkt drehbar gelagert ist.

Nach den Angriffspunkten der Last und der Kraft werden einseitige und zweiseitige Hebel unterschieden. Greifen Kraft und Last auf derselben Hebelseite vom Drehpunkt 0 aus an, ist es ein einseitiger Hebel (Abb. 18.1). Greifen Kraft und Last auf verschiedenen Hebelseiten an, ist es ein zweiseitiger Hebel (Abb. 18.2).

Der Abstand der Kraft F vom Drehpunkt 0 ist der Kraftarm f , der der Last L vom Drehpunkt 0 der Lastarm l .



Abb. 18.1



Abb. 18.2

Für den Hebel gelten folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$\boxed{F \cdot f = L \cdot l}$$

F = Kraft in N
 f = Kraftarm in m
 L = Last in N
 l = Lastarm in m

Einheitengleichung: N · m = N · m

Je länger der Kraftarm ist, um so geringer kann die Kraft sein.

Die verrichtete Arbeit bleibt, unabhängig von der Länge des Kraftarms, gleich groß:

$$W = F \cdot s = \text{konstant.}$$

Durch den Hebel wird nur die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflusst, Arbeit wird nicht eingespart.

Durch den gleicharmigen zweiseitigen Hebel wird nur die Richtung der Kraft geändert.

18.3. Seil und Rolle

Mit einem Seil (Drahtseil, Tau, Schnur, Kette usw.) kann der Angriffspunkt einer Kraft verlegt werden. Zieht man das Seil durch einen Ring oder um einen Pfahl herum, so kann man infolge der Biegsamkeit des Seils die Zugrichtung beliebig ändern. Um die dabei auftretende Reibung zu verringern, kann eine Rolle verwandt werden.

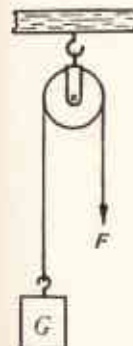


Abb. 18.3

Feste Rolle:

Bei einer festen Rolle greift die Last G an dem einen und die Kraft F am anderen Ende des Seils an.

Wenn man die Reibung vernachlässigt, ist

$$\boxed{F = G}$$

F = Kraft in N
 G = Last in N

Einheitengleichung: N = N

Lose Rolle:

Hier ist das eine Seilende an einem Haken festgemacht, während das andere hochgezogen werden kann. Die lose Rolle — in einer sog. „Flasche“ gelagert — ist ein einarmiger Hebel, und zwar wirkt die Kraft F an dem Hebelarm, der durch den Durchmesser der Rolle gebildet wird, nach oben (Drehpunkt ist die linke Seite des Durchmessers). Die Last G zieht an diesem Hebelarm beim halben Durchmesser der Rolle nach unten. Nach dem Hebelgesetz muß daher sein:

$$F \cdot d = G \cdot \frac{d}{2}$$

$$F = \frac{G}{2}$$



Abb. 18.4

Die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft beträgt also nur die Hälfte der zu hebenden Last. Dies läßt sich auch unmittelbar erkennen; denn die Last hängt an zwei Seilen, so daß sie sich gleichmäßig auf die beiden Seilenden verteilt.

$$F = \frac{G}{2}$$

Soll die Last um 2 m gehoben werden, so müssen wir mit der Kraft einen doppelt so langen Weg, nämlich 4 m, zurücklegen. **Dieser Kraftersparnis um die Hälfte steht ein doppelt so großer Weg der Kraft gegenüber.** Vgl. „Goldene Regel der Mechanik“.

18.4. Flaschenzug

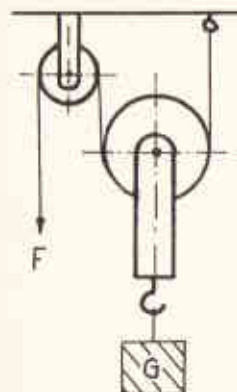
Ein Flaschenzug ist eine Zusammensetzung aus festen und losen Rollen. Dabei verteilt sich die Last gleichmäßig auf sämtliche Seilstücke zwischen den festen und losen Rollen. Da die Zahl der Seilstücke der Zahl der Rollen (n) entspricht, wird eine Last mit der Kraft

$$F = \frac{G}{n}$$

F = Kraft in N
 G = Last in N
 n = Zahl der Rollen

hochgezogen.

Da es sich auch hier um eine Umformung der mechanischen Arbeit handelt, muß die Kraftersparnis mit einem längeren Weg erkauft werden.

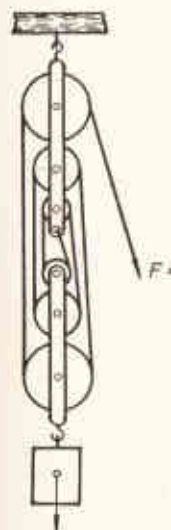


Bei einem Flaschenzug mit einer losen Rolle ergibt sich:

$$F = \frac{G}{2}$$

(Reibung und Gewicht der losen Rolle vernachlässigt)

Abb. 18.5 — Flaschenzug



Bei einem Flaschenzug mit 3 losen Rollen ergibt sich:

$$F = \frac{G}{6}$$

(Reibung und Gewicht der losen Rollen vernachlässigt)

Abb. 18.6 — Flaschenzug

Beispiel:

Eine Last von 2,4 kN soll mit einem Flaschenzug aus je 2 festen und losen Rollen hochgezogen werden. Die losen Rollen wiegen zusammen 40 N. Welche Kraft ist aufzuwenden?

Gegeben: $G = 2,44 \text{ kN}$; $n = 4$ Rollen

Gesucht: F

Lösung: $F = \frac{G}{n} = \frac{2,44 \text{ kN}}{4} = 610 \text{ N}$

Übungsaufgaben:

683. An dem einen Ende eines 3 m langen Hebels wirkt eine Kraft von 260 N. Welche Last kann gehoben werden, wenn der Stützpunkt 0,5 m vom anderen Ende entfernt liegt?
684. Eine 50 cm lange Stange ist an dem einen Ende unterstützt, während am anderen Ende eine Kraft von 320 N senkrecht nach oben wirkt. Welche senkrecht nach unten wirkende Kraft muß in 10 cm Drehpunktabstand angebracht werden, um Gleichgewicht herzustellen?
685. In einem Nußknacker mit 15 cm langen Griffen wird eine Nuß, die 3 cm vom Scharnier entfernt an den Griffen anliegt, zerdrückt. Welche Widerstandskraft setzt die Nußschale ihrer Zerstörung entgegen, wenn 1,5 cm vom Ende der Griffe entfernt eine Kraft von 100 N angreift?
686. Eine 1460 N schwere Last soll durch eine Kraft von 500 N mit einem zweiarmligen Hebel angehoben werden. Wo muß der Hebelstützpunkt liegen, wenn der Hebel 3 m lang ist?
687. Welche Kraft ist erforderlich, um eine 10 kN schwere Last mittels einer 100 N schweren losen Rolle hochzuziehen?
688. An einem zweiseitigen Hebel befindet sich eine Last von 3,8 kN 220 mm vom Drehpunkt entfernt. Welche Entfernung muß die 450 N große Gleichgewichtskraft vom Drehpunkt haben?
689. Zwei Lasten von 850 N und 450 N sollen am Ende eines zweiseitigen Hebels ins Gleichgewicht gebracht werden. Wo muß der Unterstützungspunkt sein?
690. An einem einseitigen Hebel wirkt ein Lastmoment von 1800 Ncm. In welcher Entfernung vom Drehpunkt und in welcher Richtung muß die Kraft von 120 N angreifen, um Gleichgewicht herzustellen?
691. Welche Kraft ist am 220 mm langen Hebelarm einer Werkzeugzange erforderlich, um eine Kraft von 1,5 kN an 50 mm Hebellänge zu erreichen?
692. Welche Kraft benötigt man bei einem Flaschenzug mit einer losen Rolle, um ein Gewicht von 2,2 kN zu heben?
693. Welche Last kann mit einem Rollenflaschenzug mit 2 festen und 2 losen Rollen bei einem Kraftaufwand von 350 N gehoben werden?
694. An einer 450 mm langen Handkurbel einer Winde greift eine Kraft von 300 N an. Welchen Trommeldurchmesser muß die Winde haben, wenn die Last 800 N beträgt?

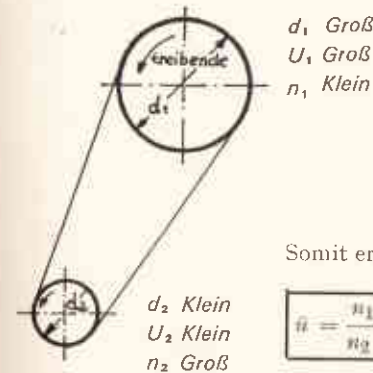
18.5. Übertragen von Drehbewegungen

Oft wird eine drehende Bewegung von einer Welle auf eine andere Welle übertragen. Diese „Übersetzung“ kann durch Riemengetriebe und durch Zahnradgetriebe erfolgen. **Zweck der Übersetzung** ist in der Regel eine **Drehzahlregelung**. Das Verhältnis der Drehzahl n_1 der treibenden Scheibe (bzw. des treibenden Zahnrades) zur Drehzahl n_2 der getriebenen Scheibe (bzw. des getriebenen Zahnrades) wird **Übersetzungsverhältnis** genannt:

$$\bar{u} = \frac{n_1}{n_2} \quad \begin{array}{l} \bar{u} = \text{Übersetzungsverhältnis} \\ n = \text{Drehzahl} \end{array}$$

18.5.1. Übersetzung durch Riemenscheiben

In einer bestimmten Zeit läuft die gleiche Länge des gemeinsamen Riemens über den Umfang der treibenden wie der getriebenen Scheibe. Dabei muß sich die Scheibe mit dem kleineren Durchmesser häufiger drehen als die Scheibe mit dem größeren Durchmesser. Die Umfangsgeschwindigkeit ist jedoch auf beiden Scheiben gleich groß:



$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \\ d_1 \cdot \pi \cdot n_1 &= d_2 \cdot \pi \cdot n_2 \\ d_1 \cdot n_1 &= d_2 \cdot n_2 \\ \frac{n_1}{n_2} &= \frac{d_2}{d_1} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\bar{u} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \begin{array}{l} \bar{u} = \text{Übersetzungsverhältnis} \\ n = \text{Drehzahl} \\ d = \text{Durchmesser} \end{array}$$

Abb. 18.7 — Riemenscheiben

Beispiel:

Ein Motor mit der Drehzahl $n_1 = 1500 \text{ U/min}$ hat eine Riemenscheibe mit dem Durchmesser $d_1 = 60 \text{ mm}$. Welche Drehzahl n_2 hat die von dem Motor angetriebene Maschine, wenn die Riemenscheibe dieser Maschine einen Durchmesser $d_2 = 300 \text{ mm}$ hat?

Gegeben: $d_1 = 60 \text{ mm}$; $d_2 = 300 \text{ mm}$; $n_1 = 1500 \frac{\text{U}}{\text{min}}$
 Gesucht: n_2

Lösung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$$\frac{d_1 \cdot n_1}{d_2} = n_2$$

$$n_2 = \frac{d_1 \cdot n_1}{d_2}$$

$$n_2 = \frac{60 \text{ mm} \cdot 1500 \text{ U/min}}{300 \text{ mm}}$$

$$n_2 = 300 \frac{\text{U}}{\text{min}}$$

18.5.2. Übersetzung durch Zahnräder

Die Radgrößen der Zahnräder werden in der Regel nicht durch den Umfang oder durch den Durchmesser, sondern durch die Zähnezahlen bestimmt.

Somit lautet die Gleichung für das Übersetzungsverhältnis: $i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$.

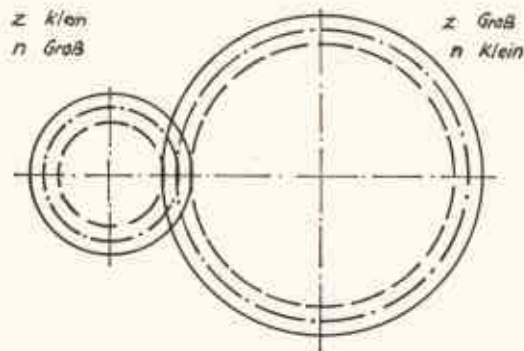


Abb. 18.8 — Zahnräder

Beispiel:

Ein Zahnrad mit 110 Zähnen macht 200 U/min und treibt ein Zahnrad mit 40 Zähnen an. Wie groß ist die Drehzahl des getriebenen Rades?

Gegeben: $z_1 = 110$ Zähne; $n_1 = 200 \frac{\text{U}}{\text{min}}$; $z_2 = 40$ Zähne

Gesucht: n_2

Lösung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{z_1 \cdot n_1}{z_2} = n_2$$

$$n_2 = \frac{z_1 \cdot n_1}{z_2}$$

$$n_2 = \frac{110 \cdot 200 \text{ U/min}}{40}$$

$$n_2 = 550 \text{ U/min}$$

18.6. Schiefe Ebene

18.6.1. Allgemeines

Schwere Lasten sind leichter zu heben oder herabzulassen, wenn zwei oder mehrere Bohlen schräg vom Boden an die Umladerampe oder an den Wagen gelegt werden. Die **Kraft**, die jetzt aufzuwenden ist, ist **kleiner als das Gewicht der Last**; ihre Größe hängt von der **Steigung der geneigten Bahn** ab. Durch die schiefe Ebene wird die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflusst, Arbeit wird nicht eingespart.

Die **Kraftersparnis an der geneigten Bahn** kommt durch die **Kraftzerlegung** zustande. Die Kraft kann in verschiedenen Richtungen an der Last angreifen.

Das lotrecht nach unten wirkende Gewicht L einer Last kann in **zwei Teilkräfte** F_1 und F_2 zerlegt werden (Abb. 18.9). Die Teilkraft F_1 hat das Bestreben, den Körper längs der Ebene abwärts zu bewegen (Hangabtrieb), während die Teilkraft F_2 senkrecht auf die Bahn drückt (Druckkraft). Die Größe der Teilkraft F_1 gibt an, wie groß die Gegenkraft F sein muß, um der Last das Gleichgewicht zu halten, wenn F parallel zur Bahn wirkt.

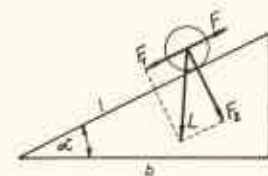


Abb. 18.9 — Schiefe Ebene

Das Kräftedreieck aus L , F_1 und F_2 ist dem Dreieck der geneigten Bahn ähnlich; die Last L entspricht der Länge l , die Druckkraft F_2 der Grundlinie

l und der Hangabtrieb F_1 der Höhe h , der Steigungswinkel α ist gleich dem Winkel, der durch L und F_2 eingeschlossen ist. Wird in die Gleichung für die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt:

$$\begin{aligned} F &= \text{Kraft in N (Hangabtrieb)} \\ l &= \text{Kraftweg in m (geneigte Bahn)} \\ L &= \text{Gewicht der Last in N} \\ h &= \text{Höhe in m} \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$F \cdot l = L \cdot h$$

$$\text{Einheitengleichung: } \text{N} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m}$$

Die aufzuwendende Kraft F errechnet sich demnach an der schiefen Ebene:

$$F = L \cdot \frac{h}{l}$$

$$\text{Einheitengleichung: } \text{N} = \text{N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Die aufzuwendende Kraft F wird also mit länger werdender Bahn l kleiner.

Die Steigung einer geneigten Bahn ist das Verhältnis der Höhe h zur Länge l :

$$\text{Steigung} = \frac{h}{l} = \sin \alpha$$

Wirkt die Kraft parallel zur geneigten Bahn, ist die aufzuwendende Kraft gleich dem Produkt aus Last und Steigung:

$$F = L \cdot \frac{h}{l} = L \cdot \sin \alpha$$

Anders liegen die Kraftverhältnisse, wenn die Kraft parallel zur Grundlinie b angreift (Abb. 18.10), wie es bei einem Keil und einer Schraube der Fall ist.

Das Kräfterdreieck aus L , F_1 und F_2 ist auch hier dem Dreieck der geneigten Bahn ähnlich: die Last L entspricht hier der Grundlinie b , die Druckkraft F_2 der Länge l und die Kraft F (gleich F_1) der Höhe h , der Neigungswinkel α

ist gleich dem Winkel, der durch L und F_2 eingeschlossen ist. Wird in die Gleichgewichtsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} F &= \text{Kraft in N} \\ b &= \text{Kraftweg in m (Grundlinie)} \\ L &= \text{Gewicht der Last in N} \\ h &= \text{Lastweg in m (Höhe)} \end{aligned}$$

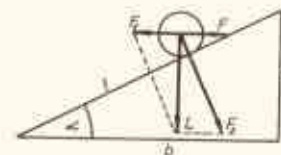


Abb. 18.10

so ergibt sich:

$$F \cdot b = L \cdot h$$

$$\text{Einheitengleichung: } \text{N} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m}$$

Es ist somit:

$$F = L \cdot \frac{h}{b}$$

Die aufzuwendende Kraft F wird also mit länger werdender Grundlinie b kleiner.

Die Neigung einer geneigten Bahn ist das Verhältnis der Höhe h zur Grundlinie b :

$$\text{Neigung} = \frac{h}{b} = \tan \alpha$$

Wirkt die Kraft parallel zur Grundlinie der geneigten Bahn, ist die aufzuwendende Kraft gleich dem Produkt aus Last und Neigung:

$$F = L \cdot \frac{h}{b} = L \cdot \tan \alpha$$

18.6.2. Keil

Der Keil ist von der schiefen Ebene abgeleitet worden. **Durch den Keil wird die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflusst**; er wird in der Form von Messer, Meißel, Beil, Stemmeisen, Sense, Spaten usw. angewendet.

Der Keil ist ein **dreiseitiges Prisma**, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist. Der **Keilwinkel** wird von den Seitenflächen (Seiten s) eingeschlossen und ist ein **spitzer Winkel**. Wird auf den Rücken r des Keils die **Kraft F** ausgeübt, **zerlegt sie sich in zwei gleich große Seitenkräfte L (L_1 und L_2)**, deren Wirkungslinien senkrecht auf beiden Seitenflächen s des Keils stehen.

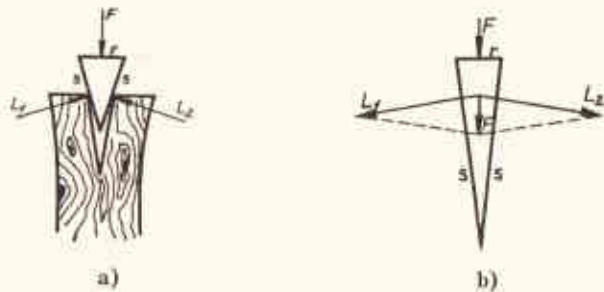


Abb. 18.11 — Keil

Das Kräfteparallelogramm, das beim Zerlegen der Kraft F entsteht, zeigt, daß das **Keildreieck dem Teildreieck der Kräfte ähnlich** ist (Abb. 18.11 b). Aufgrund dieser ähnlichen Dreiecke gilt die Verhältnisgleichung:

$$\frac{F}{L} = \frac{r}{s}$$

Die aufzuwendende Kraft F errechnet sich demnach beim Keil wie folgt:

$$F = L \cdot \frac{r}{s}$$

F = Kraft in N
 L = Seitenkraft in N
 r = Rückenlänge des Keils in m
 s = Seitenlänge des Keils in m

Die Seitenkräfte L eines Keiles sind um so größer, je kleiner das Verhältnis $\frac{r}{s}$ ist, d. h., je kleiner der Keilwinkel ist.

Infolge der an den Seitenflächen auftretenden Reibung sitzt der Keil so fest, daß er auch dann in seiner Lage gehalten wird, wenn die Kraft F nicht mehr wirkt. Anwendung: Befestigen von Riemenscheiben auf Wellen, Verkeilen von Rädern.

18.6.3. Schraube

Die Schraube ist wie der Keil eine Art schiefe Ebene. Bei der Schraube ist die schiefe Ebene um einen zylindrischen Dorn herumgewickelt worden. So entsteht eine Schraubenlinie, wenn um einen Zylinder, dessen Grundfläche den Radius r hat, ein rechtwinkliges aus Papier geschnittenes Dreieck herumgewickelt wird, dessen Grundlinie b dem Kreisumfang des Zylinders $U = 2\pi r$ entspricht (Abb. 18.12). Die Höhe h des Dreieckes ist die Ganghöhe der Schraube. Weil die Kraft F bei der Schraube parallel zur Grundlinie am Umfang der Schraubenspindel angreift, gilt die Gleichung:

$$F = L \cdot \frac{h}{b}$$

F = Kraft in N
 L = Gewicht der Last in N
 h = Ganghöhe der Schraube in m
 b = Kreisumfang $U = 2\pi r$ in m

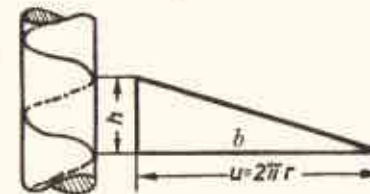


Abb. 18.12 — Schraube

Bei der Schraube muß in diese Gleichung für die Grundlinie b der Umfang der Schraubenspindel U eingesetzt werden:

$$F = L \cdot \frac{h}{U}$$

In der Technik wird aber selten der Umfang einer Schraube angegeben, üblich ist die Angabe des Schraubendurchmessers. Da $U = d \cdot \pi$ ist, folgt:

$$F = L \cdot \frac{h}{d \cdot \pi}$$

h ist die Ganghöhe der Schraube und d der Schraubendurchmesser.

Die Wirkung der Schraube kann vergrößert werden, wenn die Kraft an einem Hebelarm (Kurbel, Schraubenschlüssel oder Flügelschraube) angreift; als Durchmesser d ist dann der doppelte Abstand von Schraubenmitte und Angriffspunkt der Kraft einzusetzen.

Durch die Schraube wird die Größe der aufzuwendenden Kraft verkleinert; Arbeit wird nicht eingespart, weil mit kleiner werdender Kraft der Kraftweg größer wird.

Schrauben werden in der Technik häufig verwendet:

- a) in Pressen, um einen großen Druck mit einer kleinen Kraft auszuüben (Hobelbank, Schraubzwinde, Schraubstock),
- b) zum Heben von Lasten (Hebeböcke) und
- c) zum Bewegen von Land-, Wasser- und Luftfahrzeugen (Schiffsschraube und Luftschraube).

An den Flanken der Schraube tritt eine Reibung auf, so daß die Schraube wie der Keil auch dann fest sitzt, wenn keine Kraft mehr wirkt; die Schraube wird daher häufig als Befestigungsmittel verwendet.

Beispiele:

Mit welcher Kraft zieht ein Fahrzeug abwärts, das auf einer Straße mit einer Steigung 1 : 30 steht und ein Gewicht von 12 kN hat?

Gegeben: $L = 12000 \text{ N}$; $h : l = 1 : 30$

Gesucht: F

Lösung:
$$F = L \cdot \frac{h}{l}$$
$$= 12000 \text{ N} \cdot \frac{1}{30}$$
$$F = 400 \text{ N}$$

Mittels einer Keilpresse soll ein Widerstand von 3,6 kN überwunden werden. Auf den Rücken des Keils soll dabei eine Kraft von 400 N wirken. Wie groß muß das Verhältnis Rücken r zur Seite s und wie groß muß der Keilwinkel φ (Phi) sein?

Lösung:
$$\frac{r}{s} = \frac{F}{L}$$
$$\frac{r}{s} = \frac{400 \text{ N}}{3600 \text{ N}}$$
$$\frac{r}{s} = \frac{1}{9}$$
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{s} = \frac{r}{2s}$$
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{18} = 0,0556$$

Nach Tabelle für sin-Funktionen:

$$\frac{\varphi}{2} = 3^\circ 12'$$
$$\varphi = 2 \cdot \frac{\varphi}{2} = 6^\circ 24'$$

19. Wärme

19.1. Wärmeempfindung, Temperatur

In unserem Sprachgebrauch bedeutet Wärme gleich Wärmeenergie. Die von einem Körper gespeicherte Wärmeenergie ist abhängig von der Art des Werkstoffes, der Masse und der Temperatur.

Durch unser Gefühl können wir unterscheiden, ob ein Körper **warm** oder **kalt** ist. Dieses Urteil über den **Wärmegrad eines Körpers**, über seine **Temperatur**, ist jedoch ungenau und kann beträchtlichen Täuschungen unterworfen sein. Wir empfinden z. B. Wasser mit Zimmertemperaturen als warm, wenn wir vorher die probende Hand in Eiswasser getaucht haben, dagegen das Wasser mit der gleichen Temperatur als kalt, wenn die Hand vorher in heißem Wasser war. Um ein **zuverlässiges Urteil über die Temperatur** eines Körpers zu erhalten, wird die **Veränderung eines Körpers bei Änderung des Wärmegrades** beobachtet. Von besonderer Bedeutung ist dabei die **Wärmeausdehnung der Körper**.

Fast alle Körper dehnen sich aus, wenn sie erwärmt werden, und ziehen sich zusammen, wenn sie sich abkühlen.

Temperaturen werden daher häufig gemessen, indem festgestellt wird, wie sich gewisse **Flüssigkeiten** unter dem Einfluß einer Temperaturänderung **ausdehnen oder zusammenziehen**. Flüssigkeiten werden zum Temperaturmessen verwendet, weil sie sich unter dem Einfluß einer Temperaturerhöhung wesentlich mehr ausdehnen als feste Stoffe und besser zu handhaben sind als Gase. Füllen wir eine Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, in eine Glaskugel, die sich nach oben in einer engen Glasröhre fortsetzt, können wir anhand der Flüssigkeitssäule die Volumenausdehnung ablesen. Ein solches Gerät ist ein **Thermometer**.

Die **Skalenteilung des Thermometers geht von zwei festen Punkten aus, dem Schmelzpunkt und dem Siedepunkt des Wassers**. Das Thermometer wird in schmelzendes Eis (Abb. 19.1a) und anschließend in siedendes Wasser (Abb. 19.1b) gesetzt, wobei der jeweilige Stand der Flüssigkeitssäule durch einen Strich am Glasrohr markiert wird (Abb. 19.1c). Die Temperaturen, bei denen Eis schmilzt und Wasser siedet, sind bei gleichen Druckverhältnissen stets dieselben. Bei der **Celsius-Skala** (Abb. 19.1c) ist der Abstand zwischen den beiden Markierungen (Schmelzpunkt und Siedepunkt) in hundert gleiche Teile eingeteilt. **Der Temperaturunterschied zwischen zwei Teilstrichen ist 1 Wärmegrad**, bei der Celsius-Skala **1 Grad Celsius** (1°C).

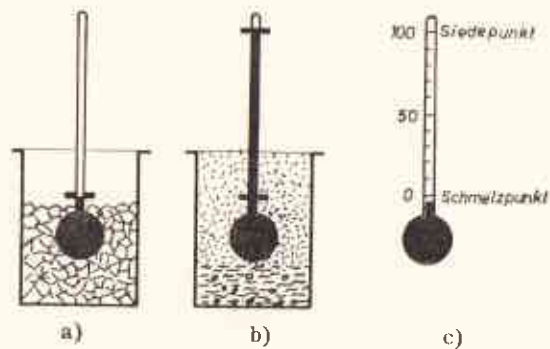


Abb. 19.1

Die Celsius-Skala ist heute fast ausschließlich üblich. Gelegentlich ist im Ausland noch die Skala Réaumur zu finden, bei der der Temperaturunterschied zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt in 80°R eingeteilt ist (Abb. 19.2).

Bei der Skala nach Fahrenheit, die noch in Amerika und England verwendet wird, dient eine Kältemischung aus Eis und Salz zur Bestimmung des Nullpunktes. Der Schmelzpunkt des Eises liegt bei der Fahrenheitskala bei 32°F und der Siedepunkt des Wassers bei 212°F (Abb. 19.2).

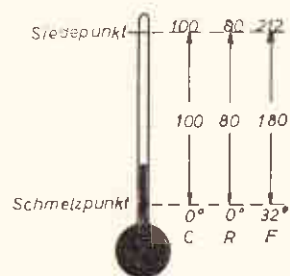


Abb. 19.2

Die gleichmäßige Teilung der Skala kann bei Bedarf unter dem Eispunkt (Minus-Grade) und über dem Siedepunkt fortgesetzt werden.

Bei allen Flüssigkeitsthermometern wird der Temperaturmeßbereich bestimmt durch den Erstarrungs- und Siedepunkt der verwendeten Flüssigkeit, weil durch die Zustandsänderung auch andere Volumenänderungen eintreten. So kann das gewöhnliche Quecksilberthermometer nur für Temperaturmessungen zwischen -39°C und $+200^\circ \text{C}$ angewandt werden. Neben den Flüssigkeitsthermometern, vor allem oberhalb und unterhalb ihrer Meßbe-

reiche, werden **Bimetallthermometer**, **Thermoelemente**, **Widerstandsthermometer** und für sehr hohe Temperaturen **Strahlungsthermometer** benutzt. Beim Bimetallthermometer beruht die Temperaturmessung auf der verschieden großen Wärmeausdehnung von Metallen. Ein Bimetallstreifen besteht aus zwei (zwei = bi) Metallstreifen, die eine unterschiedliche Wärmeausdehnung haben und mechanisch fest miteinander verbunden sind. Bei Erwärmung biegt sich daher der Bimetallstreifen durch. Die Durchbiegung ist ein Maß für die Temperatur, die durch einen Zeiger auf einer Skala angezeigt wird (Abb. 19.3). Je länger der Bimetallstreifen ist, um so größer wird die Durchbiegung und somit der Zeigerausschlag je Wärmeeinheit; damit ein möglichst großer Zeigerausschlag erzielt wird, ist der Bimetallstreifen zu einer Spirale aufgewickelt.

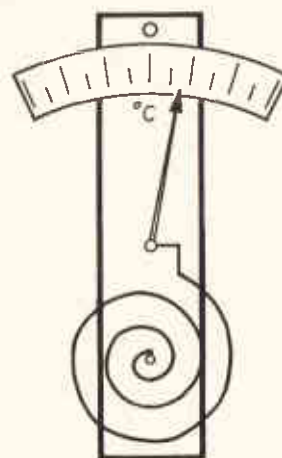


Abb. 19.3 — Bimetallthermometer



Abb. 19.4 — Thermoelement

Thermoelemente bestehen aus zwei Streifen verschiedener Metalle; die beiden Streifen sind an einem Ende mechanisch miteinander verbunden (Abb. 19.4). Wird die Verbindungsstelle erhitzt oder abgekühlt, tritt zwischen den freien Enden der beiden Metallstreifen eine geringe elektrische Spannung auf, deren Größe von der Temperaturänderung abhängig ist. Die Enden der Metallstreifen sind mit einem empfindlichen Millivoltmeter verbunden,

dessen Skala jedoch nicht in Millivolt, sondern in Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) geeicht ist.

Die Eigenschaft elektrischer Leiter, bei Temperaturänderung auch den elektrischen Widerstand zu ändern, wird beim **Widerstandsthermometer** ausgenutzt. Ein empfindliches Galvanometer zeigt die Stromänderung an, die bei konstanter Spannung infolge der Widerstandsänderung auftritt, die durch die Temperaturänderung hervorgerufen wird. Die Skala des Galvanometers ist ebenfalls in $^{\circ}\text{C}$ geeicht. Beim **Strahlungs-pyrometer** wird die empfangene Strahlungswärme auf ein Thermoelement geleitet, das dadurch erwärmt wird und, wie bereits erläutert, die Temperatur anzeigt.

19.2. Absoluter Nullpunkt und absolute Temperatur

Im vorigen Abschnitt wurde gesagt, daß sich fast alle Stoffe ausdehnen, wenn sie erwärmt werden, und sich zusammenziehen, wenn sie sich abkühlen. Das trifft auch auf die gasförmigen Stoffe zu. Bei festen und flüssigen Stoffen ist der Ausdehnungskoeffizient eine echte Stoffkonstante, also von der Art des Stoffes abhängig und je Stoff verschieden. Dagegen ist der **Ausdehnungskoeffizient** für alle Gase nahezu gleich groß; das Volumen aller Gase steigt je Grad Celsius Temperaturerhöhung fast um den gleichen Betrag. Wird Gas unter gleichbleibendem Druck von 0°C auf 100°C erwärmt, steigt das Volumen von 100% (bei 0°C) auf 136,6% (bei 100°C), d. h., je 100°C nimmt das

$$\text{Volumen des Gases um } 36,6\% \text{ zu, je } 1^{\circ}\text{C um } 0,366\% = 0,00366 = \frac{366}{100000} = \frac{1}{273}, \text{ bezogen auf das Volumen bei } 0^{\circ}\text{C. Wird ein Gas abgekühlt,}$$

nimmt das Volumen — immer gleichbleibender Druck vorausgesetzt — je Grad Celsius um $\frac{1}{273}$ des Volumens bei 0°C ab.

Das bedeutet, daß bei einer Temperatur von -273°C ein Gas keinen Raum mehr einnehmen würde; diese Temperatur von -273°C wird als **der absolute Nullpunkt** bezeichnet.

Die Temperatur, die vom absoluten Nullpunkt an gezählt, also auf den **absoluten Nullpunkt** bezogen wird, ist die **absolute Temperatur** T .

Die **absolute Temperatur** wird in Grad Kelvin ($^{\circ}\text{K}$) gemessen. Die Einheit „Grad Kelvin“ ist dieselbe Einheit wie „Grad Celsius“, beide Einheiten beziehen sich jedoch auf verschiedene Nullpunkte:

- die Grad Kelvin werden auf den absoluten Nullpunkt und
- die Grad Celsius auf den Schmelzpunkt des Eises bezogen.

Da der absolute Nullpunkt um -273°C niedriger als der Schmelzpunkt des Eises liegt, wird die **absolute Temperatur** T ermittelt aus der **Celsius-Temperatur** t plus 273°C :

$$T = t + 273^{\circ}\text{C}$$

Besondere Bedeutung haben der absolute Nullpunkt und die absolute Temperatur bei der **Ausdehnung von Gasen** und bei der **Berechnung elektrischer Widerstände**. Der elektrische Widerstand von Leitern nimmt mit sinkender Temperatur sehr schnell ab und wird fast Null bei der absoluten Temperatur $= -273^{\circ}\text{C}$. Der **Zustand elektrischer Leiter** beim absoluten Nullpunkt wird mit **Supraleitfähigkeit** bezeichnet. Der absolute Nullpunkt, die unterste Grenze der Temperatur, wird weder unterschritten noch erreicht werden können.

19.3. Wärmemenge, physikalische Größen der Wärme

Zwei Körper sind im sogenannten **thermischen Gleichgewicht**, wenn sie **dieselbe Temperatur** haben. Berühren sich beide Körper, hat keiner das Bestreben, die Temperatur zu ändern. Berühren sich aber zwei Körper verschiedener Temperatur, gibt der wärmere Körper „**Wärme**“ an den kälteren ab. Dabei kühlt sich der wärmere Körper ab, während sich der kältere erwärmt, bis der thermische Gleichgewichtszustand hergestellt ist, d. h. bis beide Körper dieselbe Temperatur haben.

Eine Temperaturerhöhung hängt von der zugeführten Wärmemenge und von der Masse des Stoffes ab.

Früher wurde die Wärmemenge in Kalorien (cal) gemessen (1 cal erwärmt 1 g Wasser um 1°C). Jetzt geht man aufgrund des Einheitengesetzes von der Energie (Arbeit) aus, die durch Energieumwandlung Wärme hervorruft. Deshalb wird die Wärmemenge Q ebenfalls in Joule gemessen.

Sehr genaue Messungen haben ergeben, daß eine mechanische Arbeit von 4187 Joule aufgewendet werden muß, um 1 kcal zu erzeugen.

$$1 \text{ kcal} = 4187 \text{ Joule}$$

$$1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$$

Die spezifische Wärmekapazität c eines Stoffes gibt an, welche Wärmemenge ein Stoff je kg aufnehmen muß, damit seine Temperatur um 1°C steigt.

Für Wasser ist demzufolge $C = 4187 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C kg}}$. Für andere Stoffe wurden ebenfalls die spezifischen Wärmekapazitäten festgestellt und in Tabellen zusammengefaßt.

Für die Ermittlung der Wärmemenge gilt allgemein:

$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$ $Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)$	$Q =$ Wärmemenge in J $m =$ Masse in kg $c =$ spez. Wärmekapazität in $\frac{\text{J}}{^\circ\text{C kg}}$ $\Delta t =$ Temperaturunterschied in $^\circ\text{C}$
--	--

Einheitengleichung: $\text{J} = \text{kg} \frac{\text{J}}{^\circ\text{C kg}} ^\circ\text{C}$

Beispiele:

a) Welche Wärmemenge ist notwendig, um 10 kg Wasser von 15°C auf 95°C zu erwärmen?

c von Wasser $= 4187$

$$\begin{aligned} Q &= m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \\ &= 10 \cdot 4187 \cdot (95 - 15) \\ &= 10 \cdot 4187 \cdot 80 \\ &= 3349,6 \text{ kJ} \end{aligned}$$

b) Welche Wärmemenge nimmt ein 10 kg schweres Stahlstück von seiner Ausgangstemperatur von 15°C auf, wenn es auf 95°C erhitzt werden soll?

c von Stahl $= 460,57$

$$\begin{aligned} Q &= m \cdot c \cdot \Delta t \\ &= 10 \cdot 460,57 \cdot 80 \\ &= 368,456 \text{ kJ} \end{aligned}$$

c) Wieviel J sind notwendig, um einen LötKolben aus Kupfer von 300 g Gewicht von 20°C auf 320°C zu erwärmen?

c von Kupfer $= 389,4$

$$\begin{aligned} Q &= m \cdot c \cdot \Delta t \\ &= 0,3 \cdot 389,4 \cdot 300 \\ &= 35 \text{ kJ} \end{aligned}$$

19.4. Veränderung (Ausdehnung) der Körper durch Erwärmung

Der englische Botaniker Broun beobachtete 1827, daß sich sehr kleine Teilchen fester Körper in einer Flüssigkeit bewegen, und zwar um so schneller, je kleiner die Teilchen sind. Die kleinsten mechanischen Teilchen eines

Stoffes sind die Moleküle. Daher ist festzustellen, daß sich diese Moleküle dauernd bewegen (**Molekularbewegung**). Jedoch unterscheiden sich die Molekularbewegungen fester, flüssiger und gasförmiger Körper wesentlich voneinander.

Die Wärme kann auch als Bewegungsenergie der Moleküle (**Energie der Molekularbewegung**) aufgefaßt werden. Da die Moleküle fester Körper — bedingt durch die herrschenden Kohäsionskräfte — ihren Platz jedoch nicht verändern können, schwingen sie um eine Gleichgewichtslage hin und her. Wird dem festen Körper Wärme zugeführt, erhalten die Moleküle eine größere Bewegungsenergie; sie schwingen daher weiter aus ihrer Gleichgewichtslage heraus, das Gefüge des Körpers wird dadurch gelockert, und der Körper dehnt sich aus.

Wird dem festen Körper immer mehr Wärme zugeführt, so wird die Bewegungsenergie der Moleküle schließlich so groß, daß die Moleküle nicht mehr im Gleichgewicht bleiben. Die Kohäsionskräfte, die bis jetzt die Moleküle in ihrer Gleichgewichtslage hielten, reichen nicht mehr aus, das feste Gefüge des Körpers aufrechtzuerhalten. **Der feste Körper wird flüssig.** Die Kohäsionskräfte sind gegenüber der Energie der Molekularbewegung nur noch in geringem Umfang wirksam; die Kohäsionskräfte erhalten der Flüssigkeit zwar noch ein bestimmtes Volumen, aber keine feste Gestalt mehr.

Bei weiterem Temperaturanstieg nimmt die Bewegungsenergie der Moleküle weiter zu. Die Geschwindigkeit der Moleküle ist unterschiedlich. **Sehr schnelle Moleküle durchstoßen die Flüssigkeitsoberfläche und entweichen nach außen. Die Flüssigkeit verdampft.** Die Dichte der Körper wird während der Wärmezufuhr immer geringer, die Kohäsionskräfte sind kaum noch wirksam, daher bleibt dem Körper auch ein bestimmtes Volumen nicht mehr erhalten. **Der flüssige Körper wird gasförmig.**

19.5. Längenausdehnung

Alle Körper dehnen sich aus, wenn sie erwärmt werden und ziehen sich zusammen, wenn sie sich abkühlen. Das Maß der Ausdehnung ist abhängig von der Art des Stoffes und von seinem Aggregatzustand.

Je nach der Form der Körper macht sich die Volumenänderung beim Erwärmen oder Abkühlen in einer Änderung der Längen-, Flächen- oder Raumausdehnung bemerkbar. In den folgenden Abschnitten soll die Volumenänderung der Körper in ihren drei Aggregatzuständen untersucht werden.

Die Ausdehnung fester Körper infolge Temperaturänderung ist im Vergleich zu flüssigen und gasförmigen Körpern gering. Die einzelnen Stoffe verhalten sich dabei jedoch verschieden. Der Längenzuwachs, den ein Stab eines bestimmten Stoffes von 1 m Länge beim Erwärmen von 0°C auf 1°C erfährt, ist die Längenausdehnungszahl α oder der Ausdehnungskoeffizient α des

Stoffes: Ein Stab von 1 m Länge verlängert sich beim Erwärmen um 1 °C um α m. Beträgt die Stablänge l_1 m, dehnt sich der Stab beim Erwärmen um 1 °C um $l_1 \cdot \alpha \cdot 1$ (m) aus. Somit ist die Gesamtlänge des Stabes l_2 :

$$l_2 = l_1 + l_1 \cdot \alpha \cdot 1$$

Wird der Stab von der Temperatur t_1 auf die Temperatur t_2 erwärmt, beträgt also der Temperaturunterschied

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

so ist die Gesamtlänge:

$$\boxed{l_2 = l_1 + l_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t}$$

$l = \text{Länge in m}$
 $\alpha = \text{Längenausdehnungszahl in } \frac{1}{^\circ\text{C}}$
 $\Delta t = \text{Temperaturunterschied in } ^\circ\text{C}$

Einheitengleichung: $m = m \left(1 + \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot ^\circ\text{C}\right)$

Innerhalb eines bestimmten Temperaturbereiches ist die **Ausdehnung eines Stabes** beim Erwärmen von 0 °C ausgehend auf eine bestimmte Temperatur t_2 der Temperaturzunahme proportional.

Beim Abkühlen ist die Temperaturänderung Δt negativ einzusetzen. Der Stab verkürzt sich dann gegenüber der Ausgangslänge l :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad t_1 < t_2$$

$$\Delta t = -(t_1 - t_2)$$

Δt ist negativ

Beim Abkühlen, d. h. bei negativer Temperaturänderung, ist die Länge l des Stabes kleiner als die Ausgangslänge l . Die Verlängerung oder Verkürzung infolge Temperaturänderung ist oft recht beträchtlich und darf nicht vernachlässigt werden. Freileitungen hängen z. B. im Sommer stark durch, im Winter dagegen können sie infolge der Verkürzung so straff gespannt sein, daß sie u. U. reißen. Auch bei Brücken, Eisenbahnschienen, Pendeluhren usw. muß die Dehnung durch Erwärmen beachtet werden. Sind Geräte aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzt, ist darauf zu achten, daß durch die verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten keine Spannungen entstehen, die den Körper zerstören könnten.

In nachfolgender Tabelle sind die Längenausdehnungszahlen α für einige Stoffe zusammengestellt:

Längenausdehnungszahlen einiger Stoffe:

Stoff	α je °C
Hartgummi	0,000080
Aluminium	0,000024
Bronze	0,000018
Kupfer	0,000017
Zement	0,000014
Eisen, Stahl	0,000011
Platin	0,000009
Glas	0,000006
Holz	0,000003
Porzellan	0,000003

Beim Erwärmen dehnt sich ein fester Körper nicht nur in seiner Länge aus, sondern auch in seiner Breite und Höhe. **Die Fläche und das Volumen werden größer.**

1. Beispiel:

Eine Kupferleitung hat bei $t_1 = 10$ °C eine Länge $l_1 = 500$ m. Wie groß ist die Länge bei $t_2 = 30$ °C und die Verkürzung bei $t_3 = -20$ °C?

Lösung:

α für Kupfer = 0,000017

$$\begin{aligned} l_1 &= 500 \text{ m} & l_2 &= l_1 + l_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t_{1,2} \\ t_1 &= 10 \text{ } ^\circ\text{C} & &= 500 + 500 \cdot 0,000017 \cdot 20 \\ t_2 &= 30 \text{ } ^\circ\text{C} & &= 500 + 0,17 \\ l_2 &= ? & &= 500,17 \text{ m} \\ t_3 &= -20 \text{ } ^\circ\text{C} & l_3 &= l_1 + l_1 \cdot \alpha \cdot \Delta t_{1,3} \\ l_3 &= ? & &= 500 + 500 \cdot 0,000017 \cdot (-30) \\ & & &= 500 - 0,255 \\ & & &= 499,745 \text{ m} \end{aligned}$$

2. Beispiel:

Die Erde hat am Äquator einen Umfang von rund 40000 km. Ein um den Erdumfang gelegter Eisenring wird um $\Delta t = 1$ °C erwärmt. Wie weit steht der Ring jetzt von der Erdoberfläche ab?

Lösung:

$$\alpha \text{ für Eisen} = 0,000011 = 11 \cdot 10^{-6}$$

$$l_1 = 40 \cdot 10^6 \text{ m} = 40000000 \text{ m}$$

$$\Delta t = 1^\circ\text{C}$$

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

$$= 40 \cdot 10^6 (1 + 0,000011 \cdot 1)$$

$$= 40 \cdot 1,000011 \cdot 10^6$$

$$l_2 = 40,00044 \cdot 10^6 = 40000440 \text{ m}$$

$$U = 2\pi r$$

$$r = \frac{U}{2\pi}$$

$$r_1 = \frac{U}{2\pi}$$

$$= \frac{40000000}{6,28}$$

$$r_1 = 6369426,75 \text{ m}$$

$$\Delta r = r_2 - r_1$$

$$= 6369469,81 - 6369426,75$$

$$\Delta r = 70,06 \text{ m}$$

$$r_2 = \frac{U}{2\pi}$$

$$= \frac{40000440}{6,28}$$

$$r_2 = 6369469,81 \text{ m}$$

Der Eisenring steht 70,06 m von der Erdoberfläche ab.

20. Akustik

20.1. Schallerregung

Alles, was wir mit dem Gehör wahrnehmen, nennt man Schall (Sprache, Rauschen des Waldes, Klingeln des Weckers usw.).

Ein Schall entsteht durch schnelle aufeinanderfolgende Schwingungen eines elastischen Körpers (Stimmgabel, Stimmbänder, Musikinstrumente, Membran eines Lautsprechers oder Fernhörers).

Je nach Art der Schwingungen unterscheidet man:

- den Ton, der sich aus einer sinusförmigen Schwingung ergibt,
- den Klang, der sich aus mehreren, in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehenden Tönen zusammensetzt,
- das Geräusch, das durch mehrere unregelmäßig zusammengesetzte Töne entsteht und
- den Knall, der sich aus einer Vielzahl unterschiedlicher Töne ergibt, die gleichzeitig, kurz und heftig auftreten.

20.2. Schallausbreitung

Der Schall muß vom Schallerreger zum Schallempfänger übertragen werden. Die Schwingungen des Schallerregers versetzen die Luft in seiner Umgebung in Schwingungen; die dabei entstehenden Verdichtungen und Verdünnungen der Luft werden als Schallwellen bezeichnet.

Der Schall breitet sich, von Luftmolekül zu Luftmolekül fortpflanzend, nach allen Seiten hin gleichmäßig aus, bis er auf den Schallempfänger trifft, z. B. im Gehörgang des Ohres auf das Trommelfell. Das Trommelfell gerät dadurch in Schwingungen und leitet den Schall in das innere Ohr weiter.

Der Hörschall besteht aus Luftdruckschwankungen, die wir mit unserem Gehör wahrnehmen können.

Zur Übertragung des Schalls vom Schallerreger auf das Ohr ist also die Luft als Schallträger nötig. Selbstverständlich können auch feste, flüssige oder andere gasförmige Stoffe als Schallträger wirken und Schallwellen übertragen.

Der Schall wird von elastischen Körpern besser übertragen als von plastischen. Plastische Körper, wie Watte, Asche, Filz, Wolle, Torfmoos, eignen sich daher zur Schalldämmung bzw. -isolierung.

In luftleeren Räumen (im Vakuum) pflanzt sich eine Schallwelle nicht fort, weil dort keine Schallträger vorhanden sind.

Treffen Schallwellen auf eine elastische Wand, dann werden sie zurückgeworfen. Für die Richtung der zurückgeworfenen Schallwellen gilt das Reflexionsgesetz:

Bei ebener Reflexionsfläche sind Einfallswinkel und Reflektionswinkel einer Schallwelle gleich groß.

Den zurückgeworfenen Schall bezeichnen wir als **Echo**. An unser Ohr gelangen also zweimal Schallwellen, die von ein und demselben Schallerreger herühren; einmal kommen die Schallwellen unmittelbar von dem schwingenden Körper selbst, zum anderen durch Zurückwerfen (Reflexion) von der Wand. Damit beide Schalleinwirkungen, der unmittelbare Schall und das Echo, von unserem Ohr getrennt wahrgenommen werden können, muß zwischen ihrem Empfang ein Zeitraum von mindestens 1/10 Sekunde liegen.

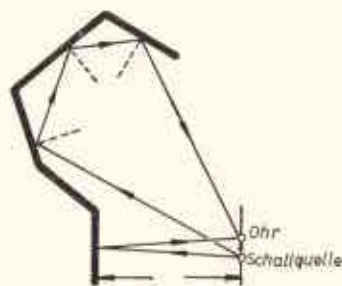


Abb. 20.1 — Echo

Nachhall entsteht, wenn das Echo wegen des zu kleinen Zeitunterschiedes zwischen dem Eintreffen der unmittelbaren und der reflektierten Schallwelle nicht mehr wahrgenommen wird. In den meisten Fällen wirkt sich ein zu langer Nachhall als störend aus. Durch die Ausstattung der Räume mit schalldämmenden Werkstoffen kann man den störenden Nachhall vermindern.

Durch Trichter, Glasplatten, Hohlspiegel usw. kann der Schall gebündelt oder abgelenkt werden (Schalltrichter, Sprachrohr, Hörrohr usw.).

20.3. Physikalische Größen des Schalls

Um die physikalischen Wirkungen in einem Schallfeld bestimmen zu können, bedient man sich der Schallgrößen. Die Benennungen, Formelzeichen und Einheiten der Schallgrößen sind nach dem **Internationalen Einheitensystem** festgelegt. Durch diese Größen ist es möglich, die Auswirkungen von Schallwellen hinsichtlich der Tonhöhe und Lautstärke usw. rechnerisch zu ermitteln und festzusetzen.

(Eine Zusammenstellung der Größen des Schalls finden Sie am Schluß dieses Abschnittes.)

20.3.1. Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Schall in einem Stoff ausbreitet.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Schallgeschwindigkeit	c	Meter pro Sekunde	m/s

Die Schallgeschwindigkeit ist abhängig von der Art des Stoffes, in dem sich der Schall ausbreitet, und von der Temperatur.

Schallgeschwindigkeit					
Stoff	c m/s	Stoff	c m/s	Stoff	c m/s
Kautschuk	35	Benzol	1350	Kohlendioxid	260
Kork	500	Öl	1400	Sauerstoff	322
Blei	1200	Quecksilber	1450	Luft	340
Kupfer	3900	Wasser	1480	Stickstoff	345
Holz	3000			Helium	1005
Eisen	5800			Wasserstoff	1330

Beispiel:

Ein Spaziergänger beobachtet das Aufleuchten eines Gewitterblitzes und hört anschließend das Donnern. Die Zeit, die zwischen diesen beiden Wahrnehmungen liegt, mißt er zu $t = 2 \text{ s}$. Wie weit ist der Blitzschlag von seinem Standort entfernt gewesen?

Gegeben: $t = 2 \text{ s}$; $c = 340 \text{ m/s}$

Gesucht: s

Lösung: $c = \frac{s}{t}$ umstellen nach s

$$s = c \cdot t = \frac{340 \text{ m} \cdot 2 \text{ s}}{\text{s}} = 680 \text{ m}$$

Die Entfernung zwischen dem Standort des Spaziergängers und dem Blitzschlag beträgt $s = 680 \text{ m}$.

20.3.2. Wellenlänge

Die Wellenlänge ist der Quotient aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls und der Frequenz.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Wellenlänge	λ (Lambda)	Meter	m

Größengleichung

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

λ = Wellenlänge in m
 c = Schallgeschwindigkeit in m/s
 f = Frequenz in Hz

Einheitengleichung

$$\text{m} = \frac{\text{m/s}}{1/\text{s}}$$

Beispiel:

Die Frequenz des Kammertones a beträgt $f = 440 \text{ Hz}$. Die Schallgeschwindigkeit in Luft von $t = 20^\circ \text{C}$ ist $c = 340 \text{ m/s}$. Wie groß ist die Wellenlänge der Schallwelle?

Gegeben: $f = 440 \text{ Hz}$; $c = 340 \text{ m/s}$

Gesucht: λ

$$\text{Lösung: } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{440 \text{ 1/s}} = 0,774 \text{ m} = 77,4 \text{ cm}$$

Die Wellenlänge der Schallwelle für die Frequenz von $f = 440 \text{ Hz}$ beträgt $\lambda = 77,4 \text{ cm}$.

20.3.3. Frequenz

Eine Luftdruckverstärkung und eine Luftdruckverminderung einer Schallwelle stellt eine Periode der Schallwelle dar. **Die Anzahl der Perioden je Sekunde ist die Frequenz des Schalls.** Die Dauer einer Periode nennt man die Periodendauer.

Begriffe	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Frequenz	f	Hertz	Hz
Periodendauer	T	Sekunde	s

Größengleichung

$$f = \frac{1}{T}$$

f = Frequenz in Hz
 T = Periodendauer in s
Die technische Einheit für Hz ist 1/s.

Einheitengleichung

$$\frac{1}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$$

Beispiel:

Die Frequenz des Kammertones a ist $f = 440 \text{ Hz}$. Wie groß ist die Periodendauer dieses Tones?

Gegeben: $f = 440 \text{ Hz}$

Gesucht: T

$$\text{Lösung: } T = \frac{1}{f} = \frac{1000}{440} = 2,27 \text{ ms}$$

Die Periodendauer des Kammertones a beträgt $T = 2,27 \text{ ms}$.

Von der Frequenz der Schallwelle ist die Höhe eines Tones abhängig. Hohe Töne weisen eine hohe Frequenz und niedrige Töne eine niedrige Frequenz auf. Für Frequenzhöhen und Frequenzabweichungen ist das menschliche Ohr allgemein sehr empfindlich. Personen mit gutem Gehör nehmen die Frequenzabweichung eines Tones von weniger als 0,1 v.H. ohne weiteres wahr.

20.3.4. Schalldruck

Der Schalldruck ist die Kraft, die auf eine Fläche von einem Quadratmeter gleichmäßig ausgeübt wird. Die Größe der Kraft ist dabei der Höchstwert der Druckschwankung einer Schallwelle.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Schalldruck	p	Pascal ¹⁾	Pa ²⁾

Größengleichung

$$p = \frac{F}{A}$$

p = Schalldruck in Pa
 F = Höchstwert der Schallwelle in N
 A = Flächeneinheit in m²

Einheitengleichung

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Beispiel:

Der Höchstwert der Druckschwankungen einer Schallwelle beträgt $F = 2 \mu\text{N}$. Diese Kraft wirkt auf eine Mikrofonmembrane, die eine wirksame Fläche von $A = 4 \text{ cm}^2$ aufweist. Wie groß ist der Schalldruck der Schallwelle?

Gegeben: $F = 2 \mu\text{N}$; $A = 4 \text{ cm}^2$

Gesucht: p

$$\text{Lösung: } p = \frac{F}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ N}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2 = 5 \text{ mPa}^3)$$

Der Schalldruck der Schallwelle beträgt $p = 5 \text{ mPa}$.

Von dem Schalldruck einer Schallwelle ist die Lautstärke des Tones abhängig. Laute Töne weisen einen starken Schalldruck, leise Töne einen schwachen Schalldruck auf. Für Lautstärke und Lautstärkenunterschiede ist das menschliche Ohr allgemein sehr unempfindlich. Eine Verdoppelung des Schalldrucks hinterläßt bei uns nicht etwa den Eindruck einer doppelten Lautstärke des Schalls. Soll sich unsere Lautstärkenempfindung verdoppeln, dann muß die Lautstärke ungefähr zehn- bis tausendmal stärker werden.

¹⁾ Pascal, französischer Physiker 1623—1662

²⁾ $1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$

³⁾ $5 \text{ mPa} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ bar} = 50 \text{ nbar}$; dies entspricht einem Schalldruck von etwa $0,05 \text{ mp/cm}^2$ entsprechend der ungefähren Lautstärke unserer Umgangssprache.

20.3.5. Schalldruckpegel

Der Schalldruckpegel ist ein Maß für die Lautstärkenempfindung unseres Gehörs. Diese Größe entspricht nicht den physikalischen Werten des Schalldrucks. Um aber dennoch die Lautstärkenempfindung mit Hilfe des Schalldruckpegels berechnen zu können, bedient man sich des **logarithmischen Rechnens**.

Für die Berechnung des Schalldruckpegels hat man eine Bezugshäufigkeit von $f = 1000 \text{ Hz}$ und einen Bezugswert für den Schalldruck von $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$ festgelegt. Bei dieser Frequenz ist die Lautstärkenempfindung des menschlichen Ohres etwa verhältnismäßig dem Logarithmus des auf den Bezugswert p_0 bezogenen Schalldrucks.

Das bedeutet, daß sich der **Schalldruckpegel** und damit unsere Lautstärkenempfindung **linear verändert**, wenn der **Schalldruck logarithmisch verstärkt wird**. Der Unterschied zwischen einer linearen und einer logarithmischen Größenveränderung ist nachstehend verdeutlicht.

Eine Größe verändert sich dann **linear**, wenn der Wertzuwachs stets gleich groß ist.

Größe = 10	Größenveränderung (z. B. Schalldruckpegel)				
	$1 \cdot 10 = 10$	$2 \cdot 10 = 20$	$3 \cdot 10 = 30$	$4 \cdot 10 = 40$	usw.

Der Wertzuwachs beträgt gleichmäßig 10 Einheiten.

Eine Größe verändert sich **logarithmisch**, wenn die Hochzahlenveränderung stets gleich groß ist.

Größe = 10	Größenveränderung (z.B. Schalldruck)				
	$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$	usw.

Die Hochzahl vermehrt sich jeweils um eine Einheit; der Wertzuwachs beträgt dann jeweils das Zehnfache des vorherigen Wertes.

Für den Hörschall gilt also, daß sich der Schalldruck mindestens verzehnfachen muß, wenn wir die doppelte Lautstärkenempfindung erreichen wollen.

Schalldruckpegel (Lautstärke) und Schalldruck stehen praktisch in folgendem Zusammenhang:

Schalldruck- pegel in Dezibel ¹⁾	0	20	40	60	80	100	120	140
Schalldruck in Pascal	0,00002	0,0002	0,002	0,02	0,2	2,0	20	200

Der Zusammenhang zwischen dem Schalldruck und dem Schalldruckpegel ist in nachstehender Darstellung verdeutlicht.

¹⁾ Dezibel = $1/10 \text{ Bel}$; nach Graham Bell, englischer Physiologe 1847—1922.

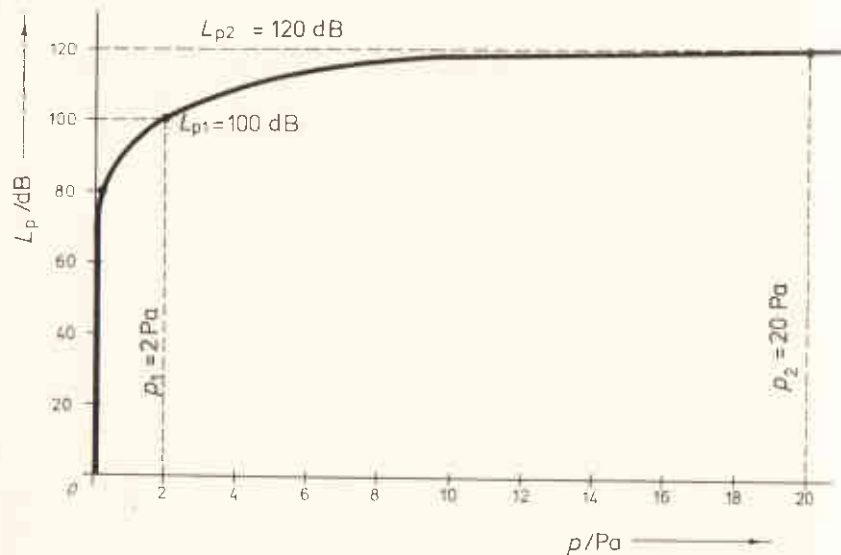


Abb. 20.2 — Schalldruck-Schalldruckpegel-Diagramm

Wir erkennen, daß der Schalldruck jeweils auf den zehnfachen Wert ansteigt, während sich der Schalldruckpegel nur linear um den gleichen Anteil, nämlich 20 Dezibel, vermehrt. **Der Schalldruckpegel ist dabei eine logarithmische Verhältnisgröße**, die ihren mathematischen Ausdruck in der folgenden Größengleichung findet. Die Einheit des Schalldruckpegels ist eigentlich Eins, jedoch nennen wir den Wert dieser logarithmischen Verhältnisgröße das **Dezibel**.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Schalldruckpegel	L_p	Dezibel	dB

Größengleichung

$$L_p = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}$$

L_p = Schalldruckpegel in dB
 p = Schalldruck in Pa
 p_0 = Bezugswert des Schalldrucks von 20 μ Pa

Einheitengleichung

$$1 = 1 \cdot \frac{\text{N/m}^2}{\text{N/m}^2} = \frac{\text{Pa}}{\text{Pa}}$$

1. Beispiel:

Eine Schallwelle weist einen Schalldruck von $p = 2$ mPa auf. Wie groß ist der Schalldruckpegel?

Gegeben: $p = 2$ mPa; $p_0 = 20$ μ Pa

Gesucht: L_p

Lösung: $L_p = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} = 20 \cdot \lg \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}}{20 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}}$

$$L_p = 20 \cdot \lg 0,1 \cdot 10^3 = 20 \cdot \lg 100$$

Der Wert für den $\lg 100$ ist 2, weil $10^2 = 100$ ergibt.

$$L_p = 20 \cdot 2 = 40 \text{ dB}$$

Der Schalldruckpegel der Schallwelle beträgt $L_p = 40$ dB.

2. Beispiel:

Eine Schallwelle weist einen Schalldruck von $p = 5$ mPa auf. Wie groß ist der Schalldruckpegel?

Gegeben: $p = 5$ mPa; $p_0 = 20$ μ Pa

Gesucht: L_p

Lösung: $L_p = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} = 20 \cdot \lg \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}}{20 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}}$

$$L_p = 20 \cdot \lg 0,25 \cdot 10^3 = 20 \cdot \lg 250$$

Der Wert für $\lg 250$ muß einer Tabelle entnommen werden: $\lg 250 = 2,38$, weil $10^{2,38} = 250$ ergibt.

$$L_p = 20 \cdot 2,38 = 47,6 \text{ dB}$$

Der Schalldruckpegel der Schallwelle beträgt $L_p = 47,6$ dB.

An diesen beiden Beispielen können wir erkennen, daß eine Schalldruckverstärkung von 2 mPa auf 5 mPa uns den Eindruck einer Lautstärkensteigerung von 40 dB auf 47,6 dB vermittelt. Während sich der Schalldruck mehr als verdoppelt hat, hat sich die Lautstärkenempfindung nur um 7,6 dB (etwa 20 — 25 v.H.) erhöht. **Schalldruck und Schalldruckpegel sind also nicht linear, sondern logarithmisch verhältnismäßig.**

3. Beispiel:

Bei einer guten Musikwiedergabe im Konzertsaal schwankt der Schalldruckpegel zwischen 10 dB und 90 dB; der Schalldruck beim Schalldruckpegel von 10 dB beträgt $60 \mu\text{Pa}$. Welchen Wert hat der stärkste Schalldruck bei der Musikwiedergabe?

Gegeben: $L_{p1} = 10 \text{ dB}$; $L_{p2} = 90 \text{ dB}$; $p_2 = 60 \mu\text{Pa}$

Gesucht: p_1

Lösung: $L_p = L_{p2} - L_{p1} = 90 \text{ dB} - 10 \text{ dB} = 80 \text{ dB}$

$$L_p = 20 \cdot \lg \frac{p_1}{p_2} \quad \text{umstellen nach } \lg \frac{p_1}{p_2}$$

$$\lg \frac{p_1}{p_2} = \frac{L_p}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

$$\frac{p_1}{p_2} = 10^4 \quad \text{umstellen nach } p_1$$

$$p_1 = 10^4 \cdot p_2 = 10^4 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} = 60 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} = 600 \text{ mPa}$$

Der stärkste Schalldruck bei der Musikwiedergabe beträgt $p_1 = 600 \text{ mPa}$. Der Lautstärkenunterschied umfaßt hierbei die Lautstärke von leisem Flüstern bis zur lauten Autohupe.

Nachstehend ist die Schwingung einer Schallwelle dargestellt, deren Werte den vorstehenden Rechenbeispielen entsprechen:

Frequenz $f = 440 \text{ Hz}$, Wellenlänge $\lambda = 77,4 \text{ cm}$, Periodendauer $T = 2,27 \text{ ms}$, Höchstwert der Schallwelle $F = 2 \mu\text{N}$, Schalldruck $p = 2 \text{ mPa}$ und Schalldruckpegel $L_p = 40 \text{ dB}$.

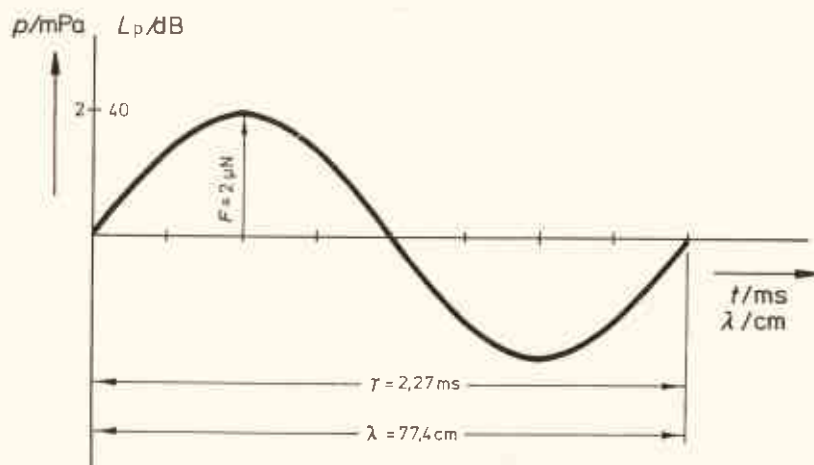


Abb. 20.3 — Schallschwingung

20.4. Hörbereich

Das menschliche Ohr nimmt Schallwellen wahr, deren Frequenzen in dem Bereich von 16 Hz bis etwa 20000 Hz liegen. Der Wahrnehmungsbereich hinsichtlich des Schalldrucks liegt etwa zwischen $20 \mu\text{Pa}$ bis 20 Pa ; dies entspricht einem Schalldruckpegel von 0 bis 130 Dezibel.

Schallwellen, deren Frequenzen unter 16 Hz liegen, nennt man **Infraschall**. Schallwellen, deren Frequenzen über 20000 Hz liegen, werden als **Ultraschall** bezeichnet. Schallwellen aus diesen Frequenzbereichen nimmt unser Ohr nicht mehr wahr, obwohl sich physikalisch nichts weiter geändert hat als die Frequenz der Schallwellen.

Schallwellen, deren Schalldruck unter $20 \mu\text{Pa}$ liegt, nimmt unser Ohr ebenfalls nicht mehr wahr, weil dieser Druck so gering ist, daß er im Gehör keinen Reiz mehr auslösen kann. Schallwellen, deren Schalldruck größer ist als 20 Pa , nehmen wir nicht mehr als Schall, sondern als Schmerzempfindung in unserem Ohr wahr. Diese beiden Schalldruckgrenzen bezeichnet man als **Hörschwelle bei $20 \mu\text{Pa}$** und **Schmerzschwelle bei 20 Pa** . Hör- und Schmerzschwelle sind jedoch nicht für alle Frequenzen gleich groß. Durch Versuche hat man die Hör- und Schmerzschwelle für die verschiedenen Frequenzen des Hörbereichs festgestellt und in einer Hörfläche zusammengestellt.

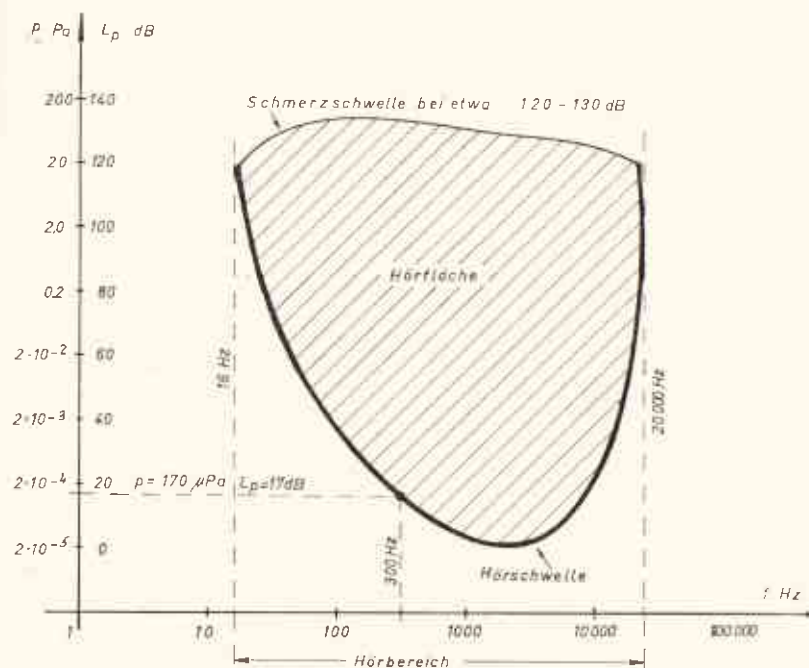


Abb. 20.4 — Hörfläche des menschlichen Ohres

Für die Hörfläche ist auf der waagerechten Achse die Frequenz logarithmisch aufgetragen, d. h., die Linienabschnittslängen und die Hochzahlen der Frequenzwerte sind verhältnismäßig. Auf der senkrechten Achse ist der Schalldruckpegel linear, der Schalldruck jedoch logarithmisch aufgetragen. Will man die Werte einer im logarithmischen Maßstab aufgetragenen Größe ablesen, dann muß man dabei bedenken, daß der Wertzuwachs im ersten Bereich des Linienabschnitts wesentlich größer ist als im letzten Bereich. Praktisch können die abzulesenden Zwischenwerte eines logarithmischen Maßstabes jedoch nur geschätzt werden.

Der niedrigste Punkt der Hörfläche liegt bei etwa 3000 Hz und 20 μPa . Bei dieser Frequenz ist unser Ohr am empfindlichsten, weil es diesen geringen Schalldruck bereits wahrzunehmen vermag. Bei der Frequenz von 100 Hz liegt jedoch die Hörschwelle erst bei etwa 100 μPa , so daß das Ohr für diese Frequenz unempfindlicher ist. Bei einem Frequenzgemisch, in dem diese beiden Frequenzen mit gleich starkem Schalldruck auf unser Gehör einwirken, nehmen wir die tiefe Frequenz leiser und die höhere Frequenz lauter wahr. Für Frequenzen, die über 3000 Hz liegen, wird unser Ohr wiederum mit zunehmender Frequenz unempfindlicher. Die Schmerzschwelle unseres Ohres ist nicht so stark frequenzabhängig.

Beispiel:

Anhand der Hörfläche des menschlichen Ohres soll die Hörschwelle für die Frequenz von $f = 300$ Hz ermittelt werden. Wie stark ist für diese Hörschwelle der Schalldruck und wie hoch ist der Schallpegel?

Gegeben: $f = 300$ Hz; Hörfläche (Abb. 20,4)

Gesucht: p ; L_p

Lösung: Von der waagerechten Achse aus wird bei $f = 300$ Hz eine Senkrechte gezeichnet, die die Umrandungslinie der Hörfläche schneidet. Vom Schnittpunkt der Senkrechten mit der Umrandungslinie aus wird eine Waagerechte gezeichnet, die die senkrechte Achse des Schalldrucks und des Schallpegels schneidet. Von der senkrechten Achse werden die gesuchten Werte abgelesen:

$$p = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} = 170 \text{ } \mu\text{Pa} \quad L_p = 17 \text{ dB}$$

Für $f = 300$ Hz beträgt der Hörschwellenschalldruck $p = 170 \text{ } \mu\text{Pa}$ entsprechend einem Schalldruckpegel von $L_p = 17 \text{ dB}$.

Schalldruck und Schalldruckpegel von Schallquellen können meßtechnisch ermittelt werden. In nachstehender Tabelle sind diese Werte für verschiedene Schallquellen zusammengestellt.

Schallgrößen für Schallquellen

Schallquelle	Schalldruck- pegel in Dezibel	Schalldruck in Pa
Hörschwelle, Bezugswert für den Schalldruckpegel	0	0,00002
Leises Flüstern in 3 m Abstand, Blätterrauschen	10	0,00006
Feiner Landregen, Uhrenticken	20	0,0002
Normales Flüstern in 1 m Abstand	30	0,0006
Zerreißen von Papier in 1 m Abstand, leise Unterhaltungssprache	40	0,002
Unterhaltungssprache in 1 m Abstand, Schreibmaschinenlärm	50	0,006
Lautsprecher in Zimmerlautstärke in 1 m Abstand, laute Unterhaltung	60	0,02
Lautes Gespräch in 1 m Abstand, Straßenlärm	70	0,06
Lautes Rufen in 1 m Abstand, Autohupen, starker Straßenlärm	80	0,2
Autohupe in 1 m Abstand, Preßluftbohrer, Kreissäge	90	0,6
Automotor ohne Schalldämpfer in 3 m Abstand, Niethammer	100	2,0
Starktonhorn und Flugzeugmotor in 6 m Abstand	110	6,0
Flugzeugmotor in 3 m Abstand, Düsentriebwerk in unmittelbarer Nähe	120	20
Schmerzschwelle	130	60

Der von unserem Ohr wahrzunehmende Schalldruckunterschied umfaßt demnach Schalldruckschwankungen von 20 μPa bis 60 Pa. Dieser Schalldruckunterschied entspricht einem Schalldruckpegelunterschied von 0 bis 130 dB. Den Schalldruckpegelunterschied, der von einem Schallsender wahrgenommen bzw. von einem Schallsender abgegeben werden kann, bezeichnet man als **Dynamik** des Schallsenders bzw. Schallempfängers. Die Dynamik des menschlichen Ohres beträgt also 130 dB. Bei der Rundfunkübertragung beträgt die Dynamik des vom Lautsprecher abgestrahlten Schalls etwa nur 40 dB. Beim Fernsprechen ist der Umfang der Dynamik etwa 30 dB.

20.5. Schallsender

Jeder Körper, der in der Lage ist, die ihn umgebende Luft oder einen anderen Körper in Schwingungen zu versetzen, ist ein **Schallsender**. Für unsere Sprache wird der Schallsender durch die Stimmbänder, die sich im Kehlkopf befinden und durch die aus der Lunge herausströmende Luft in Schwingungen versetzt werden, dargestellt. Für **künstliche Schallsender** verwendet man **Membranen**. Sie bestehen aus sehr dünnflächigen Körpern, die infolge einer Energieumwandlung in Schwingungen gebracht werden. Die Membranschwingung überträgt sich auf die die Membran umgebende Luft und pflanzt sich in ihr weiter fort. Die bekanntesten Schallsender sind die **Lautsprecher** und **Fernhörer**, die der Musik- und der Sprachübertragung dienen. Aber auch Sirenen, Autohupen, Wecker und Schnarren sind viel verwendete Schallsender. Für jede Fernsprechverbindung werden Fernhörer verwendet. Sie haben die Aufgabe, die ankommende elektrische Energie in Schallenergie umzuformen.

20.6. Schallempfänger

Der bekannteste und wichtigste Schallempfänger ist das Gehör. Von ihm werden die ankommenden Schallwellen aufgenommen und über das Nervensystem in Hörempfindungen und Sinnesvorstellungen umgewandelt. **Künstliche Schallempfänger** sind alle Vorrichtungen, die die auftreffende Schallenergie in eine andere Energieform umwandeln. Auch für den Schallempfang sind dünnflächige **Membranen** gut geeignet, weil sie die Luftdruckschwankungen des Schalls möglichst widerstandsarm mitmachen sollen. Im Mikrofon, dem wichtigsten künstlichen Schallempfänger, werden die auftreffenden Schallwellen in elektrische Energie umgewandelt, die dann bis zum Schallsender des Empfangsortes weitergeleitet wird.

20.7. Schallaufzeichnung

Schallwellen können aufgezeichnet oder gespeichert werden, wobei der zeitliche Schwingungsvorgang entweder mechanisch in den Rillen einer Schallplatte, optisch auf dem Filmstreifen des Tonfilms oder magnetisch auf Stahldrähten sowie eisenhaltigen oder ferromagnetischen Bändern festgehalten wird. Die erstarrte Form des Schalls ist jederzeit wieder in die ursprüngliche Gestalt der Schallwellen umwandelbar. Schallaufzeichnungsgeräte, die an die Anschlußleitung von Fernsprechapparaten angeschlossen werden können, gewinnen immer mehr an Bedeutung. Die Anschaltung von Schallaufzeichnungsgeräten an das öffentliche Fernsprechnetz ist jedoch genehmigungspflichtig.

Physikalische Größen des Schalls				
Begriff	Formelzeichen	Einheit		Größengleichung
		Benennung	Kurzzeichen	
Schallgeschwindigkeit	c	Meter pro Sekunde	m/s	$c = \frac{s}{t} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Wellenlänge	λ	Meter	m	$\lambda = \frac{c}{f} \quad \text{m}$
Frequenz	f	Hertz	Hz	$f = \frac{1}{T} \quad \text{Hz}$
Schalldruck	p	Pascal	Pa	$p = \frac{F}{A} \quad \text{Pa}$
Schalldruckpegel	L_p	Dezibel	dB	$L_p = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} \quad \text{dB}$

Übungsaufgaben:

695. Rechnen Sie die Schallgeschwindigkeit von $c = 340 \text{ m/s}$ in die Größenordnung km/h um.
696. Das Echo einer Schallwelle wird nach $t = 2 \text{ s}$ nach dem Aussenden des Schalls wahrgenommen. Wie weit ist die Reflexionswand von der Schallquelle entfernt?
697. Von einem Echolot wird die Ausbreitungsdauer der Schallwelle zwischen dem Schiffsrumpf und dem Meeresboden zu $t = 80 \text{ ms}$ gemessen. Wie tief ist das Fahrwasser, in dem sich das Schiff befindet?
698. Ein Fernhörer wird mit einem Wechselstrom von $f = 800 \text{ Hz}$ erregt. Wie groß sind die Periodendauer und die Wellenlänge der ausgestrahlten Schallwelle?

Übungsaufgaben:

699. Der Höchstwert der auf eine Mikrofonmembran von $A = 4 \text{ cm}^2$ auftreffenden Schallwelle beträgt $F = 2,2 \text{ }\mu\text{N}$. Wie groß ist der Schalldruck, mit dem die Membran betätigt wird?
700. Ein Fernhörer gibt eine Schallwelle mit einem Schalldruck von $p = 0,6 \text{ mPa}$ ab. Wie groß ist der Schalldruckpegel der ausgestrahlten Schallwelle?
701. Eine Trompete strahlt einen Schalldruck von $p = 200 \text{ mPa}$ ab. Wie groß ist der Schalldruckpegel?
702. Eine Sirene heult mit einem Schalldruckpegel von $L_p = 100 \text{ dB}$ auf. Welchem Schalldruck entspricht dieser Schalldruckpegel?

21. Optik

21.1. Lichtquellen und Lichtausbreitung

Mit Licht bezeichnet man alle physikalischen Erscheinungen, die wir mit unserem Auge wahrnehmen können. Körper, von denen ein solcher Lichtreiz ausgeht, nennt man Lichtquellen. Das Licht breitet sich von den Lichtquellen geradlinig und strahlenförmig nach allen Seiten hin in den Raum aus. Treffen die Lichtstrahlen auf feste Körper, dann werden sie von diesen zurückgeworfen, man sagt, das Licht wird reflektiert¹⁾. Erst durch die Reflexion der Lichtstrahlen durch die beleuchteten Körper werden diese für uns sichtbar. Lichtstrahlen, die nicht in unser Auge treffen, sind für uns unsichtbar.

Lichtquellen sind selbstleuchtende Körper, von denen Lichtstrahlen ausgehen.

Lichtstrahlen sind elektromagnetische Wellen. Sie breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit von $c = 300\,000 \text{ km/s}$ in den freien Raum aus. Die Wellenlänge des Lichts beträgt 400 nm bis 800 nm ²⁾; elektromagnetische Wellen von dieser Wellenlänge werden von uns als Licht wahrgenommen. Der Wellenlängenbereich des Lichts entspricht einem Frequenzbereich von 750 THz bis 375 THz ³⁾.

Beispiel:

Die Entfernung zwischen Sonne und Erde beträgt 150 Millionen Kilometer. In welcher Zeit gelangt das von der Sonne ausgestrahlte Licht zur Erde?

Gegeben: $s = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$; $c = 300\,000 \text{ km/s}$

Gesucht: t

Lösung: $v = \frac{s}{t}$ umstellen nach t !

$$t = \frac{s}{v} = \frac{150 \cdot 10^6 \text{ km}}{300\,000 \text{ km/s}} = \frac{150 \cdot 10^6 \text{ s}}{3 \cdot 10^5} = \frac{1500 \text{ s}}{3} = 500 \text{ s}$$

$$t = \frac{500}{60} = 8,33 \text{ min}$$

Das Sonnenlicht gelangt in $t = 8,33 \text{ min}$ zur Erde.

(Eine Zusammenstellung der lichttechnischen Größen finden Sie am Schluß dieses Abschnittes).

¹⁾ reflektieren = zurückstrahlen, spiegeln

²⁾ $800 \text{ nm} = 800 \text{ Nanometer} = 800 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0,000\,000\,800 \text{ m}$

³⁾ $375 \text{ THz} = 375 \text{ Terahertz} = 375 \cdot 10^{12} \text{ Hz} = 375\,000\,000\,000\,000 \text{ Hz}$

Die elektromagnetischen Wellen sind nach ihren Wellenlängen in verschiedene Anwendungsbereiche eingeteilt worden:

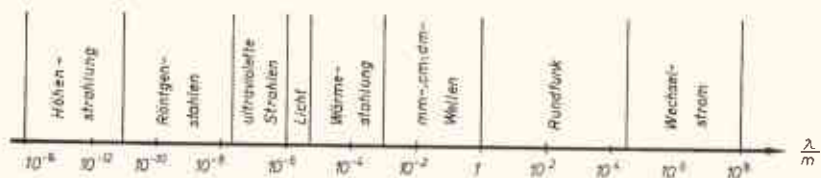


Abb. 21.1 — Elektromagnetische Wellen und Wellenlängen

Innerhalb des Wellenlängenbereichs des sichtbaren Lichts entspricht jede Wellenlänge einer bestimmten Farbe. Ein Lichtstrahl mit der Wellenlänge von $400 \text{ nm} \hat{=} 750 \text{ THz}$ erscheint uns als violettes Licht; beträgt die Wellenlänge eines Lichtstrahls $800 \text{ nm} \hat{=} 375 \text{ THz}$, dann vermittelt er uns den Eindruck des roten Lichts.

Die Farbe des Lichts ist von der Wellenlänge bzw. von der Frequenz des Lichtstrahls abhängig.



Abb. 21.2 — Wellenlänge und Lichtfarbe

Die im Licht enthaltenen Farben bilden das sichtbare Farbspektrum¹⁾ des Lichts. Eine Mischung sämtlicher Farben des sichtbaren Lichts ergibt weißes Licht. Umgekehrt kann das Licht mit Hilfe von Prismen²⁾ oder Wassertropfen (Regenbogen) in die verschiedenen Spektralfarben zerlegt werden. Sechs Spektralfarben des Lichts werden namentlich hervorgehoben:

Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau und Violett.

Wir können jedoch nicht nur die sechs Spektralhauptfarben, sondern insgesamt etwa 140 verschiedene Farbtöne unterscheiden.

¹⁾ Spektrum = ein durch Lichtzerlegung entstehendes farbiges Band

²⁾ Prisma = Lichtstrahlenbrecher

Beispiel:

Ein Lichtstrahl hat die Frequenz von 500 THz . Wie groß ist die Wellenlänge des Lichtstrahls und welchen Farbton weist er auf?

Gegeben: $f = 500 \text{ THz}$; $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$

Gesucht: λ ; Farbton

$$\text{Lösung: } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{300\,000 \text{ km/s}}{500 \cdot 10^{12} \text{ 1/s}} = \frac{300\,000}{500} \cdot 10^{-12} \text{ km} = 600 \cdot 10^{-12} \text{ km}$$

$$\lambda = 600 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

Die Wellenlänge des Lichtstrahls beträgt $\lambda = 600 \text{ nm}$; der Farbton ist gelb/orange.

21.2. Reflexion

Fallen Lichtstrahlen auf einen Gegenstand, dann wird das Licht von dem Gegenstand zurückgeworfen; man sagt, das Licht wird reflektiert. Helle Gegenstände reflektieren das Licht sehr stark, dunkle Körper dagegen weniger. Die Oberflächen von Flüssigkeiten weisen eine besonders große Reflexion auf. Oberflächen, die das Licht sehr stark reflektieren, heißen **Spiegel**. Im allgemeinen bestehen Spiegel aus polierten Glasflächen, die auf der Rückseite mit einer dünnen Silberschicht belegt sind.

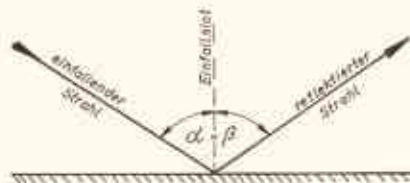
21.2.1. Reflexion am ebenen Spiegel

Ein ebener Spiegel ist ein Körper, von dem die auftreffenden Lichtstrahlen fast völlig wieder zurückgeworfen werden. Dem Betrachter erscheint hinter der Spiegelebene ein optisches Abbild des vor dem Spiegel befindlichen Gegenstandes, das symmetrisch zur Spiegelebene liegt.

Für die Ermittlung der Lage des optischen Spiegelbildes hinter dem Spiegel gilt das Reflexionsgesetz. Hiernach werden die auf eine Fläche auftreffenden Lichtstrahlen so zurückgeworfen, daß der auftreffende Strahl und der reflektierte Strahl mit dem Einfallslot gleich große Winkel bilden.

Das Reflexionsgesetz lautet:

Bei der Reflexion von Lichtstrahlen ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallwinkel.



21.3 — Reflexionsgesetz

Jeder leuchtende Punkt vor einer Spiegelebene sendet Lichtstrahlen aus, die nach der Reflexion an der Spiegelfläche ins Auge des Betrachters treffen. Der Betrachter sucht den Ursprung des ankommenden Lichtstrahls in der geradlinigen spiegelrückwärtigen Verlängerung und sieht so den Leuchtpunkt hinter der Spiegelebene liegen. Die Lage des optischen Abbildes hinter dem Spiegel läßt sich mit Hilfe des Reflexionsgesetzes ermitteln.

In der Abbildung 21.4 befindet sich der Gegenstand G vor dem Spiegel. Von diesem Gegenstand soll die Lage der Leuchtpunkte a und b des Spiegelbildes ermittelt werden, wenn das Spiegelbild vom Betrachtungspunkt B aus betrachtet wird.

Die von den Gegenstandspunkten a und b ausgehenden Lichtstrahlen werden in der Spiegelebene derart gebrochen und zum Betrachtungspunkt geleitet, daß der Einfallswinkel gleich dem Ausfallwinkel ist. Die Abstände zwischen dem Gegenstand und dem Spiegel sowie zwischen dem Spiegelbild und der Spiegelfläche sind stets gleich groß. Der Schnittpunkt, der sich aus der Waagerechten und der Verlängerung der Lichtstrahlen zwischen dem Betrachtungspunkt und dem Spiegel ergibt, zeigt die Lage des jeweiligen Leuchtpunktes des Spiegelbildes an.

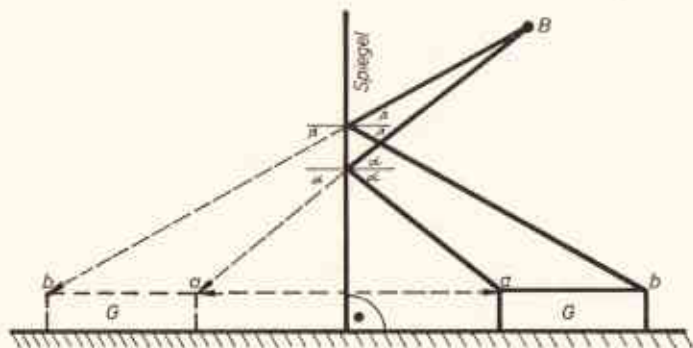


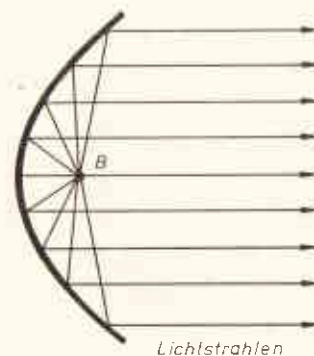
Abb. 21.4 — Reflexion am ebenen Spiegel

21.2.2. Reflexion am Hohlspiegel

Der Hohlspiegel ist ein Teil einer inneren Kugelfläche. Treffen parallelverlaufende Lichtstrahlen in einen Hohlspiegel, dann werden sie so reflektiert, daß die reflektierten Lichtstrahlen alle in einem Punkt zusammentreffen. Dieser Punkt wird als **Brennpunkt** des Hohlspiegels bezeichnet. Der Abstand des Brennpunktes von der Hohlspiegelfläche ist von dem Krümmungsradius des Hohlspiegels abhängig; man bezeichnet diesen Abstand als **Brennweite** des Hohlspiegels.

Wird bei einem Hohlspiegel eine punktförmige Lichtquelle genau in den Brennpunkt gehalten, dann haben die von dem Hohlspiegel zurückgeworfenen Lichtstrahlen alle einen parallelen Verlauf. Diese Eigenschaft des Hohlspiegels macht man sich vor allem bei Scheinwerfern zur Bündelung der Lichtstrahlen zunutze.

Ein Hohlspiegel, der durch die Drehung einer Parabel¹⁾ um ihre Achse entsteht, heißt Parabolspiegel. In dieser Form hat der Hohlspiegel zur **Bündelung** des Lichts, aber auch zur Bündelung von Funkwellen, eine große praktische Bedeutung.



In der Abb. 21.5 ist die Wirkungsweise eines Parabolspiegelscheinwerfers dargestellt. Im Brennpunkt B befindet sich eine punktförmige Lichtquelle. Die von der Lichtquelle ausgesendeten Lichtstrahlen werden im Parabolspiegel reflektiert und parallelverlaufend zurückgeworfen. Hierdurch erhält man einen stark gebündelten, nach vorn gerichteten Lichtstrahl.

21.5 — Parabolspiegel

21.3. Lichtbrechung

Die Richtung eines Lichtstrahles kann nicht nur mit Hilfe eines Spiegels verändert werden. Trifft ein Lichtstrahl schräg auf die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen durchsichtigen Stoffen, z. B. Luft und Wasser, dann ändert er seine Richtung; man sagt, der Lichtstrahl wird **gebrochen**. Die Größe der Lichtbrechung ist abhängig von dem Einfallswinkel des eintreffenden Lichtstrahls und der Art des Stoffes, in den der Strahl übergeht.

¹⁾ Parabel = Kegelschnittkurve

In nachstehender Tabelle sind die verschiedenen Brechungswinkel für den Lichtübergang von Luft in Wasser bzw. Luft in Glas aufgeführt.

Lichtbrechung beim Übergang		
von Luft	in Wasser	in Glas
Einfallswinkel α/grd	Brechungswinkel β/grd	
0°	9°	0°
20°	$14,8^\circ$	$13,0^\circ$
40°	$28,8^\circ$	$25,4^\circ$
60°	$40,5^\circ$	$35,3^\circ$
80°	$47,6^\circ$	$41,0^\circ$
90°	$48,6^\circ$	$41,8^\circ$

Beispiel:

Ein Lichtstrahl trifft mit einem Einfallswinkel von $\alpha = 60^\circ$ auf die Wasseroberfläche eines Wasserbehälters. Ein Teil dieses Lichtstrahles wird mit dem Ausfallswinkel $\alpha = 60^\circ$ reflektiert. Der größte Teil des Lichtstrahles dringt jedoch in die Wasseroberfläche ein und wird hier gebrochen. Der Brechungswinkel, der zwischen dem Lichtstrahl und dem Einfallslot liegt, beträgt $\beta = 40,5^\circ$ (Abb. 21.6).

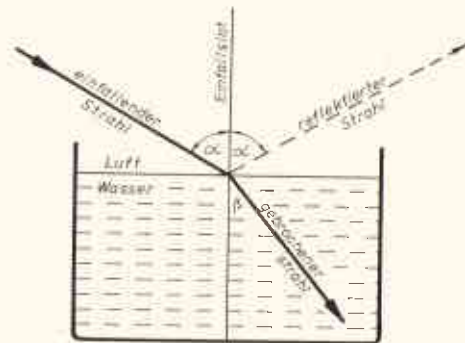


Abb. 21.6 — Lichtbrechung

Durch die Lichtbrechung sind Gegenstände, die sich im Wasser befinden und von der Luft aus betrachtet werden, nicht an ihrem tatsächlichen Ort, sondern in einer gehobenen Lage sichtbar. Auch ein Löffel, der schräg ins Wasser getaucht wird, erscheint uns an der Oberfläche geknickt zu sein.

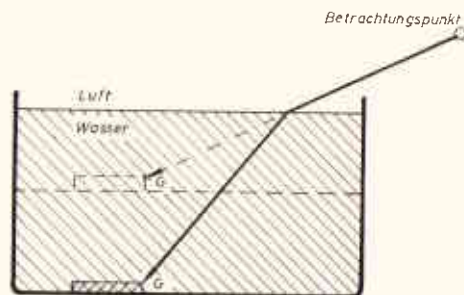


Abb. 21.7 — Lichtbrechung

In der Abb. 21.7 sind das optische Bild sowie der tatsächliche Ort eines im Wasser befindlichen Gegenstandes dargestellt.

Fallen die Lichtstrahlen jedoch durch eine Fensterscheibe, dann bleibt ihre Richtung unverändert; sie werden lediglich ein wenig parallelverschoben. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Lichtstrahlen beim Glasdurchgang zweimal gebrochen werden, und zwar einmal beim Eintritt in das Glas und das zweite Mal beim Austritt aus dem Glas, wenn sie in die Luft wieder zurückkehren.

21.4. Optische Linsen

Optische Linsen sind durchsichtige Körper, die auf einer oder auf beiden Seiten meist kugelförmig gewölbte Oberflächen haben. In der Regel werden optische Linsen aus reinem Glas hergestellt; für besondere Zwecke stellt man sie jedoch auch aus Steinsalz oder Quarz her.

Sind die Linsenkörper in der Mitte dicker als an ihrem Rand, dann nennt man sie **konvexe¹⁾ Linsen**. Diese Linsenart hat die Eigenschaft, Lichtstrahlen zu sammeln; sie heißen daher auch **Sammellinsen**. Das uns allen bekannte Brennglas ist z. B. eine Sammellinse. Sind die Linsenkörper in der Mitte dünner als an ihrem Außenrand, dann sind es **konkave²⁾ Linsen**. Durch diese Linsenart werden eintreffende Lichtstrahlen zerstreut; sie heißen daher auch **Zerstreuungslinsen**.

21.4.1. Sammellinse

Treffen parallelverlaufende Lichtstrahlen auf eine Sammellinse, dann werden sie beim Durchgang durch den Linsenkörper zweimal derart gebrochen, daß sie auf der anderen Linsenseite in einem Punkt zusammentreffen.

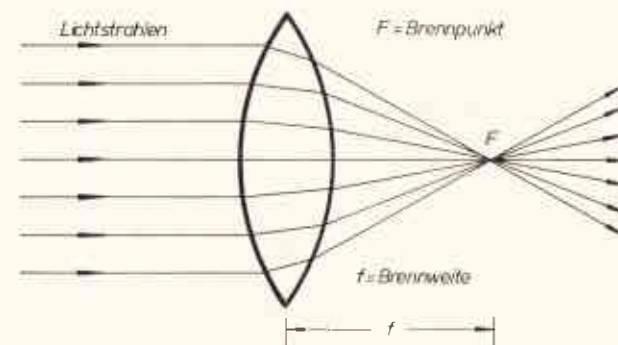


Abb. 21.8 — Sammellinse

¹⁾ konvex = erhaben, nach außen gewölbt

²⁾ konkav = hohl, nach innen gewölbt

Der Punkt, in dem alle Lichtstrahlen gesammelt werden, ist der **Brennpunkt der Sammellinse**. Der Abstand zwischen der Linsenkörpermitte und dem Brennpunkt ist die **Brennweite**. Die Größe der Brennweite ist von der Stärke und vom Wölbungsradius der Sammellinse abhängig.

Jede Sammellinse hat zwei Brennpunkte, die auf beiden Seiten der Linse mit gleichem Brennweitenabstand liegen. Dies kann man leicht selbst beobachten, indem man ein Brennglas umdreht und dabei die gleiche Wirkung wie vorher im Brennpunkt feststellt.

Wir wollen nun den Strahlengang einer Sammellinse umkehren. Vom Brennpunkt aus sollen die Lichtstrahlen auf eine Sammellinse treffen und von dieser gebrochen werden. Welcher Strahlenverlauf ergibt sich nun auf der anderen Linsenseite?

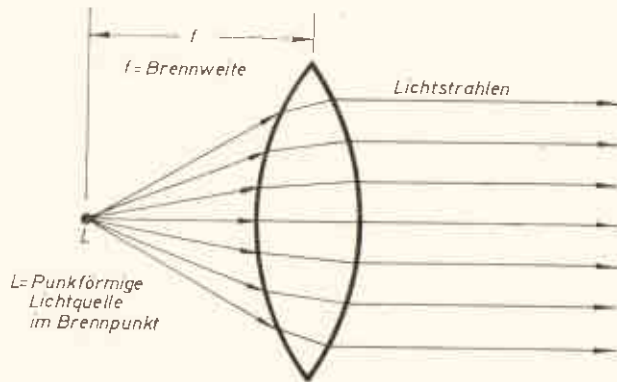


Abb. 21.9 — Sammellinse

In der Abb. 21.9 können wir erkennen, daß sich die Wirkung von Sammellinsen umkehren läßt. Die vom Brennpunkt strahlenförmig ausgehenden Lichtstrahlen werden in der Sammellinse so gebrochen, daß sie auf der anderen Linsenseite parallel weiterlaufen. Weicht die Lage der Lichtquelle von der Lage des Brennpunktes ab, dann verlaufen die Lichtstrahlen auf der anderen Linsenseite nicht mehr parallel. Bei geringerem Brennweitenabstand werden die Lichtstrahlen gestreut; sie gehen auseinander. Ist der Abstand der Lichtquelle größer als die Brennweite, dann werden die Lichtstrahlen gesammelt. Wir kennen diesen Vorgang von einem Bildwerfer, bei dem das wiedergegebene Bild immer dann unscharf ist, wenn der Lichtquellenabstand nicht richtig eingestellt worden ist.

Wir wollen uns nun überlegen, wie das von einem Bildwerfer wiedergegebene Bild auf einer davorgestellten Leinwand entsteht. Hierzu müssen wir wissen, daß die Lichtstrahlen, die durch die Linsenmitte verlaufen, von der Linse nicht gebrochen werden. Dies ist auch aus den Abb. 21.8 und 21.9 ersichtlich.

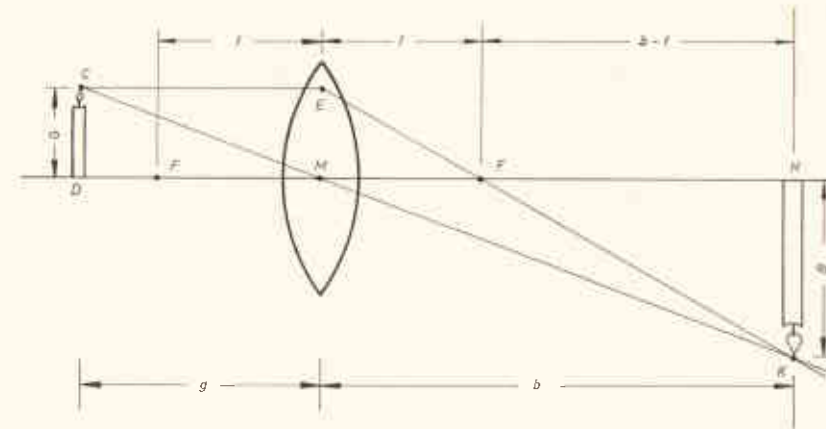


Abb. 21.10 — Optisches Bild einer Sammellinse

Der in der Abb. 21.10 linksseitig befindliche Gegenstand G (brennende Kerze) soll mit Hilfe der Sammellinse rechtsseitig als optisches Bild B vergrößert abgebildet werden. Der Gegenstand befindet sich außerhalb der Brennweite f .

Nach dem Lichtstrahlenverlauf ist das Dreieck CDM dem Dreieck KHM ähnlich, d.h., ihre Seitenlängen sind verhältnismäßig. Das gleiche gilt auch für die Dreiecke EMF und KHF . Hieraus ergeben sich folgende Verhältnismäßigkeiten:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Die Bildhöhe verhält sich zu der Gegenstandshöhe wie der Bildabstand zum Gegenstandsabstand.

$$\frac{B}{G} = \frac{b - f}{f}$$

Bildhöhe und Gegenstandshöhe verhalten sich wie der Gegenstands-Brennweitenabstand zur Brennweite.

$$\frac{b}{g} = \frac{b - f}{f}$$

Bildabstand und Gegenstandsabstand verhalten sich wie der Gegenstands-Brennweitenabstand zur Brennweite.

Die letzte Verhältnismäßigkeitsgleichung wird umgestellt:

$$b \cdot f = g \cdot (b - f) = g \cdot b - g \cdot f$$

Wenn wir sämtliche Produkte dieser Gleichung durch den gemeinsamen Hauptnenner $b \cdot g \cdot f$ teilen und die Gleichung entsprechend umformen, dann ergibt sich daraus die **Linsengleichung**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

In Worten ausgedrückt lautet die Linsengleichung:

Der umgekehrte Wert der Brennweite einer Sammellinse ist die Summe der umgekehrten Werte von Gegenstands- und Bildabstand.

Man verwendet die Linsengleichung zur Berechnung des Abbildungsmaßstabes, der Bildhöhe oder der Brennweite der verwendeten Sammellinse. Der Abbildungsmaßstab ist dabei das Verhältnis der Bildhöhe zur Gegenstandshöhe.

Beispiel:

Von der Sammellinse eines Bildwerfers betragen: Brennweite $f = 18 \text{ cm}$, die Gegenstandshöhe $G = 36 \text{ mm}$ und der Gegenstandsabstand $g = 18,6 \text{ cm}$. a) Wie groß ist der Bildabstand? b) Wie groß ist der Abbildungsmaßstab? c) Welche Höhe hat das optische Bild des Gegenstandes?

Gegeben: $f = 18,0 \text{ cm}$; $g = 18,6 \text{ cm}$; $G = 36 \text{ mm}$

Gesucht: b; A; B

Lösung: $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ umstellen nach b!

$$b = \frac{g \cdot f}{g - f} = \frac{18,6 \text{ cm} \cdot 18,0 \text{ cm}}{18,6 \text{ cm} - 18,0 \text{ cm}} = \frac{335 \text{ cm}^2}{0,6 \text{ cm}} = 560 \text{ cm}$$

$$A = \frac{B}{g} = \frac{b}{g} = \frac{560 \text{ cm}}{18,6 \text{ cm}} = 30 : 1$$

$$B = G \cdot A = 36 \text{ mm} \cdot 30 = 1080 \text{ mm} = 1,08 \text{ m}$$

Die gesuchten Größen betragen: Bildabstand zwischen dem Projektor und der Leinwand $b = 5,60 \text{ m}$, Abbildungsmaßstab $A = 30 : 1$ und die Bildhöhe $B = 1,08 \text{ m}$.

21.4.2. Zerstreuungslinse

Treffen parallelverlaufende Lichtstrahlen auf eine Zerstreuungslinse, dann werden sie beim Durchgang durch den Linsenkörper derart gebrochen, daß sie auf der anderen Seite auseinandergehen; **die Lichtstrahlen werden zerstreut**. Denkt man sich die Streulinien rückwärtig verlängert, dann schneiden sich die Verlängerungslinien alle in einem Punkt. Dies ist der (scheinbare) **Brennpunkt** der Zerstreuungslinsen. Der Abstand zwischen der Linsenkörpermitte und dem Brennpunkt ist die **Brennweite der Linse**. Die Größe der Brennweite und damit die Größe der Zerstreuungswinkel ist von der Stärke und dem Wölbungsradius der Zerstreuungslinse abhängig.

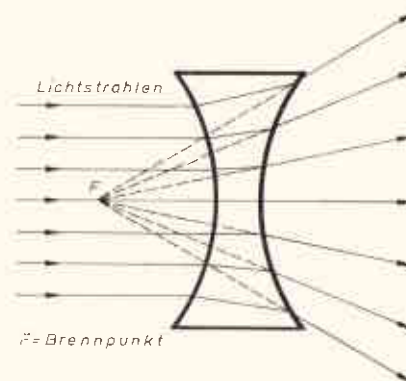


Abb. 21.11 — Zerstreuungslinse

Die Zerstreuungslinse wird als Einzellinse nahezu überhaupt nicht verwendet, so daß ihre praktische Bedeutung geringer ist als die der Sammellinse. Bei Linsenkombinationen, für die Sammellinsen und Zerstreuungslinsen zu einer Einheit zusammengesetzt werden, kommt auch der Zerstreuungslinse größere Bedeutung zu. Die verschiedenartigsten Linsenkombinationen sind in fast allen optischen Geräten wie z. B. Fotoapparaten, Bildwerfern und Filmvorführungsgeräten eingebaut.

21.5. Physikalische Größen des Lichts

Wenn wir die Helligkeit unserer Umgebung bestimmen wollen, dann sind unsere Augen nur sehr wenig dazu geeignet. Der Grund für diese Unzulänglichkeit liegt darin, daß wir die Gesamthelligkeit von z. B. 6 Kerzen von der von 5 Kerzen kaum zu unterscheiden vermögen. Ähnlich wie unser Gehör gegenüber der Lautstärke sehr unempfindlich ist, so ist unser Auge gegen geringere Helligkeitsschwankungen nahezu unempfindlich. Zur Helligkeitsmessung bedienen wir uns daher eines Fotometers (Fotometer werden z. B. als Belichtungsmesser für die Bestimmung der Belichtungsdauer beim Fotografieren verwendet).

Aber welche Werte werden eigentlich mit einem Belichtungsmesser, dessen Skala doch in Zeit- und Blendwerten geeicht ist, gemessen? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir die Grundgrößen des Lichts näher kennenlernen.

21.5.1. Lichtstärke

Die Grundgröße des Lichts ist die **Lichtstärke**, die eine Lichtquelle aufweist. Die international festgelegte Einheit für die Lichtstärke ist das Candela¹⁾. **Eine gewöhnliche Stearinkerze hat ungefähr die Lichtstärke von einem Candela**. Stellen wir beispielsweise drei Kerzen zusammen, dann haben die drei Kerzen eine Gesamtlichtstärke von drei Candela.

Wie alle anderen physikalischen Grundgrößen setzen sich auch die Größen des Lichts jeweils aus dem Begriff, dem Formelzeichen und der Einheit zusammen.

¹⁾ Candela (gesprochen: kandela) = Wachsschnur, Kerze

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Lichtstärke	I	Candela	cd

21.5.2. Lichtstrom

Jede Lichtquelle gibt **Lichtleistung** ab. Die ganze von einer Lichtquelle nach allen Richtungen hin ausgestrahlte Lichtleistung ist der Lichtstrom, dessen Einheit das Lumen¹⁾ ist.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Lichtstrom	$\Phi^2)$	Lumen	lm

Größengleichung

$$\Phi = 4 \cdot \pi \cdot I$$

Φ = Lichtstrom in lm
 $4 \cdot \pi$ = Rechenfaktor, Einheit 1
 I = Lichtstärke in cd

Der Lichtstrom ist das Produkt aus $4 \cdot \pi$ und der Lichtstärke.

Beispiel:

Eine Glühlampe von 220 V/40 W hat eine Lichtstärke von etwa 30 cd. Wie stark ist der von ihr ausgehende Lichtstrom?

Gegeben: $I = 30$ cd

Gesucht: Φ

Lösung: $\Phi = 4 \cdot \pi \cdot I = 4 \cdot 3,14 \cdot 30 \text{ cd} = 377 \text{ lm}$

Der von einer 220 V/40 W ausgehende Lichtstrom beträgt $\Phi = 377 \text{ lm}$.

Nachstehend sind die Lichtstärke und der Lichtstrom gebräuchlicher Lichtquellen zusammengestellt:

¹⁾ Lumen = Licht

²⁾ Φ = griechischer Buchstabe groß Phi

Lichtquelle	Lichtstärke	Lichtstrom
	cd	lm
Glühlampe 220 V/40 W	30	400
Glühlampe 220 V/100 W	110	1380
Kohlefadenlampe	10	125
Leuchtstofflampe 220 V/40 W	185	2300
Autoscheinwerfer, abgeblendet	25	320
Autoscheinwerfer, volles Licht	60	750
Leuchtfeuer für Schifffahrt	500000	6300000
Leuchtfeuer für Luftfahrt	1000000	12500000

21.5.3. Lichtmenge

Jede Lichtquelle gibt den Lichtstrom während einer bestimmten Betriebsdauer ab. Das Produkt aus dem Lichtstrom und der Betriebsdauer ist die Lichtmenge.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Lichtmenge	Q	Lumenstunde	lmh

Größengleichung

$$Q = \Phi \cdot t$$

Φ = Lichtstrom in lm
 t = Zeit in h
 Q = Lichtmenge in lmh

Einheitengleichung

$$\text{lmh} = \text{lm} \cdot \text{h}$$

Beispiel:

Eine Stearinkerze hat die Lichtstärke von $I = 1$ cd; ihre Gesamtbrenndauer beträgt $t = 4$ h. Wie groß ist die von ihr abzugebende Lichtmenge?

Gegeben: $I = 1$ cd; $t = 4$ h

Gesucht: Q

Lösung: $\Phi = 4 \cdot \pi \cdot I = 4 \cdot 3,14 \cdot 1 = 12,56 \text{ lm}$

$$Q = \Phi \cdot t = 12,56 \text{ lm} \cdot 4 \text{ h} = 50,24 \text{ lmh}$$

Die abzugebende Lichtmenge der Kerze beträgt $Q = 50,24 \text{ lmh}$.

21.5.4. Beleuchtungsstärke

Die Größe, durch die die Helligkeit von beleuchteten Flächen bestimmt wird, ist die **Beleuchtungsstärke**. Eine beleuchtete Fläche, z. B. Straße, Tischplatte usw., erscheint uns um so heller, je mehr Lichtstrom auf eine Flächeneinheit fällt. Die Beleuchtungsstärke ist daher der Quotient aus dem Gesamtlichtstrom und der davon beleuchteten Fläche.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Beleuchtungsstärke	E	Lux ¹⁾	lx

Größengleichung

$$E = \frac{\Phi}{A}$$

Φ = Lichtstrom in lm

A = Fläche in m²

E = Beleuchtungsstärke in lx

Einheitengleichung

$$\text{lx} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$$

Ein Lux ist dann vorhanden, wenn ein Lichtstrom von 1 lm auf eine Fläche von 1 m² einstrahlt.

Die Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle sowie mit dem Neigungswinkel der einfallenden Lichtstrahlen ab. Die Beleuchtungsstärke ist die Lichtgröße, die mit einem Belichtungsmesser gemessen wird.

Auf der waagerechten Erdoberfläche erzeugt der Mond eine Beleuchtungsstärke von etwa 0,2 lx, die Mittagssonne dagegen eine Beleuchtungsstärke von etwa 5 500 lx im Winter und im Sommer sogar eine bis zu 70 000 lx. Fotowiderstände werden einer Beleuchtungsschwankung von etwa 5 lx bis zu 1000 lx ausgesetzt; sie verringern dabei ihren Widerstandswert auf ein Hundertstel bis ein Tausendstel ihres vorherigen Wertes. Fotoelemente werden mit einer Beleuchtungsstärke bis zu 800 lx ausgeleuchtet und erzeugen dabei einen Spannungswert von etwa 400 mV.

¹⁾ Lux = Licht

Beispiel:

Die Schreibfläche eines Schreibtisches soll mit der Beleuchtungsstärke von $E = 500 \text{ lx}$ ausgeleuchtet werden; ihre Fläche beträgt $A = 2,60 \text{ m}^2$. Welcher Lichtstrom muß auf sie einstrahlen?

Gegeben: $E = 500 \text{ lx}$; $A = 2,60 \text{ m}^2$

Gesucht: Φ

Lösung: $E = \frac{\Phi}{A}$ umstellen nach Φ !

$$\Phi = E \cdot A = \frac{500 \text{ lm} \cdot 2,60 \text{ m}^2}{\text{m}^2} = 1300 \text{ lm}$$

Der auf die Schreibtischfläche einfallende Lichtstrom muß $\Phi = 1300 \text{ lm}$ betragen.

21.5.5. Leuchtdichte

Bei der Ausleuchtung von Räumen kommt es aber nicht nur auf die zu erzielende Helligkeit an. Vielmehr müssen die Lichtquellen so gebaut und angebracht werden, daß sie ein möglichst **blendungsfreies Licht** hergeben.

Ein Maß für die Blendungsfreiheit einer Lichtquelle ist die **Leuchtdichte**. Eine Glühlampe hat z. B. eine weit größere Leuchtdichte als eine Leuchtstoffröhre, weil bei der Glühlampe die leuchtende Fläche sehr klein, dafür aber um so heller ist.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Leuchtdichte	B	Candela pro Quadratmeter	cd/m ²

Größengleichung

$$B = \frac{I}{a}$$

I = Lichtstrom in cd

a = leuchtende Fläche in m²

B = Leuchtdichte in cd/m²

Einheitengleichung

$$\frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

Die Leuchtdichte einer Lichtquelle ist also der Quotient aus der abgegebenen Lichtstärke und der leuchtenden Fläche.

Die Leuchtdichte von 1 cd/m² ist dann vorhanden, wenn von 1 m² einer ebenen Leuchtfläche eine Lichtstärke von 1 cd senkrecht abgestrahlt wird.

Beispiel:

Die gesamte Oberfläche einer Leuchtstofflampe beträgt $a = 2400 \text{ cm}^2$; der von ihr ausgehende Lichtstrom ist $I = 2300 \text{ cd}$ stark. Wie groß ist die Leuchtdichte der Leuchtstoffröhre?

Gegeben:] $a = 2400 \text{ cm}^2$; $I = 2300 \text{ cd}$

Gesucht: B

$$\text{Lösung: } B = \frac{I}{a} = \frac{2300 \text{ cd}}{2400 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,96 \cdot 10^4 \text{ cd/m}^2 = 9,6 \text{ kcd/m}^2$$

Die Leuchtdichte der Leuchtstoffröhre beträgt $B = 9,6 \text{ kcd/m}^2$.

21.5.6. Lichtausbeute

Bei fast allen künstlichen Lichtquellen wird die Lichtenergie aus der elektrischen Energie gewonnen. In der Lichtquelle wird jedoch nur ein Teil der aufgenommenen elektrischen Energie in Licht umgewandelt. Das Verhältnis des abgestrahlten Lichtstroms zur aufgenommenen elektrischen Leistung wird als Lichtausbeute einer Lichtquelle bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Wirtschaftlichkeit einer Lichtquelle; ihre Größe ist von der Nennleistung und der Bauart der Lichtquelle abhängig.

Begriff	Formelzeichen	Einheit	
		Benennung	Kurzzeichen
Lichtausbeute	$\eta^1)$	Lumen pro Watt	lm/W

Größengleichung

$$\eta = \frac{\Phi}{P}$$

Φ = Lichtstrom in lm

P = Nennleistung in W

η = Lichtausbeute in lm/W

Einheitengleichung

$$\frac{\text{lm}}{\text{W}} = \frac{\text{lm}}{\text{W}}$$

Nachstehend sind die Werte der Lichtausbeute für verschiedene Lichtquellen zusammengestellt:

¹⁾ η = griechischer Buchstabe Eta

Lichtquelle	Lichtausbeute lm/W
Glühlampe 220 V/40 W	11
Glühlampe 220 V/100 W	14
Leuchtstofflampe 40 W	46
Quecksilberdampflampe 50 W	27
Natriumdampflampe 45 W	41

Beispiel:

Der Lichtstrom einer Kohlefadenlampe für 110 V/15 W beträgt $\Phi = 120 \text{ lm}$. Wie groß ist die Lichtausbeute dieser Glühlampe?

Gegeben: $P = 15 \text{ W}$; $\Phi = 120 \text{ lm}$

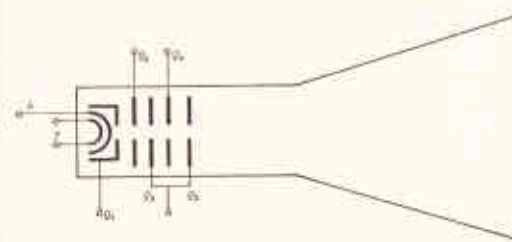
Gesucht: η

$$\text{Lösung: } \eta = \frac{\Phi}{P} = \frac{120 \text{ lm}}{15 \text{ W}} = 8,0 \text{ lm/W}$$

Die Lichtausbeute der Kohlefadenlampe beträgt $\eta = 8,0 \text{ lm/W}$.

21.6. Elektronenoptiken

Um auf dem Leuchtschirm von Elektronenstrahlröhren scharfe Bilder zu erhalten, müssen die von der Katode ausgesendeten Elektronen zu einem **Elektronenstrahl gebündelt werden**. Die Bündelung von Elektronenstrahlen läßt sich mit der Bündelung von Lichtstrahlen mittels Glaslinsen vergleichen, jedoch werden bei der Elektronenstrahlbündelung **elektrische Linsen** verwendet. Die Wirkungsweise elektrischer Linsen beruht auf der Wirkung von **magnetischen und elektrischen Feldern**, die von diesen Feldern auf die frei im Raum beweglichen Elektronen ausgeübt wird.



- f = indirekte Heizung
- k = Katode, $U_k = 0 \text{ V}$
- g_1 = Steuerelektrode,
 $U_1 = -30 \text{ bis } -80 \text{ V}$
- g_2 = Beschleunigungselektrode, $U_2 = +300 \text{ V}$
- g_3 = 1. Anodenteil,
 $U_3 = +16 \text{ kV}$
- g_4 = Fokussierelektrode,
 $U_4 = +350 \text{ V}$
- g_5 = 2. Anodenteil,
 $U_5 = +16 \text{ kV}$

Abb. 21.12 — Elektronenoptik

Das Elektronenstrahlerzeugungssystem besteht aus der Elektronenquelle und der Elektronenoptik. Von der geheizten Katode werden die frei beweglichen Elektronen ausgesendet, die von der positiven Anode angezogen und beschleunigt werden. Aufgabe der Elektronenoptik ist es, die nach der Anode hin beschleunigten Elektronen zu einem Strahl zu bündeln, damit auf dem Bildschirm ein punktförmiger Leuchtfleck erscheint. Die Helligkeit des Leuchtflecks hängt von der Geschwindigkeit und der Dichte der auftreffenden Elektronen ab. Elektronengeschwindigkeit und -dichte können mit Hilfe der Steuerelektrode beeinflusst werden.

Die Steuerelektrode umgibt als einseitig geschlossener Zylinder die Katode. Im Topfboden befindet sich ein kleines Loch, durch das die Elektronen heraustreten können. Dieses Steuergitter bezeichnet man auch als Wehneltzylinder¹⁾. An den Wehneltzylinder wird eine in bezug auf die Katode negative Spannung gelegt, damit über das Steuergitter keine Elektronen abwandern. Durch Veränderung der Spannung wird der Strahlstrom stärker oder schwächer.

Hinter der Steuerelektrode liegt die Beschleunigungselektrode, die eine positive Spannung in bezug auf die Katode aufweist. Hiermit kann ebenfalls die Strahlstromstärke und somit die Helligkeit des Leuchtflecks beeinflusst werden. Zur Hauptbeschleunigung dient aber die Anode, an der eine positive Spannung von mehreren tausend Volt liegt.

Jeder Elektronenstrahl würde von sich aus auseinanderstreben, weil die gleichnamig negativ geladenen Elektronen sich gegenseitig abstoßen. Zur Strahlenbündelung dient die Fokussierelektrode²⁾, an der eine von der Beschleunigungselektrode abweichende Spannung liegt. Zwischen den Elektroden, die voneinander abweichende Spannungswerte aufweisen, bilden sich elektrische Linsen, die dem Auseinanderstreben des Elektronenstrahls entgegenwirken. Die Stärke der Elektronenstrahlbündelung und damit die Schärfe des Leuchtflecks auf dem Bildschirm kann mit Hilfe der Spannungswerte an der Fokussierelektrode eingestellt werden.

Die Elektronenoptik wird bei allen Elektronenstrahlröhren (Oszilloskop³⁾ und Fernsehbiröhren) sowie bei Elektronenmikroskopen verwendet.

¹⁾ Wehnelt = deutscher Physiker, 1871—1944

²⁾ Fokus = Brennpunkt, fokussieren = Linsen ausrichten

³⁾ Oszilloskop = Schwingungsanzeiger

Zusammenstellung der lichttechnischen Größen

Begriff	Formelzeichen	Benennung	Einheit Kurzzeichen	Größengleichung	Einheitgleichung
Lichtgeschwindigkeit	c	Meter pro Sekunde	m/s	$v = \frac{s}{t}$	$\frac{m}{s}$
Wellenlänge	λ	Meter	m	$\lambda = \frac{c}{f}$	$\frac{m}{s} : \frac{1}{s} = \frac{m \cdot s}{s \cdot 1}$
Frequenz	f	Hertz	Hz	$f = \frac{c}{\lambda}$	$\frac{1}{s} = \frac{m}{s \cdot m}$
Lichtstärke	I	Candela	cd	—	—
Lichtstrom	Φ	Lumen	lm	$\Phi = 4 \cdot \pi \cdot I$	$lm = 4 \cdot \pi \cdot cd$
Lichtmenge	Q	Lumen pro Stunde	lm/h	$Q = \Phi \cdot t$	$lmh = lm \cdot h$
Beleuchtungsstärke	E	Lux	lx	$E = \frac{\Phi}{A}$	$lx = \frac{lm}{m^2}$
Leuchtdichte	B	Candela pro Quadratmeter	cd/m ²	$B = \frac{I}{a}$	$\frac{cd}{m^2} = \frac{cd}{m^2}$
Lichtausbeute	η	Lumen pro Watt	lm/W	$\eta = \frac{\Phi}{W}$	$\frac{lm}{W} = \frac{lm}{W}$

Übungsaufgaben:

703. Rechnen Sie die Lichtgeschwindigkeit von $c = 300000 \text{ km/s}$ in die Größenordnung km/h um.
704. Welche Frequenz hat ein Lichtstrahl des gelben Lichts, der eine Wellenlänge von 600 nm hat?
705. Das Licht eines Leuchtfuers ist in einer Entfernung von 12 km sichtbar. Welcher Zeitunterschied besteht zwischen dem Aufblitzen des Leuchtfuers und der Wahrnehmung an Bord des sich nahenden Schiffes?
706. Ein Autoscheinwerfer strahlt einen Lichtstrom von 750 lm aus. Dieser Lichtstrom trifft auf eine Mauer, nachdem er einen Verlust von 60 v.H. erlitten hat. Auf der Mauer ist ein Leuchtkreis mit einem Durchmesser von 2 m sichtbar. Wie groß ist die Beleuchtungsstärke im Leuchtkreis?
707. Ein Autoscheinwerfer strahlt einen Lichtstrom von 750 lm aus. Der Durchmesser der Scheinwerferscheibe ist 16 cm . Wie groß ist die Leuchtdichte dieser Lichtquelle?
708. Eine Leuchtstoffröhre $220 \text{ V}/40 \text{ W}$ strahlt einen Lichtstrom von 2300 lm aus; eine Glühlampe $220 \text{ V}/40 \text{ W}$ strahlt dagegen nur 400 lm aus. Um wieviel Prozent ist die Lichtausbeute der Leuchtstoffröhre größer als die der Glühlampe, wenn der Lichtstrom der Glühlampe 100% beträgt?

22. Tabellen

22.1. Allgemeines

Tabellen sind Zahlentafeln, die eine listenförmig angeordnete Zusammenstellung oder Übersicht von Zahlenmaterial enthalten. Sie sind heute zur schnellen Ermittlung bestimmter Zahlenwerte unerlässlich. Die wichtigsten Tabellen für das Aufsuchen von Quadratzahlen, Wurzelwerten und Winkelfunktionen sind auf den folgenden Seiten zusammengestellt worden.

Die Zahlen „n“, die ins Quadrat erhoben werden sollen, sind in der Zahlentafel von oben nach unten und für einen weiteren Stellenwert von links nach rechts aufgeführt. Zahlen, die hierin nicht enthalten sind, müssen durch Kommaverschiebung verändert werden. Das Komma wird dabei um soviel Stellen nach rechts oder links verschoben, bis eine Zahl (Hilfszahl) entsteht, die in der Zahlentafel enthalten ist. Um den wirklichen Wert zu erhalten, ist natürlich das Komma beim ermittelten Tabellenwert ebenfalls zu verschieben. Rückt das Komma bei „n“ um eine Stelle nach rechts, so muß es in der ermittelten Quadratzahl „n²“ um doppelt soviel Stellen, also um 2 Stellen, nach links verschoben werden.

Beispiele:

$6,35^2 = 40,32$	$0,234^2 = 0,05476$
$63,5^2 = 4032$	$0,786^2 = 0,6178$
$6350,0^2 = 40320000$	$0,0143^2 = 0,0002045$

Soll aus einer Zahl, die nicht als Quadratzahl in der Tabelle steht, die Wurzel gezogen werden, so wird ihr Komma um 2 (4, 6 usw.) Stellen nach rechts oder links verschoben, bis eine Hilfszahl entsteht, die in der Tabelle enthalten ist. Für je 2 Stellen Kommaverschiebung verschiebt sich das Komma beim Wurzelwert um 1 Stelle in entgegengesetzter Richtung.

Beispiele:

$\sqrt{5,198} = 2,28$	$\sqrt{52,42} = 7,24$
$\sqrt{51980} = 228$	$\sqrt{0,5242} = 0,724$
$\sqrt{51,98} = 7,21$	$\sqrt{0,005242} = 0,0724$

Für den Gebrauch der Tabellen mit den Winkelfunktionen sind auf Seite 163 Erläuterungen gegeben worden.

22.2. Quadrate und Wurzeln

Quadrate von 1,00 → 5,49 und Quadratwurzeln

Zahl n	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

Quadrate von 5,50 → 9,99 und Quadratwurzeln

Zahl n	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

22.3. Winkelfunktionen

$\sin$ 0°—45°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	$\cos$ 45°—90°

$\cos$ 0°—45°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93255	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	$\sin$ 45°—90°

tg 0°—45°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	ctg 45°—90°

ctg 0°—45°	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58863	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14453	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63823	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41230	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75550	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63183	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40193	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17083	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	tg 45°—90°

Band 5

– Werkstoffbearbeitung

Werk- und Hilfsstoffe – Werkstoffbearbeitung – Technisches Zeichnen – Arbeitsschutz und Unfallverhütung – Umgang mit Tabellen und Handbüchern

● Repetitor zum Band 5

Band 6

– Fernsprechapparate – Fernsprechentstörung – Nebenstellenanlagen (2 Teile mit Beiheft)

Fernsprechapparate – Zusatzeinrichtungen – Fernsprechentstörung – VDE-Bestimmungen – Unfallverhütung – Allgemeines über Nebenstellenanlagen – Die Ausführung der Nebenstellenanlagen – Wartungsaufbau – Aufbau und Bedienen des HVT

● Repetitor zum Band 6

Band 7

– Linientechnik (2 Teile)

Zweck und Aufbau der Bauteile im Ortsanschlußnetz – Kabelkanalanlage – Fernmeldekabel – Einziehen von Röhrenkabeln – Anlegen von Erdkabeln – Kabelmontagearbeiten – Druckluftüberwachung von Ortskabeln – Schutz gegen Korrosion – Linienunterlagen für Ortsnetze – Auskundung – Bau oberirdischer Ortsanschlußlinien – Bau oberirdischer Kabelanlagen – Unterhaltungsarbeiten an Holzmastlinien – Sprechstellenbau – Teilnehmereinrichtungen – Erdungsanlagen – Schutz gegen Überspannungen und Überströme

● Repetitor zum Band 7

Band 8

– Grundlagen der Vermittlungstechnik (mit Beiheft)

Aufbau und Wirkungsweise der Schrittschalt- und Motordrehwähler – Orts- und Fernvermittlungstechnik – Schaltkennzeichen – Einheitsvorschriften – Signaleinrichtungen, Prüf- und Meßeinrichtungen – Stromversorgung – Aufteilung großer Ortsnetze – Netzgestaltung im Selbstwählerdienst – Unterhalten und Bedienen von Orts- und Fernvermittlungsstellen – Gliederung des Unterhaltungsdienstes

● Repetitor zum Band 8

Band 9

– Übertragungs- und Datentechnik

Elektroakustik – Leitungstechnik – Trägerfrequenztechnik – Grundlagen der Fernschreib- und Datentechnik

● Repetitor zum Band 9

– Weitere Lehrbücher siehe 2. und 4. Umschlagseite –

Band 10

– Grundlagen der Schaltungs- und Meßtechnik

Anschluß- und Verbindungstechniken – Bauelemente, Bauteile und Grundlagen der Schaltungstechnik – Niederspannungsnetz, Schutzmaßnahmen und Installationen, Gefährdung des Menschen durch den elektrischen Strom – Messen und Prüfen

● **Repetitor zum Band 10**

Die Bände werden noch durch den **Sonderband „Grundlagen der Elektronik (mit Repetitor)“** ergänzt, der beim Institut zur Entwicklung moderner Unterrichtsmedien e. V., 28 Bremen 1, Bahnhofstraße 10, bestellt werden kann. Der Band ist wie folgt gegliedert:

Sonderband – Grundlagen der Elektronik

Meßtechnik – Halbleiter – Halbleiterdioden – Transistor – Verschicht-halbleiter-Bauelemente – Elektronenröhren – RC-Glieder – Klippstufen – Verknüpfungsglieder

● **Repetitor zum Band Grundlagen der Elektronik**

Allgemeines Prüfungswissen (2 Teile)

(für die Kräfte des BFW-, BfT- und BPt-Dienstes)

● **Repetitor zum Band Allgemeines Prüfungswissen**

Wichtig zur Vorbereitung auf Eignungsfeststellungen und Prüfungen

Deutschlehre
(mit Beiheft)

Rechtschreibung – Wortlehre – Satzlehre – Zeichensetzung – Stil- und Aufsatzkunde – Übungsaufgaben – Übungsdiktate – Lösungen

Rechenlehre

Rechnen – Raumlehre – Sortenverwandlung – Übungsaufgaben – Angewandte Aufgaben – Lösungsheft

Sämtliche Lehrwerke können bestellt werden bei:

Deutsche Postgewerkschaft – Hauptvorstand – Verlag

6 Frankfurt 71 – Rhonestraße 2