fernmeldelehrling.de

HANDBUCH

FÜR DEN

FERNMELDEHANDWERKER

der Deutschen Bundespost

BAND B1

DIE FACHKUNDE

Einführung in die Mathematik; Grundgesetze der Physik; Stoffkunde

VERLAG: DEUTSCHE POSTGEWERKSCHAFT - VERLAG GMBH.
6 FRANKFURT - SAVIGNYSTRASSE 29

fernmeldelehrling.de

Handbuch für den Fernmeldehandwerker der DBP

14 **wichtige Lehr- und Lernwerke für den FLehrl; auch für den Handwerker F und den Fernmeldehandwerker zur Vorbereitung auf die Grundlagenlehrgänge gut geeignet!**

Band A 1 — Allgemeine Berufskunde

Weg und Ziel der Ausbildung — Der Lehrvertrag — Die Fernmeldehandwerkerprüfung — Die Tätigkeitsgebiete des Fernmeldehandwerkers, sein beruflicher Werdegang und seine Aufstiegsmöglichkeiten — Der Tarifvertrag — Gesetze und Verordnungen des Fernmeldewesens — Allgemeine Vorschriften zum Schutz gegen Starkstrom und Unfallschäden

Band A 2 — Allgemeine Berufskunde

Allgemeines über den Staatsaufbau — Aufgaben und Gliederung der DBP — Die Sozialeinrichtungen bei der DBP — Allgemeines aus der Geschichte des Post- und Fernmeldewesens — Wie fertige ich meine schriftlichen Prüfungsarbeiten? — Musterausarbeitungen und Musterthemen

Band B 1 — Die Fachkunde

Mathematische und physikalische Grundkenntnisse einschließlich der Stoffgebiete aus den beiden Grundlagenlehrgängen

Band B 2 — Die Fachkunde

Fachzeichnen — Technisches Zeichnen — Stromlaufzeichnen

Band B 3 — Die Fachkunde

Die Gleichstromlehre (Wesen der Elektrizität; elektrischer Stromkreis; Maßeinheiten; Ohmsches Gesetz; Widerstand; Leitfähigkeit; Spannungsabfall; Stromverzweigung; Wärmewirkung und chemische Wirkung des elektrischen Stromes; elektrisches Feld; Kondensator)

— Weiteres siehe 3. und 4. Umschlagseite —

HANDBUCH

FÜR DEN

FERNMELDEHANDWERKER

der Deutschen Bundespost

DPG

BAND B1

DIE FACHKUNDE

Einführung in die Mathematik; Grundgesetze der Physik; Stoffkunde

2. VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

VERLAG: DEUTSCHE POSTGEWERKSCHAFT - VERLAG GMBH.
6 FRANKFURT - SAVIGNYSTRASSE 29

fernmeldelehrling.de

Vorwort

Die vierzehn Bände des **„Handbuchs für den Fernmeldehandwerker der DBP“** sollen

1. **den Fernmeldelehrlingen während der Lehrzeit ein ständiger Begleiter sein und ihnen eine umfassende und gute Prüfungsvorbereitung ermöglichen,**
2. **den Handwerkern F aufzeigen, welches Fachwissen erforderlich ist, um genauso viel zu wissen wie die Lehrlinge am Ende ihrer Lehrzeit,**
3. **den Fernmeldehandwerkern die Möglichkeit geben, ihr Wissen aufzufrischen und es auf den neuesten Stand der Fernmeldetechnik zu bringen und**
4. **eine ausreichende Vorbereitung auf den Lehrstoff der dienstlichen Grundlagenlehrgänge gewährleisten.**

In der Fernmeldehandwerkerprüfung sowie in den Grundlagenlehrgängen müssen neben den praktischen Fertigkeiten auch die theoretischen Fachkenntnisse über die Fernmeldetechnik vorhanden sein. Das gleiche gilt hinsichtlich der Kenntnisse in dem wichtigen Prüfungsfach „Allgemeine Berufskunde“ sowie in bezug auf die Grundkenntnisse über die für das Fernmeldewesen wichtigen Gesetze und Verordnungen, wie FAG, TWG und FeO. Einer der Bände allein kann dem Leser dieses umfangreiche Wissen nicht vermitteln; alle vierzehn Bände zusammen (vgl. hierzu die Angaben auf der 2., 3. und 4. Umschlagseite) enthalten jedoch das Fachwissen, das sich der Leser im Interesse des Prüfungserfolges und seines weiteren Aufstiegs aneignen muß.

In dem „Handbuch für den Fernmeldehandwerker der DBP“ ist nur der unbedingt notwendige Lehrstoff in einfachster Form behandelt worden. Die Verfasser erheben nicht den Anspruch, daß die Bände alle Vorschriften und technischen Einzelheiten sowie das in der Praxis selten oder gar nicht Vorkommende enthalten. Ihnen ging es vielmehr darum, eine

Fibel

für den Fernmeldelehrling,
für den Handwerker F und
für den Fernmeldehandwerker

zu schaffen, die der gestellten Aufgabe im Interesse der Leser ohne unnötigen Ballast gerecht wird.

Druck: Frühjahr 1964
Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATIK — Seite

A. Rechnen mit bestimmten Zahlen 8

I. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen 8
1. Addition 8
2. Subtraktion 8
3. Multiplikation ganzer Zahlen 8
4. Division ganzer Zahlen 8

II. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen 9
1. Allgemeines über die gewöhnliche Bruchrechnung 9
2. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen 9
3. Teilbarkeit 10
4. Der größte gemeinsame Teiler 10
5. Das kleinste gemeinsame Vielfache 10
6. Der Hauptnenner von ungleichnamigen Brüchen 11
7. Addition und Subtraktion von Brüchen 12
8. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl 15
9. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl 16
10. Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl 17
11. Multiplikation zweier Brüche 17
12. Division zweier Brüche 18
13. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch 18

III. Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen 19
1. Addition von Dezimalbrüchen 20
2. Subtraktion von Dezimalbrüchen 20
3. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl 20
4. Multiplikation zweier Dezimalbrüche 21
5. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl 21
6. Division zweier Dezimalbrüche 22
7. Endliche und unendliche Dezimalbrüche 23
8. Addition und Subtraktion von Brüchen und Dezimalbrüchen 23
9. Multiplikation und Division beider Brucharten 24
10. Bruchausdrücke mit Dezimalbrüchen im Zähler und Nenner 24

IV. Wiederholungsfragen zum Abschnitt A 24

B. Die Buchstabenrechnung 25

I. Allgemeines 25

II. Die Addition 26

III. Die Subtraktion 29

IV. Die Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken 30
1. Addition einer Summe 30
2. Addition einer Differenz 31
3. Subtraktion einer Summe 31
4. Subtraktion einer Differenz 32

fernmeldelehrling.de

Seite

V. Die relativen Zahlen ... 33
1. Begriff der positiven und negativen Zahlen ... 33
2. Addition und Subtraktion relativer Zahlen ... 34
3. Übungsbeispiele ... 36
VI. Die Multiplikation ... 39
1. Multiplikation von Klammerausdrücken ... 40
2. Das Vorzeichen beim Multiplizieren ... 42
3. Übungsbeispiele ... 43
VII. Die Division ... 45
1. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl ... 46
2. Division einer mehrgliedrigen Größe durch eine Zahl ... 46
3. Rangfolge der Punkt- und Strichrechnung ... 47
4. Übungsbeispiele ... 48
VIII. Wiederholungsfragen zum Abschnitt B ... 51

C. Die Potenzrechnung ... 52
I. Addition und Subtraktion von Potenzen ... 54
II. Multiplikation von Potenzen ... 55
III. Division von Potenzen ... 56
IV. Potenzen von Summen und Differenzen ... 58
V. Potenzen von Produkten ... 58
VI. Potenzen von Potenzen ... 58
VII. Das Rechnen mit Zehnerpotenzen ... 59
VIII. Wiederholungsfragen zum Abschnitt C ... 61

D. Das Radizieren ... 61
I. Allgemeines ... 61
II. Wichtige Regeln ... 65
1. Multiplikation von Wurzeln desselben Grades ... 65
2. Radizierung eines Produktes ... 66
3. Division von Wurzeln desselben Grades ... 66
4. Radizierung von Brüchen ... 66
5. Radizierung von Potenzen ... 66
6. Potenzieren von Wurzeln ... 67
7. Radizierung von Wurzeln ... 67
8. Erweitern und Kürzen von Wurzeln ... 67
III. Wiederholungsfragen zum Abschnitt D ... 68

E. Die Lehre von den Gleichungen ... 68
I. Allgemeines ... 68
II. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten ... 74
III. Gleichungen mit 2 Unbekannten ... 86
1. Allgemeines ... 86
2. Substitutions- oder Einsetzungsmethode ... 86
3. Gleichsetzungsmethode ... 87
4. Additions- und Subtraktionsmethode ... 88

Seite

IV. Die Anwendung von Gleichungen in der Elektrotechnik ... 89
V. Die graphische Darstellung von Funktionen ... 92
VI. Die Proportion ... 98
VII. Wiederholungsfragen zum Abschnitt E ... 100

F. Der pythagoreische Lehrsatz ... 101
I. Allgemeines ... 101
II. Beweis für die Richtigkeit des Lehrsatzes ... 101

G. Die Winkelfunktionen ... 105
I. Allgemeines ... 105
II. Beispiele für die Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken ... 109
III. Wiederholungsfragen zu den Abschnitten F und G ... 110

H. Lösungen zu den Übungen und Aufgaben ... 110

GRUNDGESETZE DER PHYSIK

A. Allgemeines ... 115
I. Die Maßeinheiten der drei Grundgrößen ... 116
1. Das Normal der Länge ... 116
2. Das Normal der Zeit ... 117
3. Das Normal der Masse und der Kraft ... 118
4. Das CGS-System und das MKS-System ... 119

B. Aufbau und Zustandsformen der Körper ... 120
I. Feste Körper ... 121
II. Flüssige Körper ... 121
III. Luftförmige Körper-Gase ... 121

C. Mechanik der festen Körper ... 121
I. Die Kraft ... 121
II. Schwerkraft — Gewicht ... 122
III. Zusammenhänge zwischen Kraft und Masse ... 123
IV. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften mit demselben Angriffspunkt ... 126
V. Gleichgewicht der Körper ... 129
1. Gleichgewicht der Kräfte und der Drehmomente ... 129
2. Schwerpunkt und Gleichgewicht ... 131
3. Gleichgewichtsarten ... 132
4. Standfestigkeit ... 132
VI. Bewegung der Körper ... 133
1. Allgemeines über den Bewegungszustand eines Körpers ... 133
2, Trägheit, Beharrungsvermögen ... 133
3. Gleichförmige Bewegung ... 134

fernmeldelehrling.de

Seite

4. Ungleichförmige Bewegung ... 135
5. Freier Fall ... 136
6. Kreisbewegung ... 136

VII. Arbeit und Leistung ... 137
1. Mechanische Arbeit ... 137
2. Mechanische Leistung ... 138
3. Begriff der Energie ... 140
4. Wirkungsgrad ... 140

D. Einfache Maschinen, Riemen- Zahnradantriebe ... 143
I. Seil und Stange ... 143
II. Der Hebel ... 144
III. Die Rolle ... 145
1. Feste Rolle ... 145
2. Lose Rolle ... 145
IV. Der Flaschenzug ... 145
V.Übertragungen von Drehbewegungen ... 147
VI. Schiefe Ebene ... 149
1. Allgemeines ... 149
2. Der Keil ... 151
3. Die Schraube ... 152

E. Der Schall ... 154
I. Die Schallerregung ... 154
II. Die Schallausbreitung ... 155
III. Der Schallempfang ... 158
IV. Die Schallaufzeichnung ... 159

F. Die Wärme ... 159
I. Wärmeempfindung, Temperatur und Temperaturmessung ... 159
II.Absoluter Nullpunkt und absolute Temperatur ... 163
III. Die Wärmemenge ... 164
IV. Wärme als Molekularbewegung ... 166
V. Ausdehung der Körper beim Erwärmen ... 166

DIE STOFFKUNDE
I. Chemische Grundstoffe ... 169
II. Legierungen ... 170
III. Chemische Verbindungen ... 171
1. Allgemeines ... 171
2. Chemischer Prozeß ... 171
3. Wasser ... 172
4. Säuren ... 173
5. Laugen ... 173
6. Salze ... 173

Wiederholungsfragen zu den Grundgesetzen der Physik und zur Stoffkunde 174

Einführung in die Mathematik

Allgemeines

Die bei der Deutschen Bundespost hochentwickelte und weitverbreitete Elektro- und Fernmeldetechnik verlangt heute von jedem Fernmeldehandwerker gründliche theoretische Fachkenntnisse.

In dem vorliegenden Band „B 1" wird versucht, dem Fernmeldehandwerker die erforderlichen mathematischen und physikalischen Grundbegriffe zu vermitteln. Jedes technische Wissen wird beherrscht durch „Maß" und „Zahl". Die mathematischen Grundkenntnisse sollen deshalb besonders ausführlich, aber mit Rücksicht auf die Vorkenntnisse der FHandw in einfacher Form dargestellt werden.

Aus der Zielsetzung ergibt sich, daß die „Buchstabenrechnung" und „die Lehre von den Gleichungen" einen besonders großen Raum einnehmen, weil für das Verständnis der technischen Vorgänge die Behandlung von algebraischen Formeln unerläßlich ist.

Alle Gebiete sind ohne unnötigen Ballast nur soweit behandelt worden, wie sie für das Verständnis und für die Berechnung fachlicher Vorgänge für einen Fernmeldehandwerker unbedingt erforderlich sind.

fernmeldelehrling.de

A. Rechnen mit bestimmten Zahlen

I. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen

1. Addition (Zusammenzählen)

- Das **Zeichen** für das Addieren heißt **„Plus"** (+).
- Das **Gleichheitszeichen** (=) verbindet eine Rechenaufgabe miteinander.
- Die Zahlen, die addiert werden sollen, heißen **Summanden** (auch Posten).
- Das Ergebnis der Addition heißt **Summe.**
- Die **Reihenfolge** der Summanden ist **beliebig.**

Die Aufgabe 25 + 37 = 62 ist zu lesen: 25 plus 37 gleich 62.

25	+	37	=	62
Summand		Summand		Summe

2. Subtraktion (Abziehen)

- Das **Zeichen** für das Subtrahieren heißt **„Minus"** (—).
- Die Zahl, von der subtrahiert wird, heißt **Minuend;** die Zahl, die subtrahiert wird, heißt **Subtrahend.**
- Das Ergebnis der Subtraktion ist die **Differenz.**

Die Aufgabe 45 — 15 = 30 ist also zu lesen: 45 minus 15 gleich 30

45	—	15	=	30
Minuend		Subtrahend		Differenz

3. Multiplikation ganzer Zahlen (Malnehmen)

- Das **Zeichen** für die Multiplikation ist der **Punkt** · (mal).
- Die Zahlen, die multipliziert werden, heißen **Faktoren.**
- Das Ergebnis der Multiplikation wird **Produkt** genannt.
- Die **Reihenfolge** der Faktoren ist **beliebig.**

25	·	3	=	75
Faktor (Multiplikant)		Faktor (Multiplikator)		Produkt (Produkt)

4. Division ganzer Zahlen (Teilen)

- Das Zeichen für das **Dividieren** ist der **Doppelpunkt :** (durch).
- Die Zahl, die dividiert wird, heißt **Dividend,** die Zahl, durch die dividiert wird, **Divisor.**

- Das Ergebnis der Division heißt **Quotient.**

42	:	6	=	7
Dividend		Divisor		Quotient

II. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen

1. Allgemeines über die gewöhnliche Bruchrechnung

Ein Bruch entsteht, wenn man **ein Ganzes** (1) in eine **Anzahl gleicher** Teile teilt und einen oder mehrere davon nimmt.

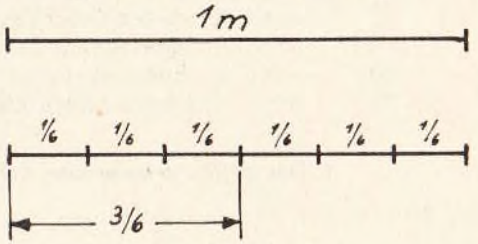


Abb. 1

$\frac{3}{6}$ ——— Zähler
——— Nenner

Die Zahl, die angibt **(nennt),** in wieviel gleiche Teile das Ganze geteilt worden ist, heißt **Nenner.**

Die Zahl, die besagt, wieviel von diesen Teilen genommen **(gezählt)** werden sollen, heißt **Zähler.**

Der Zähler steht **über,** der Nenner **unter** dem Bruchstrich.

Man unterscheidet:

a) echte Brüche: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; der **Zähler** ist **kleiner** als der **Nenner**

b) unechte Brüche: $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$; der **Zähler** ist **größer** als der **Nenner**

c) gemischte Zahlen: $2\frac{2}{3}, 3\frac{4}{5}$; **Ganze** und **Brüche**

2. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, heißen Primzahlen.

Beispiele: **1, 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19**

Alle übrigen Zahlen sind **zusammengesetzte Zahlen;** sie lassen sich nämlich als Produkt aus mehreren Primzahlen **zusammensetzen.**

Beispiele: $6 = 2 \cdot 3$; $9 = 3 \cdot 3$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Aufgabe 1: Schreibe die Zahlen von 1—100 auf und unterstreiche die Primzahlen. (Wegen der Lösungen zu den Aufgaben usw. vgl. die Seiten 110 ff.).

fernmeldelehrling.de

3. Teilbarkeit

Eine Zahl ist ohne Rest teilbar durch

2 :	wenn am **Ende** eine 2, 4, 6, 8 oder 0 steht
3 :	wenn ihre **Quersumme** durch 3 teilbar ist
4 :	wenn die **beiden letzten Ziffern** durch 4 teilbar sind
5 :	wenn am **Ende** eine 5 oder 0 steht
6 :	wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist
8 :	wenn die **letzten drei Ziffern** durch 8 teilbar sind
9 :	wenn ihre **Quersumme** durch 3 teilbar ist
10 :	wenn am **Ende** eine 0 steht
25 :	wenn die **letzten beiden Ziffern** durch 25 teilbar sind

4. Der größte gemeinsame Teiler (g. g. T.)

Für das Kürzen der Brüche sucht man den größten gemeinsamen Teiler **(g. g. T.)**.

Von den Zahlen **40, 60** und **80** findet man den **g. g. T.**, wenn man sie in ihre **Primfaktoren** zerlegt und die gemeinsam vorkommenden Primfaktoren miteinander multipliziert.

$$\left.\begin{aligned} 40 &= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{5} \\ 60 &= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{5} \\ 80 &= \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \end{aligned}\right\} \quad \text{g. g. T. } 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

5. Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.)

Bei der Addition von Brüchen wird für das Aufsuchen des Hauptnenners das k. g. V. gebraucht.

Aufsuchen des k. g. V. durch Kopfrechnen:

In der folgenden Darstellung sind die **gemeinsamen Vielfache** von 8 und 12 unterstrichen:

Vielfache von 8 sind: 16 <u>24</u> 32 40 <u>48</u> 56 64 <u>72</u>
Vielfache von 12 sind: <u>24</u> 36 <u>48</u> 60 <u>72</u>

Unter den unterstrichenen gemeinsamen Vielfachen ist **24** das **kleinste gemeinsame Vielfache,** abgekürzt **k. g. V.** Es wurde durch Probieren gefunden.

Schriftliches Aufsuchen des k. g. V.:

Will man z. B. von mehreren Zahlen 6, 3, 4, 12, 18, 70, 5, 28 und 25 das **k. g. V.** aufsuchen, so ist folgendes zu beachten:

- **a)** Die Zahlen, die in anderen enthalten sind, scheiden aus. 6, 3, 4, 5 sind also in der nachfolgenden Zahlenaufstellung gestrichen.
- **b)** Die übrigen Zahlen werden in **Primfaktoren** zerlegt.

Zahlen	Primfaktoren
~~6~~	
~~3~~	
~~4~~	
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$
18	$2 \cdot 3 \cdot 3$
70	$2 \cdot 5 \cdot 7$
~~5~~	
28	$2 \cdot 2 \cdot 7$
25	$5 \cdot 5$

k.g.V. $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 6300$

Abb. 2

- **c)** Nach der Zerlegung der Zahlen wird festgestellt, welche **verschiedenen Primfaktoren** vorkommen (hier sind es 2, 3, 5 und 7).
- **d)** Die nach c festgestellten Primzahlen bleiben nur in der Zeile stehen, wo sie am häufigsten vorkommen. Die 3 kommt in der Zeile „18" am häufigsten vor und wird deshalb in der Zeile „12" gestrichen. Wenn die 2 in der Zeile „12" und „28" je zweimal vorkommt, so darf sie nur in einer Zeile stehen bleiben, vielleicht in der Zeile „12".
- **e)** Aus dem Produkt der stehengebliebenen Primzahlen findet man das k. g. V.

Aufgabe 2: Das k.g.V. ist zu bestimmen

a) 4, 5, 9, 8, 12,
b) 5, 6, 8, 9, 15, 25,
c) 12, 16, 36, 60, 54

6. Der Hauptnenner von ungleichnamigen Brüchen

Die **ungleichnamigen** Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ sind **gleichnamig** zu machen. Hierzu muß man den **Hauptnenner,** in dem alle vorhandenen Nenner als Teiler enthalten sind, aufsuchen. Der Hauptnenner ist aber nichts anderes als das **k. g. V.** der einzelnen Nenner.

Vielfache von 2 sind: 2 4 6 8 10 **12**
Vielfache von 3 sind: 3 6 9 **12**
Vielfache von 4 sind: 4 8 **12**

Das k. g. V. zu 2, 3 und 4 ist also „12".

Die ungleichnamigen Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ können jetzt in **gleichnamige** Brüche mit dem Hauptnenner „12" durch Erweiterung umgewandelt werden.

fernmeldelehrling.de

Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12}; \qquad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}; \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Der Bruch $\frac{1}{2}$ muß hier im Nenner mit „6" multipliziert werden, weil $2 \cdot 6 = 12$ ergibt. Gleichzeitig muß aber auch der Zähler mit derselben Zahl (6) multipliziert werden. Die anderen Brüche sind genauso zu behandeln.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{18} + \frac{11}{16} + \frac{13}{24} + \frac{5}{9} + \frac{7}{32}$$

Für das Aufsuchen des Hauptnenners ist folgende Form am übersichtlichsten:

~~4~~	
18	$2 \cdot 3 \cdot 3$
~~16~~	
24	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
~~8~~	
32	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Hauptnenner = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{288}$

Abb. 3

Die **ungleichnamigen** Brüche können jetzt in **gleichnamige** Brüche mit dem Hauptnenner „288" wie folgt umgewandelt werden:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{18} + \frac{11}{16} + \frac{13}{24} + \frac{5}{9} + \frac{7}{32} =$$

$$\frac{3 \cdot 72}{4 \cdot 72} + \frac{7 \cdot 16}{18 \cdot 16} + \frac{11 \cdot 18}{16 \cdot 18} + \frac{13 \cdot 12}{24 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 32}{9 \cdot 32} + \frac{7 \cdot 9}{32 \cdot 9} =$$

$$\frac{216}{288} + \frac{112}{288} + \frac{198}{288} + \frac{156}{288} + \frac{160}{288} + \frac{63}{288} = \frac{905}{288} = 3\frac{41}{288}$$

Merke:

Einzelne Brüche können durch Erweiterung gleichnamig gemacht werden. Die Erweiterungszahl findet man, indem man den Hauptnenner durch den Nenner des zu erweiternden Bruches teilt. (z. B. $\frac{288}{4} = 72$)

7. Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert.
Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man ihre Zähler subtrahiert.

Das Ergebnis wird stets gekürzt, z. B. $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Unechte Brüche verwandelt man in gemischte Zahlen, z. B. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Gemischte Zahlen werden addiert, indem man die Ganzen und die Brüche für sich addiert.

Beispiele: $\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$$\frac{8}{11} + \frac{5}{11} + \frac{9}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} = 5\frac{2}{3}$$

$$3\frac{1}{6} + 1\frac{5}{6} + 2\frac{4}{6} = 6\frac{10}{6} = 6\frac{5}{3} = 7\frac{2}{3}$$

Bei größeren Rechnungen, empfiehlt sich die Anordnung in folgender Form:

$\frac{1}{365}$	1
+ $\frac{343}{365}$	343
+ $\frac{23}{365}$	23
+ $\frac{273}{365}$	273
+ $\frac{139}{365}$	139
+ $\frac{286}{365}$	286

$\frac{1065}{365} = \frac{213}{73} = 2\frac{67}{73}$

Abb. 4

75 $\frac{917}{1000}$	917
+ 138 $\frac{43}{1000}$	43
+ 314 $\frac{128}{1000}$	128
+ 409 $\frac{539}{1000}$	539
+ 17 $\frac{820}{1000}$	820
+ 35 $\frac{63}{1000}$	63
988	$\frac{2510}{1000} = 988\frac{251}{100}$

$= 990\frac{51}{100}$

Abb. 5

fernmeldelehrling.de

Bei ungleichnamigen Brüchen muß erst der Hauptnenner ermittelt werden. In dem folgenden Beispiel wird deshalb aus $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 12}{12 \cdot 12} = \frac{84}{144}$ usw.

H.N. 144

$9\frac{7}{12}$	84
$+6\frac{15}{16}$	135
$+5\frac{3}{4}$	108
$+3\frac{5}{8}$	90
$+2\frac{13}{18}$	104

Aufsuchen des H.N. (k.g.V.)

12	2·2·3
16	2·2·2·2
4	
6	
18	2·3·3

H.N. = 2·2·2·2·3·3 = 144

Abb. 7

$25 \quad \frac{521}{144} - 28\frac{89}{144}$ Abb. 6

Soll ein **Bruch** von einer **ganzen Zahl** subtrahiert werden, so verwandelt man vorher einen **Einer** der ganzen Zahl in einen **gleichnamigen Bruch.**

Eine **gemischte Zahl** wird von einer anderen gemischten Zahl subtrahiert, indem man **erst die Ganzen** und dann den Bruch subtrahiert.

Beispiele:

$$\frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$5 - 2\frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$9\frac{5}{12} - 2\frac{7}{12} = 7\frac{5}{12} - \frac{7}{12} = 6\frac{17}{12} - \frac{7}{12} = 6\frac{10}{12} = 6\frac{5}{6}$$

H.N. = 240

$219\frac{23}{24}$	230
$-\ 87\frac{71}{80}$	213
132	$\frac{17}{240}$

24	2·2·2·3
80	2·2·2·2·5

H.N. = 2·2·2·2·3·5 = 240

Abb. 8

H.N = 600

$4.\ \frac{37}{120}$	185 / 785
$-3\frac{99}{100}$	594
	$\frac{191}{600}$

120	2·2·2·3·5
100	2·2·5·5

H.N. = 2·2·2·3·5·5 = 600

Abb. 9

Ist der **Zähler** des gleichnamig gemachten **Minuendbruches** (185) zu klein, so wird ein **Einer** der Ganzen in einen gleichnamigen Bruch verwandelt; man ersetzt den zu kleinen Zähler (185) des Minuenden durch den um ein Ganzes $(\frac{600}{600})$ vermehrten Zähler (185 + 600 = 785). Durch einen **Punkt** neben dem Einer (4.) wird angedeutet, daß dieser um 1 vermindert wurde.

Aufgabe 3:

a) $3\frac{5}{21} + 12\frac{19}{28} + 29\frac{7}{12} + 18\frac{5}{7} + 30\frac{17}{42}$

b) $15\frac{17}{25} + 8\frac{1}{2} + 19\frac{3}{20} + 7\frac{13}{125} + 5\frac{3}{8} + 1\frac{49}{50}$

c) $47\frac{13}{37} - 19\frac{14}{15}$ d) $65\frac{11}{72} - 56\frac{11}{32}$

8. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit ihr multipliziert

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$$

Da das Kürzen die Rechnung vereinfacht, kürzt man immer schon das unausgerechnete Produkt.

$$\frac{17}{36} \cdot 24 = \frac{17 \cdot \overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$$

fernmeldelehrling.de

$$\frac{47}{306} \cdot 459 = \frac{47 \cdot \overset{3}{\cancel{459}}}{\underset{2}{\cancel{306}}} = \frac{141}{2} = 70\frac{1}{2}$$

$$73\frac{95}{121} \cdot 99 = 73 \cdot 99 + \frac{95 \cdot \overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{11}{\cancel{121}}} = 7227 + \frac{855}{11} = 7227 + 77\frac{8}{11} = 7304\frac{8}{11}$$

Aufgabe 4:

a) $\frac{19}{72} \cdot 162$ b) $\frac{95}{99} \cdot 132$

c) $102\frac{1}{3} \cdot 150$ d) $80\frac{9}{10} \cdot 55$

9. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert oder den Nenner mit der Zahl multipliziert

Vor dem Ausmultiplizieren ist zu kürzen, falls es möglich ist.

$$\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4} \qquad \frac{14}{15} : 7 = \frac{2}{15} \qquad \frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10} \qquad \frac{15}{8} : 6 = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{8 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{35}{36} : 10 = \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{36 \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{7}{72}$$

Aufgabe 5:

a) $\frac{3}{10} : 2$ $\frac{4}{5} : 5$ $\frac{10}{11} : 5$

b) $\frac{8}{11} : 12$ $\frac{14}{25} : 6$ $\frac{55}{56} : 25$

10. Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl

Eine gemischte Zahl wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man die Ganzen und den Bruch einzeln dividiert und die beiden Ergebnisse addiert.

Sind die Ganzen zu klein, oder bleibt bei der Division der Ganzen ein Rest, so bringt man sie auf den Nenner des Bruches und dividiert den unechten Bruch.

$$4\frac{1}{8} : 2 = 2 + \frac{1}{8} : 2 = 2 + \frac{1}{16} = 2\frac{1}{16}$$

$$25\frac{1}{2} : 17 = \frac{51}{2} : 17 = \frac{51}{2 \cdot 17} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Aufgabe 6:

a) $6\frac{3}{4} : 3$ $4\frac{6}{7} : 2$ $9\frac{18}{19} : 9$

b) $8\frac{1}{4} : 4$ $10\frac{3}{4} : 5$ $12\frac{1}{8} : 3$

c) $80\frac{3}{4} : 17$ $52\frac{1}{12} : 25$ $12\frac{1}{3} : 10$

d) $1\frac{1}{3} : 2$ $5\frac{1}{2} : 7$ $2\frac{3}{4} : 5$

e) $3\frac{3}{4} : 2$ $34\frac{1}{2} : 6$ $12\frac{1}{5} : 4$

11. Multiplikation zweier Brüche

Man multipliziert zwei Brüche miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Gemische Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man sie **erst** zu unechten Brüchen macht und dann wie die echten Brüche behandelt. Vor der Ausführung der Multiplikation ist **stets** zu **kürzen.**

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{28} \qquad \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{5} = \frac{4}{5}$$

$$1\frac{11}{64} \cdot \frac{56}{375} = \frac{\overset{1}{\cancel{75}} \cdot \overset{7}{\cancel{56}}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot \underset{5}{\cancel{375}}} = \frac{7}{40}$$

fernmeldelehrling.de

$$6\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 20$$

Aufgabe 7:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$

b) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad 2\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad 3\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$

c) $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3}$ $\quad 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$ $\quad 3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{7}$ $\quad 5\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{11}$

Hat man **mehr** als zwei Brüche oder gemischte Zahlen zu multiplizieren, so setzt man alles auf **einen Bruchstrich** und **kürzt** erst einmal.

$$3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{34} \cdot \frac{10}{111} = \frac{\overset{1}{\cancel{17}} \cdot \overset{1}{\cancel{37}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}\cancel{10}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{2}{\cancel{34}} \cdot \underset{3}{\cancel{111}}} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 8:

$$1\frac{2}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{29} \cdot 3\frac{5}{8}$$

12. Division zweier Brüche

Man dividiert durch einen Bruch (Divisor), indem man mit dem reziproken (umgekehrten) Wert multipliziert.

Gemischte Zahlen werden vor dem Dividieren in unechte Brüche verwandelt.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15} \qquad 3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{7} : \frac{3}{14} = \frac{1}{\cancel{7}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{3} = \frac{2}{3} \qquad 3\frac{1}{5} : 1\frac{7}{25} = \frac{16}{5} : \frac{32}{25} = \frac{\overset{5}{\cancel{16}} \cdot \cancel{25}}{\cancel{5} \cdot \underset{2}{\cancel{32}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

13. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch

Man dividiert eine ganze Zahl durch einen Bruch, indem man ebenfalls mit dem reziproken Wert des Bruches multipliziert.

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \qquad 12 : \frac{4}{5} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15$$

Aufgabe 9:

a) $\frac{6}{7} : \frac{2}{7}$ $\quad \frac{4}{5} : \frac{2}{5}$ $\quad 1 : \frac{1}{5}$

b) $\frac{75}{98} : \frac{25}{98}$ $\quad 3\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ $\quad 7\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{5} : \frac{2}{3}$ $\quad \frac{3}{7} : \frac{2}{3}$ $\quad \frac{4}{5} : \frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$ $\quad \frac{4}{5} : 1\frac{1}{3}$ $\quad \frac{7}{8} : 2\frac{1}{3}$

e) $4 : \frac{4}{7}$ $\quad 8 : 5\frac{1}{3}$ $\quad 10 : 7\frac{1}{2}$

f) $112\frac{1}{2} : 6\frac{21}{3}$ $\quad 6\frac{2}{9} : 112\frac{2}{2}$

III. Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche sind Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 usw. Links vom Komma stehen die Ganzen, rechts die Dezimalstellen.

Echte Dezimalbrüche haben keine Ganzen ($0{,}4 = \frac{4}{10}$), **unechte** Dezimalbrüche bestehen aus Ganzen und einem echten Dezimalbruch ($1{,}6 = 1\frac{6}{10} = 1 + 0{,}6$)

$$\frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1} \qquad 1\frac{7}{10} = \mathbf{1{,}7} \qquad \frac{12}{100} = \mathbf{0{,}12}$$

$$8\frac{3}{100} = \mathbf{8{,}03} \qquad 12\frac{50}{1000} = \mathbf{12{,}050}$$

- Bei einem Dezimalbruch können **beliebig** viele **Nullen** angehängt oder fortgelassen werden.

$0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200 = \ldots$ oder $0{,}800 = 0{,}80 = 0{,}8$

Dezimalbrüche rundet man auf eine bestimmte Stellenzahl ab, indem man die übrigen Dezimalstellen fortläßt. Ist die erste fortfallende **Ziffer** kleiner als **5**, so läßt man den Rest ohne weiteres fort; ist sie gleich **5** oder **größer**, so wird die letzte stehenbleibende Ziffer um 1 erhöht.

fernmeldelehrling.de

Folgende Dezimalbrüche sind erst auf **4**, dann auf **2** Stellen abzurunden. Die Abrundung wird durch das Zeichen ≈ angedeutet, (rund).

$$0{,}370695 \approx 0{,}3707 \approx 0{,}37$$
$$0{,}254832 \approx 0{,}2548 \approx 0{,}25$$
$$2{,}148553 \approx 2{,}1486 \approx 2{,}15$$

1. Addition von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche addiert man, indem man sie so untereinander schreibt, daß Komma unter Komma steht.

	oder dafür	
0,358		0,3580
+ 0,7		+ 0,7000
+ 81,5267		+ 81,5267
+ 0,004		+ 0,0040
= 82,5887		= 82,5887

Es ist immer darauf zu achten, daß **Einer** zu **Einern**, Zehntel zu Zehnteln, Hundertstel zu Hundertsteln usw. addiert werden.

2. Subtraktion von Dezimalbrüchen

Bei der Subtraktion von Dezimalbrüchen ist ebenfalls **Komma** unter **Komma** zu setzen.

10,14	0,40	125,3714
— 7,28	— 0,36	— 74,2906
= 2,86	= 0,04	= 51,0808

3. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl

Ein Dezimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt streicht man von rechts nach links so viel Dezimalstellen ab, wie der Dezimalbruch hat.

0,7 · 12 = 8,4	(eine Stelle)
0,07 · 1 = 0,07	(zwei Stellen)
0,008 · 5 = 0,040	(drei Stellen) = 0,04

Zuerst ist also stets die entsprechende Anzahl Dezimalstellen abzustreichen, dann können die überflüssigen Nullen am Ende fortgelassen werden.

Ein Dezimalbruch wird mit **10, 100, 1000** usw. multipliziert, indem man das Komma ein, zwei, drei beziehungsweise mehr Stellen nach **rechts** rückt.

0,152 · 10 = 1,52	(Komma um **1** Stelle nach rechts)
0,152 · 100 = 15,2	(Komma um **2** Stellen nach rechts)
3,256 · 1000 = 3256	(Komma um **3** Stellen nach rechts)

4. Multiplikation zweier Dezimalbrüche

Dezimalbrüche werden ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt streicht man von rechts nach links so viel Dezimalstellen ab, wie die Faktoren zusammen besitzen.

0,1 · 0,1 = 0,01	0,2 · 0,03 = 0,006
0,1 · 0,004 = 0,0004	0,12 · 0,12 = 0,0144
0,002 · 0,19 = 0,00038	0,123 · 0,9 = 0,1107

5. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl

Eine ganze Zahl wird durch einen Dezimalbruch dividiert, als wenn er eine ganze Zahl wäre. Man setzt im Quotienten das Komma, sobald es im Dividenden überschritten wird.

```
31,452 : 3 = 10,484
3
--
 14
 12
 --
  25
  24
  --
   12
   12
```

In diesem Beispiel wird wie folgt gerechnet:

3 : 3 = 1, dann 1 : 3 = 0, Rest 1. Nun überschreiten wir das Komma im Dividenden und haben deshalb im Quotienten hinter 10 das Komma zu setzen. Dann wird weiter dividiert 14 : 3 = 4, Rest 2, 25 : 3 = 8, Rest 1, 12 : 4 = 4.

fernmeldelehrling.de

$$0{,}2750 : 18 = 0{,}0152 \approx 0{,}015$$
$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline 95 \\ 90 \\ \hline 50 \\ 36 \end{array}$$

- Geht die Division nicht auf, so hängt man an den Dezimalbruch so viele Nullen an, bis die Rechnung aufgeht oder bis im Quotienten die verlangte Stellenzahl erreicht ist.
- Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000 usw. dividiert, indem man das Komma um so viele Stellen nach links rückt, als die 10, 100, 1000 usw. Nullen besitzt.

$0{,}7 : 10 = \frac{7}{10} : 10 = \frac{7}{100} = 0{,}07$ (Komma um eine Stelle nach links)

$0{,}7 : 100 = \frac{7}{10} : 100 = \frac{7}{1000} = 0{,}007$ (Komma um zwei Stellen nach links)

6. Division zweier Dezimalbrüche

Man dividiert zwei Dezimalbrüche, indem man zuerst in beiden das Komma um so viele Stellen nach rechts rückt, wie der Divisor besitzt. Dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl.

$0{,}34 : 2{,}5$

oder $3{,}4 : 25 = 0{,}136$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 90 \\ 75 \\ \hline 150 \\ 150 \end{array}$$

$0{,}00123 : 0{,}19$

oder $0{,}123 : 19 = 0{,}00647 \approx 0{,}0065$

$$\begin{array}{r} 114 \\ \hline 90 \\ 76 \\ \hline 140 \\ 133 \end{array}$$

Aufgabe 10:

a) $0{,}29 + 125{,}2 + 0{,}6067 + 2{,}35 + 10{,}05678 + 167{,}3044$
b) $279{,}5584 - 199{,}46752$

c)	$1{,}75 \cdot 327$	$0{,}6274 \cdot 319$	$0{,}000748 \cdot 48$
d)	$7{,}44 \cdot 1{,}96$	$1{,}622 \cdot 0{,}625$	$94{,}6 \cdot 1{,}75$
e)	$0{,}0364 : 26$	$27{,}306 : 36$	$0{,}009408 : 98$
f)	$10{,}894 : 0{,}13$	$25{,}873 : 9{,}4$	

7. Endliche und unendliche Dezimalbrüche

Jeder Bruch ist eine unausgeführte Division ($\frac{3}{4} = 3 : 4$). Führt man die Division aus, so entsteht ein Dezimalbruch.

Es gibt Brüche, die nach einer bestimmten Stellenzahl **enden** ($\frac{1}{8} = 0{,}125$). Diese heißen daher **endliche Dezimalbrüche.**
Bei anderen Brüchen kann die Rechnung **nie zu Ende** geführt werden ($\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$). Sie heißen **unendliche Dezimalbrüche.**
Dabei kehren immer gewisse Ziffern oder Ziffernfolgen regelmäßig wieder; man bezeichnet diese Ziffern oder Zifferngruppen als die **„Periode"** des unendlichen Dezimalbruches.

Es gibt periodische Dezimalbrüche mit **einstelliger** ($\frac{1}{3}$), **zweistelliger** ($\frac{7}{11}$), **dreistelliger** usw. Periode. Man braucht stets nur soweit zu rechnen, bis die **Periode** erkannt wird. Die Periode wird nur einmal hingeschrieben und durch einen darübergesetzten **Strich** sowie **drei Punkte** angedeutet.

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}\ldots \qquad \frac{7}{11} = 0{,}\overline{63}\ldots$$

Brüche, bei denen keine anderen als die **Primfaktoren 2** und **5** im Nenner vorkommen, ergeben stets **endliche** Dezimalbrüche.
Alle übrigen Brüche ergeben **unendliche periodische** Dezimalbrüche.

Aufgabe 11:
Folgende Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{17}{20} \quad \frac{118}{125} \quad 2\frac{2}{5} \quad 9\frac{7}{8} \quad 7\frac{49}{50} \quad 12\frac{13}{1000}$$

8. Addition und Subtraktion von Brüchen und Dezimalbrüchen

Im allgemeinen kann man **Dezimalbrüche leichter addieren** und **subtrahieren** als gewöhnliche Brüche, weil für die Dezimalbrüche der Hauptnenner nicht erst gesucht zu werden braucht.

Beispiel:

$$2\frac{1}{5} + 0{,}375 + 4\frac{3}{4} + 3{,}5$$

Umwandlung in Dezimalbrüche:

$$2{,}2 + 0{,}375 + 4{,}75 + 3{,}5 = \mathbf{10{,}825}$$

Umwandlung in gewöhnliche Brüche:

$$2\frac{1}{5} + \frac{3}{8} + 4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2} = 9\frac{8}{40} + \frac{15}{40} + \frac{30}{40} + \frac{20}{40} = \mathbf{10\frac{33}{40}}$$

fernmeldelehrling.de

9. Multiplikation und Division beider Brucharten

Im allgemeinen kann man **gewöhnliche Brüche leichter multiplizieren** und **dividieren** als Dezimalbrüche.

Beispiel:

$$0{,}38 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{0{,}38 \cdot 3}{4} = \mathbf{0{,}285} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{19}{\cancel{38}} \cdot 3}{100 \cdot \cancel{4}\,\overset{1}{2}} = \frac{\mathbf{57}}{\mathbf{200}}$$

Aufgabe 12:

a) $\frac{3}{4} + 0{,}625$ $\quad 0{,}8 + \frac{2}{5} + 0{,}75$ $\quad 1{,}48 + 7\frac{1}{2} + 5{,}9$

b) $0{,}048 \cdot 1\frac{3}{8}$ $\quad 0{,}45 \cdot \frac{7}{9}$ $\quad \frac{3}{7} \cdot 0{,}1$ $\quad 1\frac{1}{7} \cdot 0{,}7$ $\quad 7\frac{1}{3} \cdot 0{,}3$

10. Bruchausdrücke mit Dezimalbrüchen im Zähler und Nenner

Sehr oft kommen Ausdrücke vor, die Dezimalbrüche im Zähler und im Nenner enthalten:

$$\frac{4{,}73 \cdot 10}{0{,}01 \cdot 9}$$

Damit die Dezimalbrüche wegfallen, wird der Ausdruck mit **100 erweitert,** d. h. Zähler und Nenner werden mit 100 multipliziert. Hierdurch wird das **Komma** der Dezimalbrüche im Nenner und im Zähler um **zwei Stellen** nach **rechts** gerückt, damit es wegfällt.

$$\frac{\overset{473}{\cancel{4{,}73}} \cdot 10}{\underset{1}{\cancel{0{,}01}} \cdot 9} = \frac{4730}{9} = \mathbf{525{,}5\ldots \approx 525{,}56}$$

Aufgabe 13:

$$\frac{21{,}06 \cdot 0{,}8}{26 \cdot 0{,}0009} \qquad \frac{992{,}1 \cdot \frac{2}{3}}{100\frac{2}{3}}$$

IV. Wiederholungsfragen zum Abschnitt A

1. Welches sind die vier Grundrechnungsarten?
2. Wie bezeichnet man in der Aufgabe $12 + 5 = 17$ die einzelnen Zahlen?
3. Wie bezeichnet man in der Aufgabe $25 - 5 = 20$ die einzelnen Zahlen?
4. Wie bezeichnet man in der Aufgabe $5 \cdot 6 = 30$ die einzelnen Zahlen?

5. Kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren an?
6. Wie bezeichnet man in der Aufgabe $48 : 8 = 6$ die einzelnen Zahlen?
7. Kommt es auf die Reihenfolge der Summanden an?
8. Wie heißen die Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind?
9. Wie läßt sich der größte gemeinsame Teiler finden?
10. Wie kürzt man einen Bruch?
11. Wann ist ein Bruch echt, wann unecht?
12. Wie addiert oder subtrahiert man gleichnamige Brüche?
13. Wie addiert oder subtrahiert man ungleichnamige Brüche?
14. Wie multipliziert man einen Bruch mit einer ganzen Zahl?
15. Wie dividiert man einen Bruch durch eine ganze Zahl?
16. Was versteht man unter dem reziproken Wert eines Bruches?
17. Was versteht man beim Dezimalbruch unter einer Periode?
18. Wie multipliziert man zwei Dezimalbrüche miteinander?
19. Wie multipliziert man einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1000?
20. Wie dividiert man zwei Dezimalbrüche durcheinander?

B. Die Buchstabenrechnung

I. Allgemeines

Die Lehre von den Zahlen und ihren Beziehungen zueinander heißt **Arithmetik.** Ihre Aufgabe ist die Vertiefung und Erweiterung des bisherigen Rechnens. Der Name **Algebra** ist aus dem arabischen Wort „al dschebr" entstanden und wurde beim Rechnen mit Gleichungen gebraucht. Das von den Indern gebrauchte Wort für Algebra bedeutet das Rechnen mit Unbekannten.

Gewöhnlich rechnen wir nur mit **bestimmten Zahlen,**	1, 2, 3, 4, 5, 6
man kann aber auch genauso mit **allgemeinen Zahlen** (Buchstaben) rechnen.	a, b, c, d

Beim Rechnen mit **allgemeinen Zahlen** (Buchstaben) kann für einen Buchstaben (a) jede beliebige Zahl, z. B. 2 oder 6,5 festgelegt werden. Innerhalb einer Aufgabe muß jedoch der ausgewählte Buchstabe stets denselben Zahlenwert beibehalten (z. B. $a = 2$).

Beispiel:

$a + b + a + c = ?$ $\qquad$ für $a = 2, b = 3, c = 4$

$2 + 3 + 2 + 4 = 11$

fernmeldelehrling.de

Für das Rechnen mit **allgemeinen Zahlen** gelten die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit **bestimmten Zahlen.**

Die Aufeinanderfolge der Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. wird als eine **Zahlenreihe** bezeichnet. Sie entsteht, durch das wiederholte Hinzufügen der Zahleneinheit „1". Bildlich kann man die **Zahlenreihe** durch eine Reihe von Punkten darstellen, die man auf einem Strahl, dem **Zahlenstrahl,** vom Anfangspunkt 0 an in gleichen Abständen abträgt.

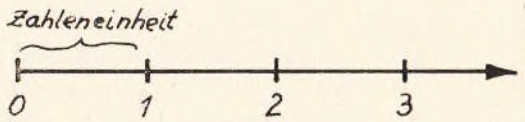


Abb. 10

II. Die Addition

Sollen zwei oder mehrere Zahlen addiert werden, so geht man auf dem Zahlenstrahl von Null angefangen um die betreffenden Werte (Einheiten) nach rechts.

$$3 + 4 = 7$$
$$a + b = c$$

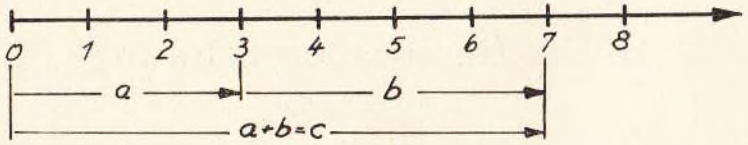


Abb. 11

Die Zahlen a und b sind die **Summanden** und c ist hieraus die **Summe.**

- **Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.**

Beispiel: a + b + c

Folgende Werte sind einzusetzen:

1)	$a = 2,$	$b = 3,$	$c = 4$
2)	$a = 15,$	$b = 20,$	$c = 30$
3)	$a = 2{,}5,$	$b = 4{,}5$	$c = 6$

1) $a + b + c = ?$ $\quad 2 + 3 + 4 = 9$

2) $a + b + c = ?$ $\quad 15 + 20 + 30 = 65$

3) $a + b + c = ?$ $\quad 2{,}5 + 4{,}5 + 6 = 13$

Wir erkennen aus diesem Beispiel, daß jeder Buchstabe in **verschiedenen** Rechnungen eine ganz beliebige Größe darstellen kann. Innerhalb der **gleichen** Rechnung muß der Wert stets der **gleiche** sein.

$$a + b + a = c \qquad \text{für } a = 3 \text{ und } b = 4$$
$$3 + 4 + 3 = 10$$

Aufgabe 14:

$$a + b + c + d = ?$$

Folgende Werte sind einzusetzen:

1.	$a = 4,$	$b = 16,$	$c = 24,$	$d = 35,$
2.	$a = 6{,}5,$	$b = 12{,}4,$	$c = 26{,}6,$	$d = 11{,}5$

Eine **Summe gleicher Summanden** wie $a + a + a$ oder $b + b + b$ schreibt man abkürzend:

$$a + a + a = 3a \qquad b + b + b + b = 4b$$

Die Ziffer (3 bzw. 4) bei einem Buchstaben nennt man **Beizahl** oder Koeffizient. Das Malzeichen (den Punkt) zwischen **Ziffer** und **Buchstaben** $3 \cdot a = 3\,a$ kann man weglassen.

Gleichbenannte allgemeine Zahlen mit verschiedenen Beizahlen werden addiert, indem man die Beizahlen addiert.

$2a + 3a = 5a$ $\quad$ für $a = 2$ ergibt sich:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5 \cdot 2$$

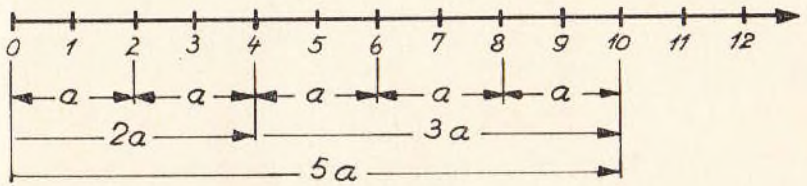


Abb. 12

Auf dem Zahlenstrahl werden die Summanden von links nach **rechts aneinandergefügt.**

Beispiele:

Folgende Werte sind einzufügen:

1. $a = 1,$ $\quad b = 2,$ $\quad c = 3$
2. $a = 7,$ $\quad b = 8,$ $\quad c = 11$

1.		2.	
$3a + 4a + 5a + 6a$	$= 18a$	$3a + 4a + 5a + 6a$	$= 18a$
$3{\cdot}1 + 4{\cdot}1 + 5{\cdot}1 + 6{\cdot}1$	$= 18{\cdot}1$	$3{\cdot}7 + 4{\cdot}7 + 5{\cdot}7 + 6{\cdot}7$	$= 18{\cdot}7$
		$21 + 28 + 35 + 42$	$= 126$
$3b + b + 4b + 7b$	$= 15b$	$3b + b + 4b + 7b$	$= 15b$
$3{\cdot}2 + 2 + 4{\cdot}2 + 7{\cdot}2$	$= 15{\cdot}2$	$3{\cdot}8 + 8 + 4{\cdot}8 + 7{\cdot}8$	$= 15{\cdot}8$
$6 + 2 + 8 + 14$	$= 30$	$24 + 8 + 32 + 56$	$= 120$
$6c + 3c + 2c + 5c$	$= 16c$	$6c + 3c + 2c + 5c$	$= 16c$
$6{\cdot}3 + 3{\cdot}3 + 2{\cdot}3 + 5{\cdot}3$	$= 16{\cdot}3$	$6{\cdot}11 + 3{\cdot}11 + 2{\cdot}11 + 5{\cdot}11$	$= 16{\cdot}11$
$18 + 9 + 6 + 15$	$= 48$	$66 + 33 + 22 + 55$	$= 176$

Steht vor einem Buchstaben keine Zahl, so ist stets **1** zu denken.

fernmeldelehrling.de

Aufgabe 15:

a) $3a + 2b + 6c$
b) $4a + 2b + 3c$

Folgende Werte sind einzusetzen:

1. $a = 2,\ b = 4,\ c = 5$
2. $a = 5,\ b = 6,\ c = 3$

Es lassen sich nur **gleichbenannte** Summanden zusammenfassen.

$$3a + 6a + 4b + 2b = 9a + 6b$$
$$4 + 4c + 8 + 12b + 6c + 4b = 12 + 16b + 10c$$

Gleichbenannte Summanden **in Bruchform** müssen vor dem Addieren **gleichnamig** gemacht werden.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}c + \frac{2}{5}a + \frac{1}{2}c = \frac{1}{3}a + \frac{2}{5}a + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}c$$
$$= \frac{5}{15}a + \frac{6}{15}a + \frac{1}{4}c + \frac{2}{4}c$$
$$= \frac{11}{15}a + \frac{3}{4}c$$

$$1\frac{1}{2}z + 5\frac{2}{3}y + 3\frac{1}{6}z + 4\frac{2}{9}y = 1\frac{3}{6}z + 3\frac{1}{6}z + 5\frac{6}{9}y + 4\frac{2}{9}y$$
$$= 4\frac{4}{6}z + 9\frac{8}{9}y$$
$$= 4\frac{2}{3}z + 9\frac{8}{9}y$$

Summen werden addiert, indem man **gleichnamige** Zahlen **untereinander** schreibt und diese dann addiert.

Summe I : $4x + 5y + 6z$
Summe II : $5z + 2x + 4y$
Summe III: $4y + 2z + 3x$

Lösung:

$$\begin{array}{r|l} & 4x + 5y + 6z \\ + & 2x + 4y + 5z \\ & 3x + 4y + 2z \\ \hline & 9x + 13y + 13z \end{array}$$

Für $x = 20$
$y = 10$
$z = 30$

$= 9 \cdot 20 + 13 \cdot 10 + 13 \cdot 30$
$= 180 + 130 + 390$
$= 700$

Aufgabe 16:

a) $3x + 4y + 3a + 2x + 4a + 10y$
b) $4x + \frac{4}{6}y + \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}y$
c) $2\frac{1}{4}b + 2\frac{1}{8}c + 2\frac{3}{4}b + 3\frac{3}{8}c + 1\frac{1}{4}c$

Setze in den folgenden Aufgaben für $a = 2,\ b = 3\ \ x = \frac{1}{2}$

d) $6b + 4a + 3x$
e) $1{,}2a + 4{,}2x + 2{,}5b$
f) $1\frac{1}{3}b + 3\frac{1}{6}a + 2\frac{1}{4}x$

III. Die Subtraktion

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

$$a - b = c$$

Minuend — Subtrahend = Differenz

In der bildlichen Darstellung bedeutet die Aufgabe $a - b$, daß man von der Zahl a um b nach rückwärts (in der Richtung zum Ausgangspunkt) zurückgeht.

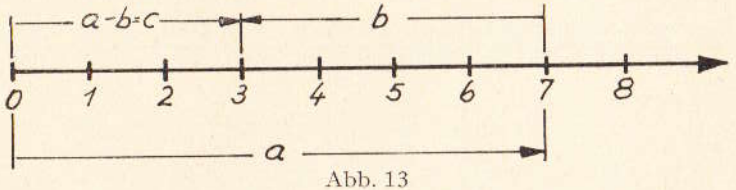


Abb. 13

Aufgaben von der Form

$$a + b - c = 5 + 3 - 4$$

drücken aus, daß die **allgemeinen** Zahlen a, b, c durch Addition oder Subtraktion verbunden werden sollen. Eine solche Zahlenverbindung, heißt eine **mehrgliedrige Größe,** die einzelnen Zahlen heißen **Glieder.**

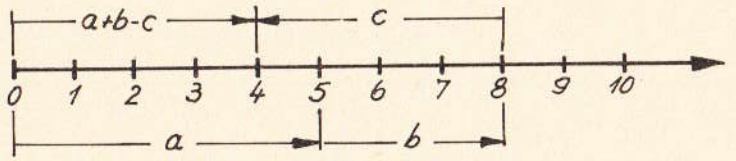


Abb. 14

Die allgemeinen Zahlen a und b werden für die Addition in gleicher Richtung nach rechts aneinander angetragen. Die Zahl c soll hiervon subtrahiert werden, sie wird deshalb in der entgegengesetzten Richtung nach links abgetragen.

fernmeldelehrling.de

Addition und Subtraktion sind **entgegengesetzte** Rechnungsarten.

Beispiel:

Folgende Werte sind einzusetzen:

$$a = 4, \quad b = 5, \quad c = 8$$

1. $6a + 15a - 8b = 6 \cdot 4 + 15 \cdot 4 - 8 \cdot 5$
$= 24 + 60 - 40$
$= \mathbf{44}$

2. $15a + 6b + 12c - 6a - 4c = 9a + 6b + 8c$
$= 9 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 8$
$= 36 + 30 + 64$
$= \mathbf{130}$

Aufgabe 17:

a) $x = b - c$ für $b = \frac{5}{6}$, $c = 0{,}34$

b) $z = a - b - c + d$ für $a = 36$, $b = 12$, $c = 8$, $d = 6$

und $a = 7\frac{1}{4}$, $b = 4\frac{1}{2}$, $c = 1\frac{1}{3}$, $d = \frac{4}{6}$

IV. Die Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken

Wenn in einer Rechenaufgabe eine **Klammer** vorkommt, so ist der von ihr eingeschlossene Ausdruck als **eine** Zahl anzusehen, die zuerst ausgerechnet werden muß.

$$8 + (4 + 2) = 8 + 6 = 14$$
$$8 + (4 - 2) = 8 + 2 = 10$$
$$8 - (4 + 2) = 8 - 6 = 2$$
$$8 - (4 - 2) = 8 - 2 = 6$$

1. Addition einer Summe

Am Zahlenstrahl ist bei der Aufgabe $8 + (4 + 2)$, der Wert 8 nach rechts und daran anschließend der Klammerausdruck $(4 + 2)$ **nach rechts** anzutragen.

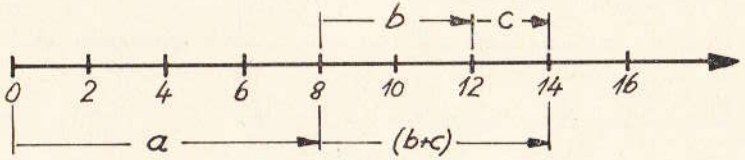


Abb. 15

$$8 + (4 + 2) = 8 + 4 + 2$$
$$a + (b + c) = a + b + c$$

2. Addition einer Differenz

Bei der **Addition** einer Differenz $8 + (4 - 2)$ muß am Zahlenstrahl vom Wert **8** die Differenz $(4 - 2) = \mathbf{2}$ **nach rechts** angetragen werden.

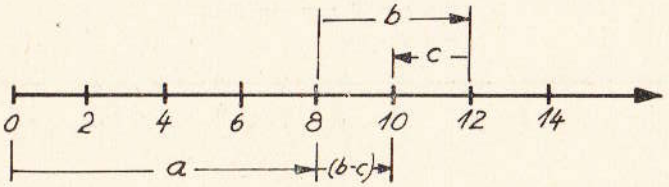


Abb. 16

$$8 + (4 - 2) = 8 + 4 - 2$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$

Aus 1. und 2. ergibt sich folgende Regel:

> Steht vor einer **Klammer** ein **+ Zeichen,** so kann die Klammer ohne weiteres weggelassen werden. Die Zeichen in der Klammer bleiben unverändert.

3. Subtraktion einer Summe

Bei der **Subtraktion** einer Summe $8 - (4 + 2)$ muß am Zahlenstrahl vom Wert 8 die **Summe** $(4 + 2)$ **nach links** abgetragen werden (Pfeilrichtung beachten).

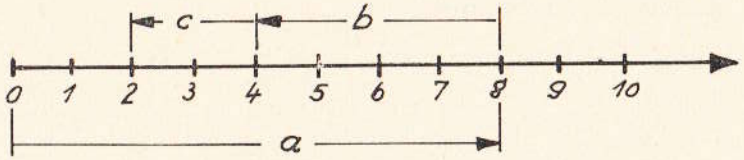


Abb. 17

$$8 - (4 + 2) = 8 - 4 - 2$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$

Man **subtrahiert** eine **Summe,** indem man die Summanden **einzeln** subtrahiert. Die Buchstaben b und c erhalten deshalb das — Zeichen.

fernmeldelehrling.de

4. Subtraktion einer Differenz

Bei der Subtraktion einer Differenz $8 - (4 - 2)$ muß am Zahlenstrahl vom Wert **8** die Differenz **(4 — 2) nach links** abgetragen werden.

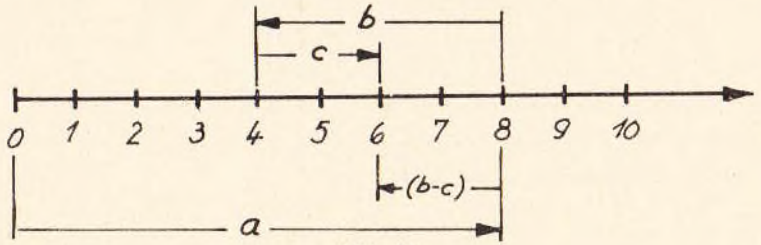


Abb. 18

$$8 - (4 - 2) = 8 - 4 + 2$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Man subtrahiert eine **Differenz,** indem man den **Minuenden subtrahiert** und den **Subtrahenden addiert.** Der Buchstabe b erhält deshalb ein **— Zeichen** und c ein **+ Zeichen.**

Aus 3. und 4. ergibt sich folgende Regel:

Steht vor einer Klammer ein **— Zeichen,** so sind beim Weglassen der Klammer die **Rechenzeichen** der in ihr stehenden Glieder **umzukehren.** D. h. aus — wird + und umgekehrt.

Unter Beachtung der beiden vorstehenden **Regeln** für die Addition und Subtraktion von **Klammerausdrücken** können jetzt auch **vielgliedrige** Klammerausdrücke **addiert** oder **subtrahiert** werden.

Beispiel:

1. $a + (b + c - d)$
2. $a - (b + c - d)$

für $a = 8,\ b = 4,\ c = 2,\ d = 3$

$$\begin{aligned} 1.\ a + (b + c - d) &= a + b + c - d \\ 8 + (4 + 2 - 3) &= 8 + 4 + 2 - 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.\ a - (b + c - d) &= a - b - c + d \\ 8 - (4 + 2 - 3) &= 8 - 4 - 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

V. Die relativen Zahlen

1. Begriff der positiven und negativen Zahlen

Ein lehrreiches Beispiel ist hierfür das Thermometer, bei dem sich die Quecksilbersäule bei **Temperaturzunahme verlängert** und bei Temperaturabnahme verkürzt. Bei dem Vergleich der augenblicklichen Temperatur mit dem **Gefrierpunkt** (0°), spricht der Volksmund von **Wärme-** und **Kältegraden.**

Gradzahlen (Wärmegrade) die die Temperaturen „über 0" andeuten, gibt man das **Vorzeichen** + und im Gegensatz dazu den Gradzahlen „unter 0" das **Vorzeichen** —.

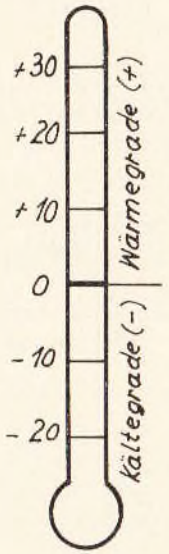


Abb. 19

Solche Zahlen, die nur in bezug auf einen Ausgangspunkt einen bestimmten Sinn haben, heißen relative Zahlen. Im Gegensatz dazu heißen Zahlen, die für sich allein einen bestimmten Wert darstellen, **„absolute Zahlen".**

Ähnliche Fälle, bei denen von einem Nullpunkt nach zwei entgegengesetzten Richtungen gezählt wird, liegen vor beim Bestimmen der Höhenlagen **über** und **unter** dem Meeresspiegel oder bei der Betrachtung von **Vermögen** und **Schulden.** Schulden und Vermögen sind **entgegengesetzte** Größen, die bestimmt werden nach einem Besitz von 0 DM.

Auch in der reinen Arithmetik haben wir es mit **relativen Zahlen** zu tun. Ist z. B. in einer Subtraktionsaufgabe der Subtrahend **größer** als der Minuend (z. B. in der Aufgabe 5—8), so würde auf unserem **Zahlenstrahl** ein Überschreiten der Null nötig sein. So gelangt man zu Zahlen, die jenseits der Null liegen. Man denkt sich die Zahlengerade von Null aus nach links (in gleicher Weise wie nach rechts) verlängert.

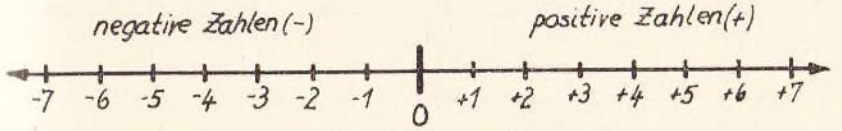


Abb. 20

fernmeldelehrling.de

Die Zahlen **rechts** von **Null** heißen die **positiven Zahlen,** die Zahlen **links** von **Null** heißen die **negativen Zahlen.** Um die beiden Arten zu unterscheiden, gibt man den **positiven** das **Vorzeichen** + und den **negativen** das **Vorzeichen** —.

Die positiven und negativen Zahlen heißen **relative Zahlen** (relativ = bezüglich) Die Plus- und Minuszeichen haben von jetzt ab doppelte Bedeutung. Sie sind **Rechenzeichen** und **Vorzeichen.**

- a) Als **Rechenzeichen** werden + und — bei der **Addition** und **Subtraktion** von Zahlen verwendet.
- b) Die Vorzeichen + und — deuten an, ob es sich um eine **positive** oder **negative** Zahl handelt.

  Die Vorzeichen schließt man mit ihrer Zahl in eine Klammer ein (—5). Besitzt eine Zahl keine Vorzeichen, so gilt sie als **positiv.**

Durch die Einführung der negativen Zahlen ist es möglich, jede Subtraktion als eine **Addition** anzusehen, so ist z. B.

$$12 - 6 + 3 - 4 = 12 + (-6) + 3 + (-4)$$

Aus der Subtraktion —6 ist also die Addition + (—6) einer negativen Zahl geworden.

2. Addition und Subtraktion relativer Zahlen

Die Addition und Subtraktion **positiver** Zahlen bietet nichts Neues, weil wir bereits in den bisherigen Beispielen mit positiven Zahlen unbewußt gerechnet haben.

$6 + (+3) = 6 + 3$ oder $a + (+b) = a + b$
$6 - (+3) = 6 - 3$ $\quad\quad$ $a - (+b) = a - b$

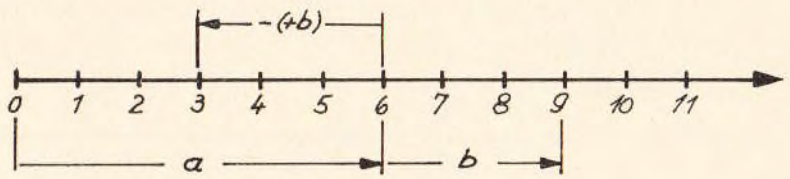


Abb. 21

Die Addition und Subtraktion **negativer** Zahlen ist schon nicht mehr so leicht verständlich.

$6 + (-3)$ oder $a + (-b)$
$6 - (-3)$ $\quad\quad$ $a - (-b)$

Bevor wir die Addition und Subtraktion der vorstehenden Aufgaben durchführen, wollen wir auf der Zahlengeraden feststellen, wo die einzelnen Werte liegen.

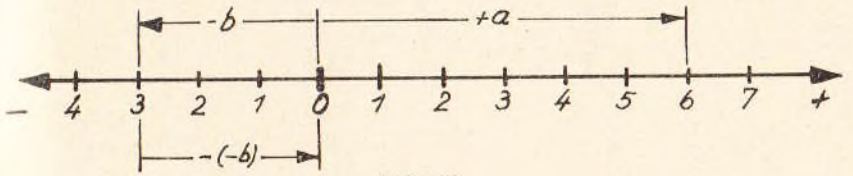


Abb. 22

Die **negative** Zahl — b wird vom **0-Punkt** ausgehend nach **links** aufgetragen. Wenn nun die negative Zahl — b **subtrahiert** — (— b) werden soll, dann muß die Strecke in **entgegengesetzter** Richtung dargestellt werden.

Nun kommen wir mit Hilfe der Zahlengeraden zur Aufgabe zurück:

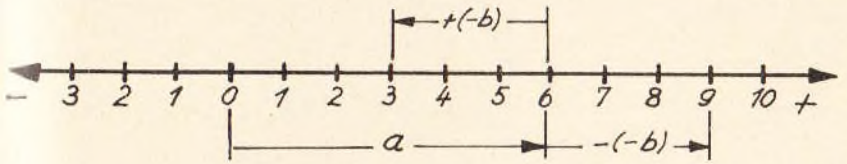


Abb. 23

Die Addition ergibt also $a + (-b) = a - b$
$6 + (-3) = 6 - 3$

und die Subtraktion $a - (-b) = a + b$
$6 - (-3) = 6 + 3$

Es wird vielleicht noch verständlicher, wenn man die Aufgabe mit folgendem Beispiel vergleicht:

a) Wenn zu 6 DM Vermögen 3 DM Schulden hinzukommen, dann wird das Vermögen um diesen Betrag **geringer.** Auf der Zahlengeraden muß also nach **links** abgetragen werden.

b) Wenn 3 DM Schulden weggenommen werden, dann wird das Vermögen um diesen Betrag **größer.** Auf der Zahlengeraden muß also nach **rechts** angetragen werden.

fernmeldelehrling.de

Hieraus folgt die für das Addieren und Subtrahieren relativer Zahlen wichtige Regel:

> Bei einer **relativen** Zahl mit **gleichem** Vor- und Rechenzeichen wird der absolute Wert addiert, mit **verschiedenen** Vor- und Rechenzeichen subtrahiert.

$$\begin{aligned} a + (+b) &= a + b \\ a - (+b) &= a - b \\ a + (-b) &= a - b \\ a - (-b) &= a + b \end{aligned}$$

Beispiele:

$$20a - (-12a) - (+6a) = 20a + 12a - 6a = 26a$$
$$6c - (+13c) = 6c - 13c = -7c$$

3. Übungsbeispiele

Die Addition und Subtraktion wird fortgesetzt, jedoch mit längeren Ausdrücken.

1. Beispiel $4x - 5y + 6z = ?$

Diese Aufgabe läßt sich nicht weiter vereinfachen, denn x, y und z kann man nicht zusammenzählen. Es können jedoch die Werte für x, y und z eingesetzt werden.

x sei für diese Aufgabe $= 20$
y sei für diese Aufgabe $= 10$
z sei für diese Aufgabe $= 30$

$$\begin{aligned} 4x &- 5y &+ 6z &= \\ 4.20 &- 5.10 &+ 6.30 &= \\ 80 &- 50 &+ 180 &= \\ & 30 &+ 180 &= 210 \end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} A &= 4x - 5y + 6z \\ B &= 5y + 8x - 6z \\ C &= -10x + 7z - 9y \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $A + B + C$ sollen addiert werden, wofür zwei Lösungen gezeigt werden.

1. Lösung: Alle gleichnamigen Zahlen (also alle x, y und z) werden für die Addition beziehungsweise Subtraktion untereinander geschrieben.

$$\begin{aligned} A &= 4x - 5y + 6z \\ B &= 8x + 5y - 6z \\ C &= -10x - 9y + 7z \\ \hline A + B + C &= 2x - 9y + 7z \end{aligned}$$

2. Lösung: Die Werte für A, B und C werden je in ein Klammerpaar ( ) gesetzt.

$$(4x - 5y + 6z) + (8x + 5y - 6z) + (-10x - 9y + 7z) =$$

Zunächst sehen wir bei solchen Klammerrechnungen nach, ob sich die Werte innerhalb der Klammer weiter vereinfachen lassen. Das ist hier nicht der Fall. Nun öffnen oder lösen wir die Klammern, d. h. wir lassen die Klammern weg. Das kann hier ohne weiteres geschehen, weil die **Vorzeichen** vor der Klammer + sind. Es heißt nun die Aufgabe:

$$4x - 5y + 6z + 8x + 5y - 6z - 10x - 9y + 7z =$$

Nun ordnen wir die Zahlen so, daß alle gleichnamigen zusammenkommen:

$$\underbrace{4x + 8x}_{12x} - 10x - \underbrace{5y + 5y}_{0} - 9y + \underbrace{6z - 6z}_{0} + 7z =$$
$$12x - 10x - 0 - 9y + 0 + 7z =$$
$$2x - 9y + 7z =$$

Setzen wir nun die Werte für x, y und z aus dem 1. Beispiel ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2x &- 9y &+ 7z &= \\ 2.20 &- 9.10 &+ 7.30 &= \\ 40 &- 90 &+ 210 &= 160 \end{aligned}$$

3. Beispiel:

Jetzt soll berechnet werden, wieviel $A + B - C$ ist.

$$+\begin{cases} A = 4x - 5y + 6z \\ B = 8x + 5y - 6z \end{cases}$$
$$- \quad C = -10x - 9y + 7z$$

1. Lösung:

$$\begin{aligned} A &= 4x - 5y + 6z \\ B &= 8x + 5y - 6z \\ \hline A + B &= 12x \end{aligned}$$

Nun die Subtraktion:

$$\begin{aligned} A + B &= 12x \\ -C &= -10x - 9y + 7z \end{aligned}$$

Nun rechnet der Anfänger:

$= 2x - 9y + 7z$ Das ist aber falsch!

Das wäre ja das gleiche Ergebnis wie bei der Addition $A + B + C$ Wir haben also C dazugezählt, statt abgezogen. Damit wir aber den Wert C subtrahieren, können wir ihn in eine Klammer setzen und sagen $-(-10x - 9y + 7z)$. Wir wissen bereits, daß sich jetzt bei der Auflösung der Klammer die Vorzeichen ändern. Demnach entsteht aus der Aufgabe:

$$\begin{aligned} A + B &= 12x \\ -C &= -(-10x - 9y + 7z) \end{aligned}$$

Die neue Aufgabe:

$$\begin{aligned} A + B &= 12x \\ -C &= 10x + 9y - 7z \\ \hline & 22x + 9y - 7z \end{aligned}$$

fernmeldelehrling.de

2. Lösung: **Übersichtlicher** ist die Aufgabe, wenn die Ausdrücke in Klammern gesetzt werden.

$$(4x - 5y + 6z) + (8x + 5y - 6z) - (-10x - 9y + 7z) =$$

Vor der 2. Klammer steht ein + Zeichen, vor der 3. Klammer ein — Zeichen. Wir können die 2. Klammer ohne weiteres weglassen, alle Vorzeichen in der Klammer bleiben. Bei der 3. Klammer aber fällt das — Zeichen vor der Klammer weg, alle Vorzeichen in der Klammer werden umgekehrt.

$$4x - 5y + 6z + 8x + 5y - 6z + 10x + 9y - 7z =$$

Nun ordnen wir:

$$\underbrace{4x + 8x + 10x}_{22x} \underbrace{- 5y + 5y}_{0} + 9y + \underbrace{6z - 6z}_{0} - 7z =$$

$$22x + 9y - 7z =$$

Wir setzen die Werte ein und erhalten:

$$22 \cdot 20 + 9 \cdot 10 - 7 \cdot 30 =$$
$$440 + 90 - 210 = 320$$

Nun ist wohl jedem klar geworden, daß die Buchstabenrechnung eine bedeutende Arbeitsersparnis darstellt, vor allem viele Rechenfehler ausschaltet, weil wir ja erst zuletzt die Zahlen einsetzen. Das gilt besonders bei recht komplizierten Werten für x, y, z usw., vielleicht mit Dezimal- oder gewöhnlichen Brüchen.

4. Beispiel:

Eine Aufgabe mit mehreren Klammern:

$$10a - [6a - (5c + 6a - 4b) - 15b] =$$

Die Klammern haben eine Rangordnung. Die höchste ist die eckige [ ], dann folgt die runde ( ) in dieser Klammerordnung. Zur Auflösung mehrerer Klammern löst man sie am besten **von innen nach außen** auf. Man läßt erst die runde ( ) Klammer weg, beachtet dabei bei — ( ) vor der Klammer die Umkehrung der Vorzeichen aller Zahlen in dieser Klammer. Dann läßt man die eckige [ ] (weg, dabei — Vorzeichen beachten.

$$10a - [6a - (5c + 6a - 4b) - 15b] =$$
$$10a - [6a - 5c - 6a + 4b - 15b] =$$
$$10a - 6a + 5c + 6a - 4b + 15b =$$
$$10a + 5c + 11b$$

Aufgabe 18:

1. $(a + b - c) - (d + b - c) =$
2. $(a + b) - (b + c) - (a - b - c) =$
3. $(a + b) - (a - c + b) =$
4. $(x + y) + [(x - y) - (x + y - z)] =$
5. $(x - z + y) - [(y + x) - (y - z)] =$
6. $a - [b - (c - (d + e)) + f] =$
7. $x - [y + (z + (n + v))] =$
8. $2\frac{1}{4}y + (-3\frac{1}{2}y) - (-\frac{1}{4}y) + y =$

VI. Die Multiplikation

Die aus drei **gleichen** Summanden bestehende Summe $2 + 2 + 2$ kann man abgekürzt $3 \cdot 2$ schreiben. Der eine Faktor gibt an, wieviel mal der andere als Summand gesetzt werden soll. **Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition gleicher Summanden.** Auch hier kann die Zahlengerade zur bildlichen Darstellung benutzt werden.

a) Die Strecke (+ 2) soll dreimal addiert werden:

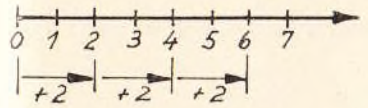


Abb. 24

$$(+2) + (+2) + (+2) = +6$$
$$+2 + 2 + 2 = +6$$
$$3 \cdot (+2) = +6$$

b) Die Strecke (— 2) soll dreimal addiert werden:

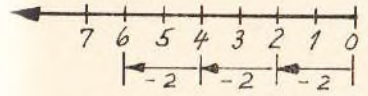


Abb. 25

$$(-2) + (-2) + (-2) = -6$$
$$-2 - 2 - 2 = -6$$
$$3 \cdot (-2) = -6$$

c) Die Strecke (+ 2) soll dreimal subtrahiert werden:

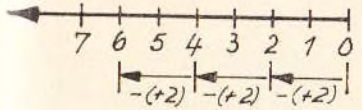


Abb. 26

$$-(+2) - (+2) - (+2) = -6$$
$$-2 - 2 - 2 = -6$$
$$-3 \cdot (+2) = -6$$

fernmeldelehrling.de

d) Die Strecke (— 2) soll dreimal **subtrahiert** werden:

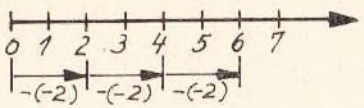


Abb. 27

$$-(-2)-(-2)-(-2)=+6$$
$$+2\quad+2\quad+2\quad=+6$$
$$-3\cdot\qquad(-2)=+6$$

Das Multiplikationszeichen ist der Punkt. Er darf vor allgemeinen Zahlen und vor oder nach einer Klammer **fehlen.** ($5a$ bedeutet $5 \cdot a$; abc bedeutet $a \cdot b \cdot c$; $3\,(m + n)$ bedeutet $3 \cdot (m + n)$).

- **In einem Produkt dürfen die Faktoren miteinander vertauscht werden.**

Es ist $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

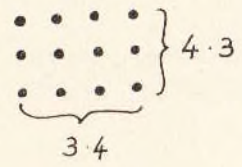


Abb. 28

Bildlich kann man das Produkt $3 \cdot 4$ durch Punkte darstellen, die man in 4 Reihen mit je 3 Punkten zu einem Rechteck anordnet. Diese Punktanordnung stellt sich von der kurzen Rechteckseite betrachtet in 3 Reihen zu 4 Punkten dar

Allgemein gilt: $a \cdot b = b \cdot a$

- **Bei einem Produkt von mehreren Faktoren ist die Reihenfolge für das Ergebnis gleichgültig.**

$$3 \cdot 6 \cdot 8 = 8 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 8 \cdot 3$$
$$a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot a$$

1. Multiplikation von Klammerausdrücken

a) Wenn die Zahl 235 mit 3 multipliziert werden soll, dann kann man die Zahl 235 in die Summe $200 + 30 + 5$ zerlegen und jeden Summanden mit 3 multiplizieren.

$$(200 + 30 + 5) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 705$$

b) Bei der gleichen Aufgabe kann man aber auch die Zahl 235 als Differenz von $250 - 15$ betrachten,

$$(250 - 15) \cdot 3 = 250 \cdot 3 - 15 \cdot 3 = 750 - 45 = 705$$

Aus diesem Beispiel ergibt sich folgende Regel:

Zu a) Man multipliziert eine **Summe** mit einer Zahl, indem man jeden Summanden **einzeln** multipliziert und die Teilprodukte addiert.

$$(a + b)\,n = an + bn$$

Zu b) Man multipliziert eine **Differenz** mit einer Zahl, indem man den Minuenden und den Subtrahenden **einzeln** multipliziert und vom ersten Teilprodukt das zweite subtrahiert.

$$(a - b)\,n = an - bn$$

Eine Veranschaulichung ist in den beiden Rechtecken gegeben, dessen Seiten die Maßzahlen a, b und n enthalten.

a)

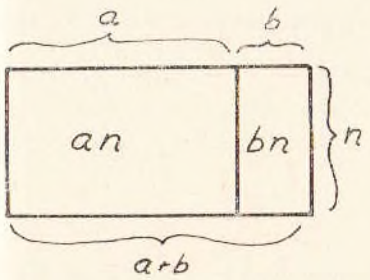


Abb. 29

(a + b) n = an + bn

b)

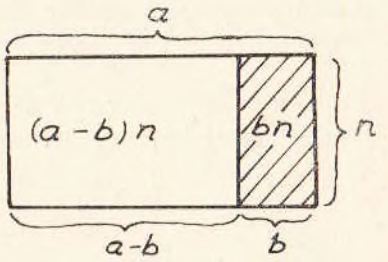


Abb. 30

(a — b) n = an — bn

Multiplikation von zwei Klammerausdrücken:

Wenn 36 mit 23 multipliziert werden soll, dann kann man dafür z. B. auch zwei Summen miteinander multiplizieren.

$$(30 + 6) \cdot (20 + 3)$$

Die Klammer $(30 + 6)$ ist $20 + 3$ **mal** als Summand zu setzen. Das geschieht, indem man $(30 + 6)$ **zuerst** mit 20 und **dann** mit 3 multipliziert und die Produkte **addiert.**

$$\begin{aligned}(30 + 6) \cdot (20 + 3) &= (30 + 6) \cdot 20 + (30 + 6) \cdot 3\\ &= 30 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 30 \cdot 3 + 6 \cdot 3\\ &= 828\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{oder}\quad (a + b)\,(c + d) &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d\\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Merke:

Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Dabei ist immer auf das Vorzeichen der Glieder zu achten.

fernmeldelehrling.de

2. Das Vorzeichen beim Multiplizieren

a) Wenn ein **Guthaben** (+ 3) zweimal **hinzugefügt** wird (+ 2) · **(+ 3)**, dann **wächst** das Vermögen.

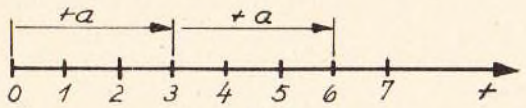


Abb. 31

$$(+2)\cdot(+3) = +6$$
$$(+n)\cdot(+a) = an$$

b) Wenn ein **Schuldbetrag** (— 3) zweimal **abgezogen** wird (— 2) · **(— 3)**, dann **wächst** auch das Vermögen.

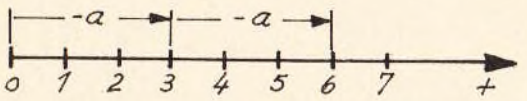


Abb. 32

$$(-2)\cdot(-3) = +6$$
$$(-n)\cdot(-a) = an$$

c) Wenn ein **Guthaben** (+ 3) zweimal **abgezogen** wird (— 2). **(+ 3)**, dann wird das Vermögen **geringer.**

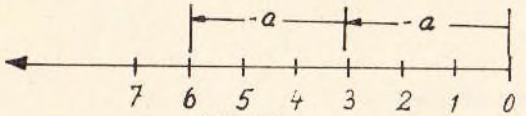


Abb. 33

$$(-2\cdot(+3) = -6$$
$$(-n)\cdot(+a) = -an$$

d) Wenn ein **Schuldbetrag** (— 3) zweimal **hinzugefügt** wird (+ 2). **(— 3)**, dann wird das Vermögen **geringer.**

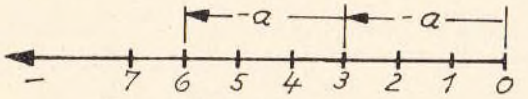


Abb. 34

$$(+2)\cdot(-3) = -6$$
$$(+n)\cdot(-a) = -an$$

Hieraus ergibt sich folgende Vorzeichenregel:

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, das Produkt zweier Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

$$+\cdot+ = +$$
$$+\cdot- = -$$
$$-\cdot+ = -$$
$$-\cdot- = +$$

3. Übungsbeispiele:

$$4\,(a+b) = 4a+4b$$
$$7\,(a+b+c) = 7a+7b+7c$$
$$5\,(c-d+e) = 5c-5d+5e$$
$$6\,(3a+2b) = 18a+12b$$
$$11\,(5x-2y+3z) = 55x-22y+33z$$

Jeder Teil in der Klammer ist mit dem Faktor vor (oder hinter) der Klammer zu multiplizieren. Um sich von der Richtigkeit einer Aufgabe zu überzeugen, kann man für die Buchstaben *a*, *b*, c usw. einen bestimmten Wert einsetzen und dann zur Probe nachrechnen, ob alles stimmt. So setzen wir vielleicht im ersten Beispiel für $a = 6$ und $b = 4$. Nun prüfen wir, ob das gleiche Resultat herauskommt:

$$4\,(a+b) = 4a+4b$$
$$4\,(6+4) = 4\cdot6+4\cdot4$$
$$4\,(10) = 24+16$$
$$40 = 40$$

Statt mit einer bestimmten Zahl vor der Klammer, kann man auch mit einer allgemeinen Zahl, d. h. mit einem Buchstaben multiplizieren:

$$n\,(a+b) = na+nb$$
$$2m\,(a+b+c) = 2ma+2mb+2mc$$
$$x\,(c-d+e) = xc-xd+xe$$
$$y\,(3a+2b) = 3ay+2by$$
$$2a\,(5x-2y+3z) = 10ax-4ay+6az$$

Es ist immer darauf zu achten, daß jedes einzelne Glied in der Klammer bei der Multiplikation berücksichtigt wird. Steht jedoch keine Klammer, so ist nur die Zahl mit **dem** Faktor zu multiplizieren, bei dem er steht.

Unterscheide also:

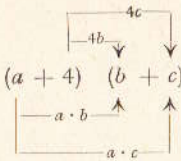
$$(a+b+18)\,12 = 12a+12b+12\cdot18$$
$$a+b+18\cdot12 = a+b+18\cdot12$$
$$(a+b+18)\,c = ac+bc+18c$$
$$a+b+18c = a+b+18c$$

Bei der Multiplikation von zwei Summen muß bekanntlich jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert werden.

$$(a+4)\,(b+c)$$

Wir müssen also den Buchstaben *a* der ersten Klammer mit *b* und *c* der zweiten und die Zahl 4 ebenfalls mit *b* und *c* der zweiten Klammer multiplizieren.

fernmeldelehrling.de



$$(a + 4)\ (b + c) = ab + ac + 4b + 4c$$

$$(a + b)\ (c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(5a + 2b)\ (6 - x) = 5a \cdot 6 - 5ax + 2b \cdot 6 - 2bx$$
$$= 30a - 5ax + 12b - 2bx$$

Die Richtigkeit dieser Rechnung soll mit folgendem Beispiel noch deutlicher gemacht werden:

Bekanntlich ist $6 \cdot 8 = 48$

Die beiden Faktoren 6 und 8 sollen durch Klammerausdrücke ersetzt werden:

$$(4 + 2)\ (10 - 2) = 4 \cdot 10 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2$$
$$= 40 - 8 + 20 - 4$$
$$= 48$$

oder
$$(9 - 3)\ (10 - 2) = 9 \cdot 10 - 9 \cdot 2 - 3 \cdot 10 + 3 \cdot 2$$
$$= 90 - 18 - 30 + 6$$
$$= 48$$

Erfahrungsgemäß macht das Multiplizieren mit negativem (—) Vorzeichen dem Anfänger einige Schwierigkeiten.

Man bedenke stets:

+	·	+	=	+
—	·	+	=	—
+	·	—	=	—
—	·	—	=	+

$$(a - b)\ (c - d) = ac - ad - bc + bd$$
$$(-a + b)\ (c - d) = -ac + ad + bc - bd$$
$$(-a + b)\ (-c + d) = ac - ad - bc + bd$$
$$(-a - b)\ (c + d) = -ac - ad - bc - bd$$
$$(-a - b)\ (-c - d) = ac + ad + bc + bd$$

Nun noch einige größere Aufgaben mit Klammern:

$$m + n\ (p + r - v) - a\ (b - c) = m + np + nr - nv - ab + ac$$

Die Klammer fällt; jede Größe in der Klammer wird mit dem Faktor vor (oder hinter) der Klammer multipliziert, also $+n \cdot +p$, $+n \cdot +r$, $+n \cdot -v$ usw. Weiter ist bekanntlich zu beachten, daß bei — vor der Klammer alle Vorzeichen umzukehren sind, sobald die Klammer weggelassen wird.

Beispiel:

$(3a - b + c)\ d - (4a + 2b - c)\ f + (8a + 5b - 6c)\ d + 40ad - 30cd =$
$3ad - bd + cd - (4af + 2bf - cf) + 8ad + 5bd - 6cd + 40ad - 30cd =$
$3ad - bd + cd - 4af - 2bf + cf + 8ad + 5bd - 6cd + 40ad - 30cd =$
$3ad + 8ad + 40ad - bd + 5bd + cd - 6cd - 30cd - 4af - 2bf + cf =$
$51ad + 4bd - 35cd - 4af - 2bf + cf$

Man kann zuerst die Klammern mit dem — Vorzeichen stehen lassen und zunächst die Multiplikation ausführen; oder man kann auch (wie im nächsten Beispiel gezeigt) gleich multiplizieren und gleichzeitig beim Niederschreiben alle Vorzeichen umkehren.

$$a\ (m - n + p) - b\ (n - m + p) + c\ (m + n - p) =$$
$$am - an + ap - bn + bm - bp + cm + cn - cp$$

Aufgabe 19:

a) $(-4a) \cdot 6 =$
b) $5\ (4x + 5) =$
c) $(a + 4)\ (4 + 1) =$
d) $(n - 4)\ (a + 5) =$
e) $(8a + 2b)\ (8 - 4) =$
f) $(6a + 3b - 5c)\ 7x - [(5a - 4b + 5c) \cdot 2x] =$

VII. Die Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

Die Regeln ergeben sich unmittelbar durch Umkehrung der Sätze über die Multiplikation.

Wenn z. B. bei der Multiplikation $4 \cdot 5 = ?$ die Faktoren 4 und 5 gegeben sind und das Produkt gesucht wird, so kann auch das Produkt 20 und der eine Faktor 5 bekannt, der andere Faktor dagegen gesucht sein. $(? \cdot 5 = 20)$. Es wird der Wert (Quotient) gesucht, der mit dem Divisor multipliziert, den Dividenden ergibt. Man schreibt diese Aufgabe in der Form

20	:	5	=	4
Dividend		Divisor		Quotient

fernmeldelehrling.de

Das Rechenzeichen bei der Division ist der Doppelpunkt :. Es ist aber auch üblich, die Division in Bruchform darzustellen, das gilt besonders bei allgemeinen Zahlen.

$$\frac{20}{5} = 4 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = c$$

Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) darf man **nicht** vertauschen, sonst erhält man den Kehrwert (reziproken Wert) des Bruches.

- **Bei der Division relativer Zahlen gilt hinsichtlich der Vorzeichen dasselbe wie bei der Multiplikation.**

+	: +	=	+
+	: −	=	−
−	: +	=	−
−	: −	=	+

$$(+a) : (+b) = +(a : b)$$
$$(+a) : (-b) = -(a : b)$$
$$(-a) : (+b) = -(a : b)$$
$$(-a) : (-b) = +(a : b)$$

1. Division von Brüchen

Wir erinnern uns an folgende Regel aus der Bruchrechnung:

- Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den **Nenner** mit der Zahl multipliziert (oder mit dem reziproken Wert multipliziert).

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

- Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch einen Bruch (Divisor) dividiert, indem man mit seinem **reziproken** Wert multipliziert.

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

$$2 : \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3} \qquad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$$

2. Division einer mehrgliedrigen Größe durch eine Zahl

a) Wenn die Zahl 192 durch 3 dividiert werden soll, dann kann man die Zahl 192 in die Summe 150 + 30 + 12 zerlegen und jeden Summanden mit 3 dividieren.

$$\frac{150 + 30 + 12}{3} = \frac{150}{3} + \frac{30}{3} + \frac{12}{3} = 50 + 10 + 4 = 64$$

Allgemein ist:

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

- Eine **mehrgliedrige** Größe wird durch eine Zahl dividiert, indem man **jedes** Glied durch die Zahl dividiert und die Quotienten addiert.

Wenn man diesen Rechenvorgang rückwärts betrachtet, dann erkennt man:

- **Gleichnamige** Brüche werden vereinigt, indem man die Zähler auf einem gemeinsamen Bruchstrich addiert oder subtrahiert und unter dem Bruchstrich den gemeinsamen Nenner angibt.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a - b + c}{d}$$

Ungleichnamige Brüche können nicht ohne weiteres vereinigt werden. Man muß sie **gleichnamig** machen, d. h. sie so erweitern, daß sie den gleichen Nenner erhalten.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4 + 3}{3 \cdot 2} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + cb}{bd}$$

3. Rangfolge der Punkt- und Strichrechnung

Kommen in einer Aufgabe Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten ohne Klammer vor, so müssen stets Produkte und Quotienten **zuerst** ausgerechnet werden.

Beispiele

$$4 + \underbrace{12 \cdot 2} - \underbrace{6 : 2} =$$
$$4 + 24 - 3 = 25$$

$$10a^2 - \underbrace{4a \cdot 2a} + \underbrace{4a : a} =$$
$$10a^2 - 8a^2 + 4 = 2a^2 + 4$$

fernmeldelehrling.de

Soll eine andere Reihenfolge vorgeschrieben werden, dann sind Klammern zu setzen. Innerhalb der Klammern gelten die allgemeinen Rechenregeln.

Beispiel

$$\begin{aligned} 4\,(4+\underbrace{8\cdot 2})-20-\underbrace{24:4}&= \\ 4\,(4+16)-20-6&= \\ 4\cdot 20-20-6&= \\ 80-20-6&=54 \end{aligned}$$

Merke: Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Herausziehen und Kürzen eines gemeinsamen Faktors aus einer Summe:

Ist der Zähler oder Nenner eine Summe, so muß man den gemeinsamen Faktor aus der Klammer herausziehen und dann gleiche Faktoren kürzen.

$$\frac{amn+bmn-cmn}{mn}=\frac{mn\,(a+b-c)}{mn}=a+b-c$$

$$\frac{ax+bx-c}{x}=\frac{x\,(a+b)}{x}-\frac{c}{x}=a+b-\frac{c}{x}$$

4. Übungsbeispiele

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, sich bei der Buchstabenrechnung eine Teilungsaufgabe als echte Rechnung vorzustellen. Wir werden deshalb mehrere Beispiele zur Übung heranziehen.

Bei einer Aufgabe $\frac{a}{b}=\,?$ ist das Ergebnis unbestimmt. Sein Wert wird erst nach dem Einsetzen von a und b bestimmt. Denken wir uns für $a=4$ und $b=2$, dann ist

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{2}=2$$

Sind Zähler und Nenner **gleich,** so ergibt sich stets 1, auch wenn in der Buchstabenrechnung keine bestimmte Zahl vorkommt.

$$\frac{a}{a}=\frac{4}{4}=1 \qquad \frac{b}{b}=1 \text{ usw.}$$

Ebenso ist auch: $\frac{a\;b}{a\;b}=1 \qquad \frac{x\;y}{x\;y}=1$

Nur darf man es nicht verwechseln:

$$a+\underline{b:a}+b=\textbf{nicht } 1$$

Wir haben gehört, daß Punktrechnung (:) vor Strichrechnung (+) geht. Bei diesem Beispiel muß also erst die Division $b:a$ ausgeführt werden, dann erst die Additionen:

$$a+\frac{b}{a}+b$$

Anders ist es, wenn $a+b$ in Klammern gesetzt wird, dann heißt es:

$$(a+b):(a+b)=\frac{a+b}{a+b}=1$$

Setzen wir den Ausdruck $a+b$ auf einen Bruchstrich oder als Nenner darunter, so ist keine Klammer notwendig. **Der Bruchstrich ersetzt die Klammer.**

Machen wir die Probe ob das stimmt. Setzen wir $a=5$; $b=6$. Wir setzen nun bei jedem der vorhin gefundenen Buchstabenausdrücke die Werte für a und b ein; es muß immer dasselbe herauskommen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 24a-(48a+56b):8&=24\cdot 5-(48\cdot 5+56\cdot 6):8\\ &=120-(240+336):8\\ &=120-576:8\\ &=120-72\\ &=48 \end{aligned}$$

oder: $$\begin{aligned} 24a-\frac{(6a+7b)\,\cancel{8}}{\cancel{8}}&=24\cdot 5-(6\cdot 5+7\cdot 6)\\ &=120-(30+42)\\ &=120-72\\ &=48 \end{aligned}$$

oder: $$\begin{aligned} 18a-7b&=18\cdot 5-7\cdot 6\\ &=90-42\\ &=48 \end{aligned}$$

Immer dasselbe Ergebnis, also stimmt es.

Beispiele:

$$14m+\left[(3m-2n)\,x-3\,(5m+7n)\,x\right]:x=$$

Die Teilung durch x bezieht sich nur auf den Ausdruck in der eckigen Klammer. Da jedes Glied die Zahl x enthält, so können wir durch x kürzen. Wir ziehen also die x heraus. Vorher müssen jedoch die runden Klammern aufgelöst werden.

fernmeldelehrling.de

$$14m + [3mx - 2nx - 15mx - 21nx] : x =$$
$$14m + [-12mx - 23nx] : x =$$
$$14m + x\,[-12m - 23n] : x =$$
$$14m + \frac{x\,[-12m - 23n]}{x} =$$
$$14m + [-12m - 23n] =$$
$$14m - 12m - 23n =$$
$$2m - 23n$$

Dagegen $\dfrac{12ab - 15bc + 8bd}{4b}$

Hier ist $4b$ nicht in allen Gliedern des Zählers (Dividenden) enthalten, aber b ist überall vorhanden, also ziehen wir b heraus und erhalten:

$$\frac{b\,(12a - 15c + 8d)}{4b} = \frac{12a - 15c + 8d}{4}$$

Beispiel Nr. 1: $24a - (48a + 56b) : 8$

Hier bezieht sich das : 8 nicht auf den ganzen Ausdruck, so verlockend auch $24a$ aussieht. Wenn das gemeint wäre, so müßte der ganze Ausdruck in Klammern stehen, also so:

Beispiel Nr. 2: $(24a - (48a + 56b)) : 8$

Nach der Rangordnung der Rechenzeichen muß in dem Beispiel Nummer 1 die Division nur mit dem in Klammern gesetzten Ausdruck $(48a + 56b) : 8$ durchgeführt werden.

Es gibt noch zwei weitere Möglichkeiten:

Beispiel Nr. 3: $(24a - 48a + 56b) : 8$
Beispiel Nr. 4: $(24a - 48a) + 56b : 8$

Auch bei Nummer 3 erstreckt sich die Division : 8 auf den ganzen Ausdruck; es ergibt sich aber doch ein anderes Resultat als in dem Beispiel Nummer 2.

Bei Nummer 4 dagegen ist nur $56b$ durch 8 zu teilen.

Nun zurück zum Beispiel Nummer 1:

Da wir nur den Klammerausdruck $(48a + 56b)$ durch 8 teilen müssen, versuchen wir aus diesen beiden Zahlen die 8 herauszuziehen, also so:

$$24a - 8\,(6a + 7b) : 8 = 24a - \frac{8\,(6a + 7b)}{8} = 24a - (6a + 7b)$$

Diese Aufgabe läßt sich noch weiter rechnen:

$$24a - (6a + 7b) = 24a - 6a - 7b = 18a - 7b$$

Beachte nochmals:

Sind Zähler und Nenner gleich, so ergibt sich hieraus der Wert 1. Es muß aber ganz genau darauf geachtet werden, ob beide Ausdrücke vollständig übereinstimmen.

$$2ab : 2ab = \frac{2ab}{2ab} = 1$$

$2ba : 2ab$ = dasselbe, also auch 1

aber $2ab : (2a + b) = \dfrac{2ab}{2a + b}$ = **nicht 1**

Bei der letzten Aufgabe ist der Quotient nicht **1**. Denn $2ab$ ist etwas anderes als $2a + b$. Denken wir uns Werte eingesetzt, z. B. $a = 6$, $b = 8$.

$$\frac{2ab}{2ab} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{96}{96} = 1$$

$$\frac{2ab}{2a + b} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 6 + 8} = \frac{96}{20} = 4{,}8$$

Stehen Zahlen und Buchstaben auf oder unter dem Bruchstrich nebeneinander, so soll man immer versuchen zu kürzen.

Beispiele: $\dfrac{12acxy}{12axy} = \dfrac{c}{1} = c$ $\qquad \dfrac{cd}{c} = d$ $\qquad \dfrac{4c}{5c} = \dfrac{4}{5}$

$\dfrac{4d}{5c} = \dfrac{4d}{5c}$ (nichts zu kürzen) $\qquad \dfrac{20c}{5c} = 4$

Merke:

- Enthält der Zähler in allen Teilen die gleiche Größe wie der Nenner, so zieht man diese heraus und kürzt, indem man sie oben und unten wegläßt.

$$\frac{12ab - 16bc + 8bd}{4b} = \frac{4b\,(3a - 4c + 2d)}{4b} = 3a - 4c + 2d$$

Da bei dem vorstehenden Bruch sowohl oben wie unten $4b$ enthalten ist, so ziehen wir oben $4b$ aus allen Gliedern heraus und kürzen.

VIII. Wiederholungsfragen zum Abschnitt B

1. Was sind bestimmte Zahlen?
2. Was sind allgemeine Zahlen?
3. Was ist eine Beizahl?
4. Wann darf man das Malzeichen weglassen?

fernmeldelehrling.de

5. Was sind relative Zahlen?
6. Wie werden relative Zahlen addiert und subtrahiert?
7. Was ist zu beachten, wenn ein + Zeichen vor der Klammer steht?
8. Was ist zu beachten, wenn ein — Zeichen vor der Klammer steht?
9. Welche Vorzeichenregeln muß man beim Multiplizieren beachten?
10. Was ist zu beachten, wenn kleine Klammern von großen eingeschlossen sind?
11. Wie wird eine Zahl mit einer Summe multipliziert?
12. Wie werden Summen miteinander multipliziert?
13. Wann kann man Faktoren ausklammern?
14. Welche Vorzeichenregeln muß man beim Dividieren beachten?
15. Kann man eine Summe durch eine Zahl dividieren?

C. Die Potenzrechnung

Wie das Multiplizieren eine Abkürzung des Addierens **gleicher Summanden** ist (z. B. $a + a + a = 3 \cdot a$), so ist das **Potenzieren** eine Abkürzung des Multiplizierens gleicher Faktoren.

z. B. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

oder $\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{Faktoren}} = \underbrace{a^3}_{\text{Potenz}}$

3 — Exponent (Hochzahl)

a — Basis (Grundzahl)

- **Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren.**
- **Den sich wiederholenden Faktor (a) nennt man die Basis (Grundzahl) der Potenz.**
- **Die Zahl, welche die Anzahl der Faktoren bestimmt (^{3}), heißt Exponent (Hochzahl) der Potenz.**
- **Das Produkt selbst, heißt Potenz. Das Ergebnis heißt Potenzwert.**
- **Das Rechnungszeichen des Potenzierens besteht darin, daß man den Exponenten als kleiner geschriebene Zahl rechts oben neben die Basis setzt (a^3).**

$a \cdot a = a^2$ ist die zweite Potenz von a,
gelesen: „a **hoch 2**“ oder „a **Quadrat**“

$a \cdot a \cdot a = a^3$ ist die dritte Potenz von a,
gelesen: „a **hoch 3**“

$a \cdot a \cdot a \ldots . n$ **mal** $= a^n$ ist die n-te Potenz von a,
gelesen: „a **hoch** n“ oder „a **zur** n**-ten Potenz**“

$a = a^1$ Die Zahl a selbst kann man als die erste Potenz von a auffassen und a^1 schreiben.

Der **Potenz-Exponent** gibt also auf **einfache, kurze** Weise eine Rechenoperation an, die sonst nur zeit- und raumraubend darzustellen wäre.

Beispiel:

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$
$$12^2 = 12 \cdot 12 = 144$$
$$12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$$

- Ist ein gewöhnlicher Bruch zu potenzieren so müssen **Zähler und Nenner** potenziert werden.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} \quad \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{343}{512}$$

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^2 = 2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 8}{3 \cdot 3} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

Das **Quadrieren** wollen wir im Hinblick auf das nächste Kapitel (Radizieren) besonders eingehend behandeln.

Eine einstellige Zahl quadrieren (3^2, 4^2, 9^2 usw.) ist eine einfache Sache.

Das **Quadrieren** einer **zweistelligen** Zahl, z. B. $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$, soll im Hinblick auf das nächste Kapitel (Radizieren) durch eine bildliche Darstellung veranschaulicht werden.

fernmeldelehrling.de

$12 \cdot 12 =$

$10 \cdot 10 = 100$
$10 \cdot \ 2 = \ 20$
$2 \cdot 10 = \ 20$
$2 \cdot \ 2 = \ 4$

$= 144$

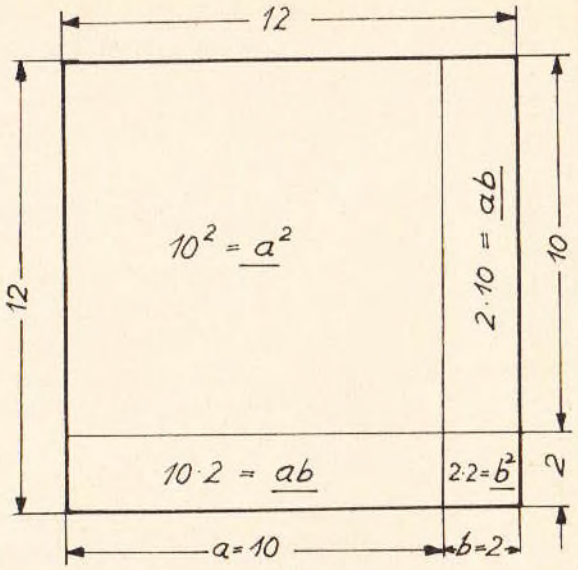


Abb. 35

oder mit Buchstaben:

$10 \cdot 10 = a^2$
$10 \cdot \ 2 = ab$
$2 \cdot 10 = ba$ } $2\ ab$
$2 \cdot \ 2 = b^2$

$a^2 + 2\ ab + b^2$

dafür kann man schreiben:

$(a + b)^2 = a^2 + 2\ ab + b^2$

Das Quadrat von 12 oder $12^2 = 144$ besteht demnach aus vier Rechenoperationen.

(1) $a^2 = 10 \cdot 10$ (Quadrat der Zehner)
(2) $ab = 10 \cdot 2$ (Produkt aus Einer und Zehner)
(3) $ba = 2 \cdot 10$ (Produkt aus Einer und Zehner)
(4) $b^2 = 2 \cdot 2$ (Quadrat der Einer)

$a^2 + 2ab + b^2 = 144$

Diese Überlegung ist außerordentlich **wichtig.** Jedes Quadrat einer zweistelligen Zahl besteht aus dem Quadrat der Zehner (a^2), dem Quadrat der Einer (b^2) und zweimal aus dem Produkt der Zehner und Einer ($2\ ab$). Beim Radizieren kommen wir hierauf zurück.

I. Addition und Subtraktion von Potenzen

Potenzen können **nur** addiert oder subtrahiert werden, wenn sie **dieselben Basen und dieselben Exponenten haben.**

Beispiel: $4a^3 + 6a^3 + 9a^3 - 5a^3 - 14a^3 + 7a^3 = 7a^3$

Hier sind alle Basen und alle Exponenten gleich, nämlich alle a^3.

Um die Addition auszuführen, brauchen wir nur die Faktoren 4, 6, 9 usw. zu addieren beziehungsweise zu subtrahieren.

Ebenso: $3b^2 + 2b^2 - b^2 + 4b^2 - 6b^2 = 2b^2$

Wie steht es nun aber mit der Aufgabe:

$4a^3 + 6a^2 + 9a^4 - 5a^5 = \ ?$

In der vorstehenden Aufgabe sind die **Basen gleich** (a), die **Exponenten** sind aber **verschieden** (a^3, a^2 usw.).

Diese Rechnung ist **nicht weiter ausführbar.**

Wir merken uns:

Potenzen werden addiert beziehungsweise subtrahiert, indem die **Faktoren addiert** oder **subtrahiert** werden. Die **Basen** und **Exponenten** müssen jedoch **gleich** sein und bleiben im Ergebnis unverändert.

II. Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit **gleicher Basis** werden **multipliziert,** indem man ihre **Exponenten addiert** und die Grundzahl beibehält. Der Exponent muß nicht gleich sein.

Beispiel: $a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{4+3+2} = a^9$

Um diese Rechenoperation deutlich zu machen, setze man in der vorstehenden Aufgabe für a den Wert 10 ein.

$a^4 = 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$
$a^3 = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \ \ = \ 1000$
$a^2 = 10^2 = 10 \cdot 10 \ \ = \ 100$

Wir erhalten 10000, 1000 und 100. Diese Zahlen müssen nun **multipliziert** werden, also

$10\,000 \cdot 1000 \cdot 100 = 1\,000\,000\,000$

Wir kommen aber auch zum gleichen Ergebnis, wenn wir die Basis (10) beibehalten und die einzelnen Exponenten addieren.

fernmeldelehrling.de

$$10^4 + 10^3 + 10^2 = 10^{4+3+2} = 10^9$$

$$10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000\,000$$

Ebenso: $4a^2 \cdot 6a^3 \cdot 9a^4 \cdot 5a^3 = ?$

$$4a^2 = 4 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$$
$$6a^3 = 6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6000$$
$$9a^4 = 9 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$$
$$5a^3 = 5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5000$$

Die Einzelergebnisse müssen multipliziert werden:

$$400 \cdot 6000 \cdot 90000 \cdot 5000 = 1080000000000000$$

Wir kommen auch hier zum gleichen Ergebnis, wenn wir die Aufgabe wie folgt anfassen:

$$4a^2 \cdot 6a^3 \cdot 9a^4 \cdot 5a^3 = 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5\ a^{2+3+4+3} = 1080\ a^{12}$$
$$1080\ a^{12} = 1080000000000000$$

Beispiele:

a) $3a^2\ b^7 \cdot 5a^3\ b^2 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^7 \cdot b^2$
$= 15a^{2+3}\ b^{7+2}$
$= 15a^5\ b^9$

b) $(2ab)^3 = 2^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2\ a^3 \cdot b^3$
$= 8a^3\ b^3$

III. Division von Potenzen

Das Dividieren ist, wie wir wissen, eine **Umkehrung** des Multiplizierens.

Wie wir beim Multiplizieren der Potenzen ihre Exponenten **addiert** haben, so müssen wir beim **Dividieren** von Potenzen deren **Exponenten subtrahieren.**

Beispiel: $\dfrac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$

Wir machen auch jetzt wieder die Probe, indem wir für $a = 10$ einsetzen.

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{1\,000\,000}{100} = 10\,000$$

oder einfacher: $\dfrac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4 = 10^4 = 10\,000$

a) Stehen in der Aufgabe noch **Faktoren** dabei, so werden die Faktoren **vorher dividiert.**

$$\frac{10x^4}{5x^3} = 2x^{4-3} = 2x$$

$$\frac{15y^5}{5y^2} = 3y^{5-2} = 3y^3$$

b) Ein **Bruch** wird **potenziert,** indem man **Zähler** und **Nenner potenziert.**

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

c) Wenn bei einem Bruch der **Exponent** des **Nenners größer** als der des Zählers ist, so kann die Lösung auf 2 Arten gefunden werden:

$$\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$$

Andererseits ist $\dfrac{a^2}{a^4} = \dfrac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a^2}$

Demnach ist $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung:

Wird eine Potenz vom **Zähler** in den **Nenner** oder vom Nenner in den Zähler gebracht, so muß man das **Vorzeichen** des **Exponenten umkehren.**

Beispiel: $\dfrac{a^{-2} \cdot b^3}{a^{-3} \cdot b^2} = a^{-2} \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^{-2} = a^{-2+3} \cdot b^{3-2} = ab$

fernmeldelehrling.de

d) Allgemein ist nach den gelernten Potenzregeln:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Andererseits ist $\frac{a^m}{a^m} = 1$

Demnach ist $a^0 = 1$

Hieraus ergibt sich:

- **Jede Potenz mit dem Exponenten-Null hat den Wert 1.**

$$a^0 = 1$$
$$b^0 = 1$$
$$x^0 = 1$$

usw.

IV. Potenzen von Summen und Differenzen

Eine **Summe** oder **Differenz** wird potenziert, indem man die Potenz in ein **Produkt** verwandelt und die entstehenden Klammern ausrechnet.

$$(2 + 4)^2 = 6^2 = 36$$

oder $(2 + 4)^2 = (2 + 4) \cdot (2 + 4) = 4 + 8 + 8 + 16 = 36$

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Ein Zahlenausdruck mit zwei Gliedern in einer Klammer nennt man ein **Binom.**

V. Potenzen von Produkten

Ein **Produkt** wird **potenziert,** indem man **jeden Faktor** potenziert.

$$(2 \cdot 4)^2 = 8^2 = 64$$

oder $(2 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 64$

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

VI. Potenzen von Potenzen

Eine **Potenz** wird **potenziert,** indem man die **Exponenten multipliziert** und die Basis beibehält.

$$(2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$
$$(a^2)^2 = a^{2 \cdot 2} = a^4$$
$$(a^2 \cdot b^3)^3 = a^{2 \cdot 3} b^{3 \cdot 3} = a^6 b^9$$

VII. Das Rechnen mit Zehnerpotenzen

Bei **unübersichtlichen großen oder kleinen** Zahlen ist es häufig zweckmäßig, die Zahl als **Produkt** einer **übersichtlichen** Zahl mit einer **Zehnerpotenz** darzustellen.

Beispiel:

a) $5255500 = 5{,}2555 \cdot 10^6$
$= 52{,}555 \cdot 10^5$
$= 525{,}55 \cdot 10^4$
$= 5255{,}5 \cdot 10^3$
$= 52555 \cdot 10^2$

b) $0{,}000550 = 550 \cdot 10^{-6}$
$= 55{,}0 \cdot 10^{-5}$
$= 5{,}5 \cdot 10^{-4}$

Bei einer Multiplikation mit einer **Zehnerpotenz** wird das Komma um **so viel Stellen** nach **rechts** (bei positivem Exponent) beziehungsweise nach **links** (bei negativem Exponenten) **verschoben,** wie der **Exponent angibt.**

Die folgende Aufstellung gibt eine Übersicht über die gebräuchlichsten Zehnerpotenzen:

Zehnerpotenz	Zahl	Zahlwort	Bezeichnung der Maßeinheit	
10^{12}	1000000000000	Billion	Tera	T
10^9	1000000000	Milliarde	Giga	G
10^6	1000000	Million	Mega	M
10^3	1000	Tausend	Kilo	K
10^2	100	Hundert	Hekto	h
10^1	10	Zehn	Deka	D
10^0	1	Eins		
10^{-1}	0,1	ein Zehntel	Dezi	d
10^{-2}	0,01	ein Hundertstel	Zenti	c
10^{-3}	0,001	ein Tausendstel	Milli	m
10^{-6}	0,000001	ein Millionstel	Mikro	μ
10^{-9}	0,000000001	ein Milliardstel	Nano	n
10^{-12}	0,000000000001	ein Billionstel	Pico	p

fernmeldelehrling.de

Beispiele aus der Elektrotechnik:

1. Verwandle $130\ V$ in mV

$$1\ V = 10^3\ mV$$
$$130\ V = 130 \cdot 10^3\ mV$$
$$130\ V = 130000\ mV$$

2. Verwandle $0{,}5\ \mu F$ in F

$$1\ \mu F = 10^{-6}\ F$$
$$0{,}5\ \mu F = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ F$$
$$0{,}5\ \mu F = 0{,}000\,000\,5\ F$$

3. Berechne U, wenn

$$J = 6mA = 6 \cdot 10^{-3}\ A$$
$$R = 12\ \text{k}\Omega = 12 \cdot 10^3\ \Omega$$
$$U = I \cdot R$$
$$U = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^3$$
$$U = 6 \cdot 12 \cdot 10^{3-3}$$
$$U = 72\ V$$

4. Berechne I, wenn

$$U = 0{,}6\ KV = 6 \cdot 10^2\ V$$
$$R = 1{,}5\ M\Omega = 1{,}5 \cdot 10^6\ \Omega$$
$$I = \frac{U}{R}$$
$$I = \frac{6 \cdot 10^2}{1{,}5\ \ 10^6}$$
$$I = 4 \cdot 10^{2-6}$$
$$I = 4 \cdot 10^{-4}$$
$$I = 0{,}0004\ A$$
$$I = 0{,}4\ mA$$

5. Berechne R, wenn

$$U = 60\ V$$
$$I = 50\ mA = 50 \cdot 10^{-3}\ A$$
$$R = \frac{U}{I}$$
$$R = \frac{60}{50 \cdot 10^{-3}}$$
$$R = 1{,}2 \cdot 10^3$$
$$R = 1200\ \Omega$$

Aufgabe 20: Verwandle a) $20\ K\Omega$ in Ω
b) $6\ M\Omega$ in $K\Omega$
c) $10\ \mu F$ in nF
d) $2\ nF$ in pF
e) $0{,}06\ m$ in cm
f) $3600\ mm$ in m

VIII. Wiederholungsfragen zum Abschnitt C

1. Was versteht man unter einer Potenz?
2. Wie heißen die einzelnen Glieder einer Potenz?
3. Wann und wie können Potenzen addiert, beziehungsweise subtrahiert werden?
4. Wie werden Potenzen mit gleicher Grundzahl multipliziert?
5. Wie werden Potenzen dividiert?
6. Wie wird eine Potenz vom Zähler in den Nenner gebracht?
7. Wie wird eine Summe oder Differenz potenziert?
8. Wie werden Potenzen potenziert?
9. Wie potenziert man einen Bruch?
10. Weshalb verwendet man Zehnerpotenzen?

D. Das Radizieren (Wurzelrechnung)

I. Allgemeines

Haben wir die Potenz 4^2, so läßt sich aus der Basis 4 und dem Exponenten ^{2} der Potenzwert $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ berechnen.

Welche Zahl muß aber ins **Quadrat** erhoben werden, um die Zahl **16** zu erhalten?

Die Basis (4) ist **unbekannt.** Bekannt ist dafür der Potenzwert 16 und der Exponent ^{2}. Diese Aufgabe führt uns zur **Wurzelberechnung.**

Das **Wurzelziehen** oder **Radizieren** ist nichts anderes als das Bestimmen der **Basis,** wenn der Potenzwert und der Potenzexponent bekannt sind.

Wir unterscheiden das Ausziehen der Quadratwurzel, der Kubikwurzel usw. Wie es eine 2., 3., 4., usw. Potenz gibt, so gibt es auch das Ausziehen der 2., 3., 4. usw. Wurzel. Praktisch kommt jedoch nur die 2. und 3. Wurzel, also die Quadrat- und Kubikwurzel in Betracht.

fernmeldelehrling.de

$\sqrt[2]{25} = 5$ Probe: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$\sqrt[3]{125} = 5$ $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Das Zeichen für das Ausziehen der Wurzel ist ein etwas verzerrtes lateinisches r, von Radix = Wurzel. Zum Wurzelziehen wird in die obere Öffnung eine kleine ^{2,3} usw. gesetzt, um anzugeben, ob die 2. oder 3. Wurzel gemeint ist.

Wurzelexponent

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

Radikand — Wurzelwert

Bei der Quadratwurzel kann man den Wurzelexponenten^2 weglassen.

$\sqrt{64}$ heißt also Quadratwurzel aus $64 = 8$ Probe: $8 \cdot 8 = 64 = 8^2$

$\sqrt[3]{64}$ heißt Kubikwurzel aus $64 = 4$ $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = 4^3$

Wir sehen also, daß das **Ausziehen** der **Wurzel** die **Umkehrung** des **Potenzierens** ist. Wie Dividieren die Umkehrung des Multiplizierens, wie Subtrahieren die Umkehrung des Addierens ist, so ist das Radizieren die Umkehrung des Potenzierens.

Wir haben in dem letzten Kapitel bei der Potenzrechnung das Quadrieren einer zweistelligen Zahl in einer bildlichen Darstellung veranschaulicht. Es wurde hierbei festgestellt, daß die Aufgabe $12^2 = 144$ aus 4 Rechenoperationen besteht, nämlich aus $10^2 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 2^2$ oder $a^2 + 2ab + b^2$.

Darauf gründet sich nun das Ausziehen der Wurzel $\sqrt{144}$. In der Zahl 144 steckt also eine Summe der Glieder $a^2 + 2ab + b^2$, wobei die Werte für a und b zunächst noch unbekannt sind. Will man die Quadratwurzel aus der Zahl ziehen, so muß man die Größen a und b **suchen** und dann die Glieder a^2, $2ab$ und b^2 wieder von der Zahl **abziehen.** Man geht dabei wie folgt vor:

$$\sqrt{1'44}$$

Man teilt die Zahl von rechts nach links in **Gruppen** von je 2 **Ziffern** ein; bei Dezimalzahlen vom Komma nach links und rechts.
Die Zahl der Gruppen gibt an, wieviel Stellen das Ergebnis hat.

In dem folgenden Beispiel wollen wir zum besseren Verständnis die Potenz- und Wurzelrechnung gegenüberstellen

Potenzieren: Radizieren:

$12 \cdot 12 = 144$ $\sqrt{1'44} = a + b = ab$

$(10 + 2)\ (10 + 2) =$ $= 10 + 2 = 12$

$10 \cdot 10 = 100$ $a \cdot a = a^2 \longrightarrow$ **100**

$2a$

$10 \cdot 2 = 20$ $44 : 20 = 2$

$2 \cdot 10 = 20$ $2ab \longrightarrow$ **40**

$2 \cdot 2 = 4$ $b \cdot b = b^2 \longrightarrow$ **4**

Die Quadratwurzel aus 144 wird also wie folgt errechnet:

a) Die Zahl 144 wird mit einem Wurzelzeichen versehen und von rechts nach links in zwei Gruppen eingeteilt.

b) Da wir bei der Wurzel aus 144 zunächst nur die Zehner bestimmen wollen, so kommen wir auf 10, denn 20·20 wäre bereits 400.

c) Die 10 setzen wir als a in das Ergebnis ein und ziehen $a^2 = 100$ von 144 ab.

d) Den Rest von 44 teilen wir durch $2a$ ($a = 10$, $2a = 20$), somit erhalten wir die nächste Stelle des Ergebnisses $b = 2$.

e) Nun ziehen wir $2ab = 40$ von 44 ab; es bleibt ein Rest von 4.

f) Von diesem Rest 4 ziehen wir $b^2 = 4$ ab und es bleibt 0 übrig. Die Quadratwurzel aus 144 ist also 12.

Diese Erklärung ist viel umständlicher als die Rechnung selbst, wenn man sich die folgende vereinfachte Methode einprägt:

Vereinfachte Methode:

$\sqrt{11|28|96} = 336$

$3^2 \rightarrow 9$

$2\,2'8 : 6_3$

$3 \cdot 63 \longrightarrow 189$

$3\,9\,9'6 : 66_6$

$6 \cdot 666 \longrightarrow 3996$

0

Erläuterung:

Man zieht aus der ersten Gruppe (11) die Wurzel =3, zieht dann das Quadrat ($3^2 = 9$) ab, holt die nächsten beiden Ziffern herunter, streicht eine Stelle ab und teilt durch das Doppelte von 3 ($3 + 3 = 6$). Das Ergebnis $22 : 6 = 3$ tritt beim Wurzelwert an die zweite Stelle. Außerdem wird 3·63 von 228 abgezogen. Nun holt man die nächsten beiden Ziffern herunter und verfährt genauso. Also wieder eine Stelle abstreichen und durch das Doppelte von 33 teilen usw.

fernmeldelehrling.de

Überschreitet man beim Rechnen das Komma des Radikanden, so muß man auch beim Wurzelwert ein Komma setzen.

$\sqrt{1|39{,}65|20} = 11{,}81$

$1^2 \rightarrow$ **1**
0 3'9 : 2_1
$1 \cdot 21 \rightarrow$ 2 1
1 8 6'5 : 22_8
$8 \cdot 228 \rightarrow$ 1 8 2 4
4 1 2'0 : 236_1
$1 \cdot 236_1 \rightarrow$ 2 3 6 1
Rest 1 7 5 9

Wurzellösungen, bei denen ein Rest bleibt, besagen. daß die Wurzel nur angenähert bestimmt worden ist, man nennt solche Wurzeln **irrationale** Wurzeln.

Beispiele:

$\sqrt{27|35|29} = 523$

$5^2 \rightarrow$ 25
2 3'5 : 10_2
$2 \cdot 102 \rightarrow$ 2 0 4
3 1 2'9 : 104_3
$3 \cdot 1043 \rightarrow$ 3 1 2 9

$\sqrt{12|96} = 36$

$3^2 \rightarrow$ 9
3 9'6 : 6_6
$6 \cdot 66 \rightarrow$ 3 9 6

$\sqrt{95|25|76} = 976$

$9^2 \rightarrow$ 81
14 2'5 : 18_7
$7 \cdot 187 \rightarrow$ 13 0 9
1 1 6 7'6 : 194_6
$6 \cdot 1946 \rightarrow$ 1 1 6 7 6

$\sqrt{3|06{,}25} = 17{,}5$

$1^2 \rightarrow$ 1
20'6 : 2_7
$7 \cdot 27 \rightarrow$ 18 9
1 7 2'5 : 34_5
$5 \cdot 345 \rightarrow$ 1 7 2 5

$\sqrt{0{,}42|64|09} = 0{,}653$

0
42
$6^2 \rightarrow$ 36
6 6'4 : 12_5
$5 \cdot 125 \rightarrow$ 6 2 5
3 9 0'9 : 130_3
$3 \cdot 1303 \rightarrow$ 3 9 0 9

$\sqrt{2} =$

$\sqrt{2{,}00|00|00|00} = 1{,}4142\ldots$

$1^2 \rightarrow$ 1
1 0'0 : 2_4
$4 \cdot 24 \rightarrow$ 96
4 0'0 : 28_1
$1 \cdot 281 \rightarrow$ 2 8 1
1 1 9 0'0 : 282_4
$4 \cdot 2824 \rightarrow$ 1 1 2 9 6
6 0 4 0'0 : 2828_2
$2 \cdot 28282 \rightarrow$ 5 6 5 6 4
3 8 3 6 usw.

Aufgabe 21: a) $\sqrt{3249}$ $\sqrt{9801}$ $\sqrt{1936}$ $\sqrt{4264}$

$\sqrt{9980}$ $\sqrt{193{,}21}$ $\sqrt{3956{,}41}$ $\sqrt{0{,}0025}$

b) Es sollen 180 Steinplatten (je 8 cm × 10 cm) ausgelegt werden. Wie groß ist die quadratische Fläche die damit bedeckt werden kann?

II. Wichtige Regeln

Nachstehend sind die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Wurzeln zusammengefaßt:

1. Multiplikation von Wurzeln desselben Grades

Gleichnamige Wurzeln (d. h. Wurzeln mit gleichem Exponenten) werden **multipliziert,** indem man unter dem **Wurzelzeichen multipliziert.**

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{9 \cdot 25}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{8 \cdot 125}$

$3 \cdot 5 = 15$ $\qquad$ $2 \cdot 5 = 10$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{cd}$

fernmeldelehrling.de

2. Radizierung eines Produktes

Ein **Produkt** wird **radiziert,** indem man die **Faktoren einzeln radiziert** und die so erhaltenen **Wurzeln multipliziert.**

$$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}$$

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad 10 = 2 \cdot 5$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt[3]{cd} = \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{d}$$

3. Division von Wurzeln desselben Grades

Gleichnamige Wurzeln werden **dividiert,** indem man **unter dem Wurzelzeichen dividiert.**

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{256}{16}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

4. Radizierung von Brüchen

Ein **Bruch** wird **radiziert,** indem man **Zähler** und **Nenner einzeln radiziert** und die so erhaltenen **Wurzeln dividiert.**

$$\sqrt{\frac{256}{16}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{16}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

5. Radizierung von Potenzen

Wenn **Potenzen radiziert** werden sollen, dann werden die **Exponenten dividiert.**

$$\sqrt[2]{2^4} = 2^{4:2} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[2]{4^2} = 4^{2:2} = 4$$

$$\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2} = a^2$$

$$\sqrt[3]{a^{15}} = a^{15:3} = a^5$$

6. Potenzieren von Wurzeln

Eine **Wurzel** wird **potenziert,** indem man **nur** den **Radikanden potenziert.**

$$\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\left(\sqrt[2]{b}\right)^3 = \sqrt[2]{b^3}$$

7. Radizierung von Wurzeln

Eine **Wurzel** wird **radiziert,** indem der Radikand mit dem **Produkt** der **Wurzelexponenten radiziert** wird.

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Umkehrung:

Ist der Wurzelexponent ein Produkt, dann wird **nacheinander** mit den **einzelnen Wurzelexponenten radiziert.**

$$\sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} \qquad \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

8. Erweitern und Kürzen von Wurzeln

Der **Wert** einer Wurzel ändert sich nicht, wenn man den **Exponenten** der **Wurzel** und den des **Radikanden** mit **derselben** Zahl **multipliziert** (Erweiterung der Wurzel) oder durch **dieselbe** Zahl **dividiert** (Kürzung der Wurzel).

a) Erweiterung:

$$\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2 \cdot 2]{4^{3 \cdot 2}}$$

$$8 = 8$$

$$\sqrt{a^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m \cdot n}}$$

fernmeldelehrling.de

b) **Kürzung:** $\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[\frac{4}{2}]{4^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[2]{4^3}$

oder $\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[\frac{4}{4}]{4^{\frac{6}{4}}} = 4^{\frac{6}{4}}$

Aus dem vorstehenden Beispiel ist zu erkennen, daß **eine Wurzel in eine Potenz umgewandelt** werden kann. **Der Wurzelexponent erscheint dann bei der Potenz im Nenner des Potenzexponenten.**

$$\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}} \qquad \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Umgekehrt kann jede Potenz mit einem Bruch als Exponenten auch als Wurzel geschrieben werden. **Der Nenner des Potenzexponenten erscheint dann als Wurzelexponent.**

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5} \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

III. Wiederholungsfragen zum Abschnitt D

1. Was bedeutet: Eine Wurzel ziehen?
2. Wie heißen die einzelnen Glieder einer Wurzel?
3. Wie werden gleichnamige Wurzeln multipliziert?
4. Wie wird ein Produkt radiziert?
5. Wie werden gleichnamige Wurzeln dividiert?
6. Wie wird ein Bruch radiziert?
7. Wie wird eine Potenz radiziert?
8. Wie wird eine Wurzel radiziert?
9. Wie kann man Wurzeln erweitern beziehungsweise kürzen?
10. In welchen Ausdruck kann man eine Wurzel umwandeln?

E. Lehre von Gleichungen

I. Allgemeines

Eine Gleichung ist die Verbindung zweier **gleicher** Größen durch das Gleichheitszeichen.

$$10 + 10 = 20$$

Die einfachste Vorstellung von der Gleichung gibt uns eine einfache Waage. Bei einer Waage ist man stets bemüht, sie ins **Gleichgewicht** zu bringen.

Die Waage befindet sich im **Gleichgewicht,** wenn das Gewicht auf der **linken** Seite mit dem Gewicht auf der **rechten** Seite gleich ist.
10 + 10 = 20

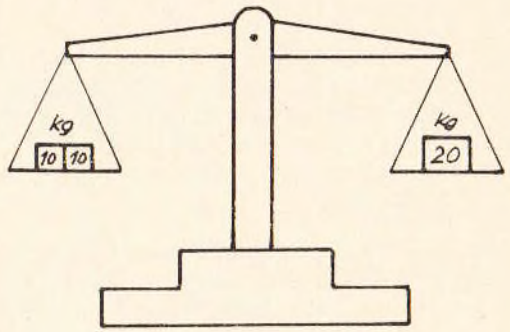


Abb. 36

Wenn das Gewicht auf der einen Seite der Waage **verändert** wird, so wird das Gleichgewicht **gestört.** Das Gleichgewicht bleibt jedoch **erhalten,** wenn man auf **beiden** Seiten die **gleiche** Veränderung vornimmt.

Beispiel:

Wenn bei der dargestellten Waage auf beiden Seiten 5 kg zugesetzt werden, dann bleibt das **Gleichgewicht** erhalten, weil auf **beiden** Seiten 25 kg vorhanden sind.

Beachte:

Eine Gleichung bleibt bestehen, wenn man auf **beiden** Seiten der Gleichung wie folgt vorgeht:

	2 · 10 = 20
1. die **gleiche** Zahl **addiert**	2 · 10 + **5** = 20 + **5**
2. die **gleiche** Zahl **subtrahiert**	2 · 10 − **5** = 20 − **5**
3. mit der **gleichen** Zahl **multipliziert**	2 · 10 · **5** = 20 · **5**
4. durch die **gleiche** Zahl **dividiert**	2 · 10 : **5** = 20 : **5**

In den Gleichungen werden nicht nur **bestimmte** Zahlen 2 · 10 = 20, sondern mehr noch die **allgemeinen** Zahlen verwendet.

$$a + b = c + d$$

Wenn wir in der vorstehenden Gleichung die Werte für die **linke** und **rechte** Seite der Gleichung kennen und einsetzen, so wird sich herausstellen, daß beide Seiten gleich sind.

fernmeldelehrling.de

Beispiel:

$$a + b = c + d$$
$$5 + 3 = 2 + 6$$
$$8 = 8$$

Es sind einzusetzen:

$a = 5, \quad b = 3$

$c = 2, \quad d = 6$

In diesem Beispiel waren alle Werte der Gleichung bekannt oder vorher bestimmt. Uns interessieren aber mehr Gleichungen mit unbekannten Werten. Wir sprechen dann **von Gleichungen mit einer oder zwei Unbekannten.** Die Unbekannten werden meistens mit dem letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z bezeichnet.

Mit einer Gleichung kann man nur eine Unbekannte (x) finden. Soll man zwei Unbekannte (x und y) finden, so braucht man zwei **verschiedene** Gleichungen. Wir wollen uns aber zunächst mit einfachen Gleichungen mit **einer Unbekannten** befassen.

$$12 = 3x$$

Man trachtet danach, die Unbekannte x allein auf die **linke** Seite zu bekommen. Man kann auch die rechte Seite nehmen, aber es hat sich eingebürgert, die linke zu nehmen, weil wir ja von links nach rechts schreiben; so erhalten wir auf die Frage $x = ?$ die Antwort rechts daneben. $x = \ldots$

Es ist besonders für den Anfänger ratsam, nur Schritt für Schritt den Wert von x zu ermitteln, die Unbekannte x wird also nur allmählich **allein** auf die linke Seite zu stehen kommen. Sobald das erreicht ist, ist die Gleichung gelöst.

Betrachten wir nun das Beispiel $12 = 3x$ oder $3x = 12$, so sehen wir, daß x noch den Faktor 3 hat; um nun x allein zu bekommen, müssen wir diesen Faktor beseitigen. In einem anderen Beispiel $3x + 5 = 17$ müssen wir außerdem noch die Größe 5 auf die rechte Seite bringen. Noch andere Veränderungen der Gleichung können nötig sein, aber in jedem Falle geht die Veränderung einer Gleichung auf die Hauptregel zurück:

Eine Gleichung bleibt gleich, wenn man sie auf jeder Seite in gleicher Weise behandelt.

Läßt man also **links** eine Größe weg, so muß die gleiche Größe auch **rechts** weggenommen werden. Fügt man links etwas hinzu, so muß das gleiche rechts hinzugefügt werden. Multipliziere ich links, so muß ich rechts ebenfalls multiplizieren, ebenso dividieren, potenzieren und radizieren.

An den folgenden Beispielen wollen wir das Vorstehende erproben:

$$x + 9 = 11$$

Die Unbekannte x soll **allein** stehen; ich muß also 9 entfernen. Um die 9 wegzuschaffen **subtrahiere** ich sie, so daß die linke Seite nun heißt $x + 9 - 9$.

Wir haben aber gehört, daß man rechts die gleiche Größe subtrahieren muß, also $11 - 9$. Die Gleichung heißt also:

$$x + 9 - 9 = 11 - 9$$

Die Größen $+ 9$ und $- 9$ heben sich auf der linken Seite auf, also

$$x = 11 - 9$$
$$x = 2$$

Wir können die Subtraktion auch im Kopfe ausführen, d. h. wir **denken** uns links die $+ 9$ weg, rechts aber schreiben wir $- 9$ hinzu. Es sieht dann so aus, als sei die 9 von **links** nach **rechts** gekommen, jedoch mit **umgekehrtem** Vorzeichen. Diese Überlegung führt schließlich zu der Regel:

Eine Größe mit + kommt auf die andere Seite der Gleichung mit —; ebenso kommt natürlich eine Größe mit — auf die andere Seite mit +.

$$5x - 7 = 18$$
$$5x = 18 + 7$$
$$5x = 25$$

Die Unbekannte „x" steht aber noch nicht alleine auf der linken Seite. Deshalb müssen jetzt **beide** Seiten durch die **gleiche** Zahl 5 geteilt werden, dann erhalten wir:

$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$$
$$x = 5$$

- Wichtig ist, daß die **Gleichheitszeichen** immer **genau untereinander** geschrieben werden.

$$\frac{x}{4} = 3$$

- Wenn die Unbekannte x in der Gleichung als **Bruch** enthalten ist, dann beseitigen wir den Bruch, indem wir **beide** Seiten mit der **gleichen** Zahl multiplizieren.

In diesem Beispiel multiplizieren wir beide Seiten mit 4

$$\frac{x}{4} \cdot 4 = 3 \cdot 4$$
$$x = 12$$

fernmeldelehrling.de

Auch beim Multiplizieren und Dividieren können wir uns folgendes vorstellen:

a) Steht **links** ein Faktor bei der Unbekannten, so teilen wir **rechts**

$$5x = 25$$
$$x = \frac{25}{5}$$

b) Steht **links** ein Divisor, so **multiplizieren** wir **rechts**

$$\frac{x}{4} = 3$$
$$x = 3 \cdot 4$$

Es kommen also gewissermaßen

- **das Zeichen · als : und das Zeichen : als ·**
  auf die andere Seite der Gleichung

Haben wir nun bei der Unbekannten eine **Potenz** (x^2), so schaffen wir sie weg, indem wir auf **beiden** Seiten die **Wurzel** ziehen:

$$x^2 = 36$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$$
$$x = \sqrt{36}$$
$$x = 6$$

- oder einfacher: **Die Potenz kommt als Wurzel nach rechts**

Haben wir bei der Unbekannten eine **Wurzel** ($\sqrt{x}$), so potenzieren wir beide Seiten.

$$\sqrt{x} = 7$$
$$(\sqrt{x})^2 = 7^2$$
$$x = 7^2$$
$$x = 49$$

- Einfacher: **Die Wurzel kommt als Potenz nach der rechten Seite.**

Aus dem Bisherigen erkennen wir, daß **beide** Seiten der Gleichung in gleicher Weise verändert werden, wenn auf der anderen Seite die **entgegengesetzte** Operation durchgeführt wird.

Merke:

aus	+	wird	−	auf der anderen Seite
„	−	wird	+	„ „ „ „
„	·	wird	:	„ „ „ „
„	:	wird	·	„ „ „ „
„	$\sqrt{\ }$	wird	^{2}	„ „ „ „
„	^{2}	wird	$\sqrt{\ }$	„ „ „ „

- Gleichungen bleiben auch bestehen, wenn man **beide** Seiten der Gleichung **umkehrt,**

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$
Umkehrung: $$\frac{x}{1} = \frac{2}{1}$$
$$x = 2$$

Die Richtigkeit dieser Rechnung ist wie folgt zu beweisen:

Um den Bruch $\frac{1}{x}$ zu beseitigen, multipliziere ich **beide** Seiten mit x, also

$$\frac{1}{x}x = \frac{1}{2}x$$
$$1 = \frac{1}{2}x$$

Um jetzt den Bruch $\frac{1}{2}$ zu beseitigen, multipliziere ich **beide** Seiten mit **2,** also

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x$$
$$2 = x$$
$$\text{oder } x = 2$$

Damit ist die Richtigkeit der Rechnung bei der Umkehrung von Gleichungen bewiesen, weil x in beiden Fällen 2 ergibt.

Nach dieser kurzen Einleitung noch einen kleinen Überblick: Es gibt Gleichungen **ersten** Grades, **zweiten** Grades, **dritten** Grades usw. Bei den Gleichungen ersten Grades kommen nur Größen vor, die in der **ersten** Potenz stehen (x, y, a, b stehen in der ersten Potenz); diese Gleichungen sind für uns die weitaus wichtigsten. Bei den Gleichungen **zweiten** Grades kommen die Unbekannten in der **zweiten** Potenz, also im Quadrat vor (x^2, y^2, a^2 usw.). Bei den Gleichungen dritten Grades kommen die Unbekannten in der **dritten** Potenz, also im Kubus vor (x^3, y^3, a^3 usw.) Die Gleichungen zweiten Grades kommen für uns weniger die dritten Grades überhaupt nicht in Betracht. Wir wollen uns deshalb auf die Gleichungen ersten Grades mit **einer** und mit **zwei** Unbekannten beschränken.

fernmeldelehrling.de

II. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

Die **Unbekannte** wird in der Regel kurz mit dem kleinen lateinischen Buchstaben x bezeichnet. Die zur Lösung bekannten Größen können entweder bestimmte Zahlen oder Buchstaben (allgemeine Zahlen) sein. Als Buchstaben nimmt man die des kleinen lateinischen Alphabets, und zwar beginnt man mit a, b, c usw.

	Bestimmte Zahlen:	Allgemeine Zahlen:
1.	$x + 9 = 11$ $x = 11 - 9$ $x = 2$	$x + a = b$ $x = b - a$
2.	$x - 9 = 11$ $x = 11 + 9$ $x = 20$	$x - a = b$ $x = b + a$
3.	$x \cdot 9 = 11$ $x = \frac{11}{9}$ $x = 1\frac{2}{9}$	$x \cdot a = b$ $x = \frac{b}{a}$
4.	$\frac{x}{9} = 11$ $x = 11 \cdot 9$ $x = 99$	$\frac{x}{a} = b$ $x = b \cdot a$ $x = a\,b$
5.	$x^2 = 11$ $x = \sqrt{11}$ $x = 3, \ldots$	$x^2 = b$ $x = \sqrt{b}$
6.	$\sqrt{x} = 11$ $x = 11^2$ $x = 121$	$\sqrt{x} = b$ $x = b^2$
7.	$5x + 11x = 48$ $16x = 48$ $x = \frac{48}{16}$ $x = 3$	$ax + bx = c$ $x\,(a + b) = c$ $x = \frac{c}{a + b}$
8.	$12y - 7y = 95$ $5y = 95$ $y = 19$	$ay - by = c$ $y\,(a - b) = c$ $y = \frac{c}{a - b}$

9.
$$\begin{aligned} 5{,}75x - 124 + 2x &= 5{,}125x - 61 \\ 5{,}75x - 5{,}125x + 2x &= -61 + 124 \\ 2{,}625x &= 63 \\ x &= \frac{63}{2{,}625} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Wir sehen an diesem Beispiel, daß man alle Unbekannten auf die linke Seite zieht. Bei Seitenwechsel **Vorzeichen** umkehren!

10.
$$8x + 4 + 3x - 2 = 8x + 8$$

- Stehen auf **beiden** Seiten der Gleichung die **gleichen** Größen mit den gleichen Vorzeichen, so heben sie sich gegenseitig auf.

Man stelle sich vor: Auf einer Waage stehen beiderseits gleichviel Gewichte; die Waage ist im Gleichgewicht. Man kann nun von jeder Waagschale ein gleichgroßes Gewicht wegnehmen, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird.

So eine Waage ist auch obige Gleichung. Lassen wir $8x$ auf **beiden** Seiten weg, so heißt die Gleichung:

$$\begin{aligned} 4 + 3x - 2 &= 8 \\ 3x &= 8 - 4 + 2 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Aufgaben in Klammern:

11.
$$\begin{aligned} 4x - (5 - 2x) &= 5x - 3 \\ 4x - 5 + 2x &= 5x - 3 \\ 4x + 2x - 5x &= 5 - 3 \\ 6x - 5x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Als Anfänger sollte man immer Schritt für Schritt vorgehen. Wichtig ist, daß die Gleichheitszeichen **untereinander** stehen.

12.
$$\begin{aligned} 8x - [5 - 4x + (8 - 2x) + 11 - x] &= 10x + 26 \\ 8x - [5 - 4x + 8 - 2x + 11 - x] &= 10x + 26 \\ 8x - 5 + 4x - 8 + 2x - 11 + x &= 10x + 26 \\ 8x + 4x + 2x + x - 10x &= 26 + 5 + 8 + 11 \\ 15x - 10x &= 26 + 24 \\ 5x &= 50 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

fernmeldelehrling.de

13.
$$\begin{aligned} 20 - (x - 2) &= (2x + 1) \cdot 2 \\ 20 - x + 2 &= 4x + 2 \\ -x - 4x &= 2 - 20 - 2 \\ -5x &= -20 \end{aligned}$$

Beachte:

Im Ergebnis der vorstehenden Gleichung stören die negativen Werte.
Wenn **beide** Seiten der Gleichung mit **—1** multipliziert werden, dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot -5x &= -20 \cdot (-1) \\ 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

14.
$$(11 - 3x)^2 + (15 - 4x)^2 = (20 - 5x)^2 - 12$$
$$(11 - 3x)\,(11 - 3x) + (15 - 4x)\,(15 - 4x) = (20 - 5x)\,(20 - 5x) - 12$$
$$121 - 33x - 33x + 9x^2 + 225 - 60x - 60x + 16x^2 = 400 - 200x + 25x^2 - 12$$

Alle Unbekannten nach links! Die Bekannten nach rechts! Vorzeichen umkehren!

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16x^2 - 25x^2 - 66x - 120x + 200x &= 400 - 12 - 121 - 225 \\ 14x &= 42 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Da sich hier die Größen x^2 **gegenseitig** aufheben, ist dies nur scheinbar eine quadratische Gleichung.

15.
$$\begin{aligned} \frac{x}{9} &= 7 \\ x &= 7 \cdot 9 \\ x &= 63 \end{aligned}$$

Aus der Division auf der linken Seite $\left(\frac{x}{9}\right)$ wird eine Multiplikation auf der rechten Seite $(\cdot\, 9)$.

16.
$$\begin{aligned} \frac{18}{x} &= 3 \\ 18 &= 3x \\ 3x &= 18 \\ x &= \frac{18}{3} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} \frac{72}{x} + 18 &= 48 \\ \frac{72}{x} &= 48 - 18 \\ 72 &= 30 \cdot x \\ 30x &= 72 \\ x &= \frac{72}{30} \\ x &= 2{,}4 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} \frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} &= 95 \\ \frac{10x + 5x + 4x}{20} &= 95 \\ \frac{19x}{20} &= 95 \\ 19x &= 95 \cdot 20 \\ x &= \frac{95 \cdot 20}{19} \\ x &= 100 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + 2 - \frac{6}{x} &= \frac{2}{x} \\ \frac{4}{x} - \frac{6}{x} - \frac{2}{x} &= -2 \\ \frac{-4}{x} &= -2 \\ -4 &= -2 \cdot x \quad \text{(beide Seiten mit — 1 multiplizieren)} \\ 4 &= 2x \\ 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

20.
$$\frac{x - 5}{2x - 9} = \frac{x - 4}{2x - 6}$$

Um den Nenner $2x - 9$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit $2x - 9$ multipliziert:

$$\frac{(2x - 9)\,(x - 5)}{2x - 9} = \frac{(x - 4)\,(2x - 9)}{2x - 6}$$
$$x - 5 = \frac{(x - 4)\,(2x - 9)}{2x - 6}$$

Um nun auch den Nenner $2x - 6$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit $2x - 6$ multipliziert:

$$(x - 5)\,(2x - 6) = \frac{(x - 4)\,(2x - 9)\,(2x - 6)}{2x - 6}$$
$$\begin{aligned} (x - 5)\,(2x - 6) &= (x - 4)\,(2x - 9) \\ 2x^2 - 10x - 6x + 30 &= 2x^2 - 8x - 9x + 36 \\ 2x^2 - 2x^2 - 10x - 6x + 8x + 9x &= 36 - 30 \\ -16x + 17x &= 6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

fernmeldelehrling.de

Wir wollen in dieser Aufgabe zur Probe den Wert $x = 6$ einsetzen. Also:

$$\frac{x - 5}{2x - 9} = \frac{x - 4}{2x - 6}$$

$$\frac{6 - 5}{2 \cdot 6 - 9} = \frac{6 - 4}{2 \cdot 6 - 6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Bevor wir zu den reinen **Buchstabengleichungen** übergehen, wollen wir uns noch die Frage vorlegen: Zu welchem Zweck **verändern** wir die Gleichungen? Warum setzt man nicht gleich die Zahlen ein?

Antwort:

Es gibt Formeln, wo eine **andere** Größe ausgerechnet werden muß, als diejenige, für die eine Formel gerade aufgestellt ist.

Ein Beispiel: $U = d \cdot \pi$

Umfang ist Durchmesser mal 3,14

Angenommen, der Umfang sei bekannt, wir wollen aber den Durchmesser wissen. Es muß deshalb die Unbekannte „d" auf die linke Seite gebracht werden.

$$d \cdot \pi = U$$

$$d = \frac{U}{\pi}$$

Wenn wir jetzt die Zahlen für U und π (3,14) einsetzen, dann können wir den Umfang U des Kreises ausrechnen.

Nun eine Reihe von Aufgaben mit Buchstaben:

$$x + a = b$$
$$x = b - a$$

$$a + x - b = c$$
$$x = c - a + b$$

$$a - x = b$$
$$-x = b - a$$
$$x = a - b$$

$$a - x - b = c$$
$$-x = c - a + b$$
$$x = a - b - c$$

In den vorstehenden Aufgaben sind **beide** Seiten mit **— 1** multipliziert worden, dadurch wird die Unbekannte $x =$ positiv.

$$ax = b$$
$$x = \frac{b}{a}$$

$$ax - b = c$$
$$ax = c + b$$
$$x = \frac{b + c}{a}$$

Beispiele:

$$a - bx = c$$
$$-bx = c - a$$

(beide Seiten $\cdot -1$)

$$bx = a - c$$
$$x = \frac{a - c}{b}$$

$$ax + b = c$$
$$ax = c - b$$
$$x = \frac{c - b}{a}$$

Wir können auch einmal wieder eine Probe machen, indem wir annehmen $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$

Beispiel:

$$x = \frac{c - b}{a}$$

$$x = \frac{7 - 6}{5}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Stellen wir nun obige Gleichung nach a, b, und c um, so müssen sich die gleichen Werte wieder einstellen.

$$a = \frac{c - b}{x}$$

$$a = \frac{7 - 6}{\frac{1}{5}}$$

$$a = \frac{1}{\frac{1}{5}}$$

$$a = \frac{1 \cdot 5}{1}$$

$$a = 5$$

$$ax = c - b$$

$$b = c - ax$$

$$b = 7 - 5 \cdot \frac{1}{5}$$

$$b = 7 - 1$$

$$b = 6$$

$$ax = c - b$$

$$c = ax + b$$

$$c = 5\frac{1}{5} + 6$$

$$c = 1 + 6$$

$$c = 7$$

Beispiele:

$$ax + b = x + d$$
$$ax - x = d - b$$
$$x\,(a - 1) = d - b$$
$$x = \frac{d - b}{a - 1}$$

$$ax - b = a - bx$$
$$ax + bx = a + b$$
$$x\,(a + b) = a + b$$
$$x = \frac{a + b}{a + b}$$
$$x = 1$$

Der Wert x kann in den vorstehenden Beispielen ausgeklammert werden. Würde man x wieder in die Klammer hinein multiplizieren, so ist der alte Zustand wieder hergestellt.

fernmeldelehrling.de

Beispiele:

$$3x - 7a + 8b = 5a - x$$
$$3x + x = 5a + 7a - 8b$$
$$4x = 12a - 8b$$
$$x = \frac{12a - 8b}{4}$$
$$x = \frac{4\ (3a - 2b)}{4}$$
$$x = 3a - 2b$$

$$5ab - 3ax + c = -4ax + 8ab - 2c$$
$$-3ax + 4ax = 8ab - 5ab - 2c - c$$
$$ax = 3ab - 3c$$
$$x = \frac{3ab - 3c}{a}$$
$$x = \frac{3\ (ab - c)}{a}$$

$$-a + bx - (x - c)\ b = c\ (b - x)$$
$$bx - a - bx + bc = bc - cx$$
$$-a = -cx$$
$$cx = a$$
$$x = \frac{a}{c}$$

Probe: Für x setzen wir $\frac{a}{c}$ ein.

$$-a + \frac{b \cdot a}{c} - (\frac{a}{c} - c)\ b = c\ (b - \frac{a}{c})$$
$$\frac{ab}{c} - a - \frac{ab}{c} + bc = bc - \frac{ac}{c}$$
$$-a = -a$$
$$0 = 0$$

Auf der linken Seite der Gleichung heben sich $\frac{ab}{c}$ gegen $-\frac{ab}{c}$ auf. Außerdem heben sich auf beiden Seiten der Gleichung **gleiche** Größen mit **gleichen** Vorzeichen (bc) auf; ebenso $-a$ gegen $-a$; es bleibt $0 = 0$.

Beispiele:

$$\frac{x}{a} = b$$
$$x = ab$$

$$\frac{ax}{b} = c$$
$$ax = bc$$
$$x = \frac{bc}{a}$$

$$\frac{ax}{b} + c = d$$
$$\frac{ax}{b} = d - c$$
$$ax = (d - c)\ b$$
$$x = \frac{(d - c)\ b}{a}$$

$$a - \frac{bc}{x} = d$$
$$-\frac{bc}{x} = d - a$$
(beide Seiten $\cdot -1$)
$$\frac{bc}{x} = a - d$$
$$bc = (a - d)\ x$$
$$\frac{bc}{a - d} = x$$
$$x = \frac{bc}{a - d}$$

$$\frac{a}{x} - b = \frac{c}{x} + d$$
$$\frac{a}{x} - \frac{c}{x} = b + d$$
$$\frac{a - c}{x} = b + d$$
$$a - c = (b + d)\ x$$
$$x = \frac{a - c}{b + d}$$

Beispiel: $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Wir müssen in dem vorstehenden Beispiel zunächst die beiden Brüche auf einen **gemeinsamen** Bruchstrich bringen. Der Hauptnenner heißt dann $a\ b\ c$.

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{bc + ac + ab}{abc} \qquad x = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$x = \frac{12 + 8 + 6}{24}$$

fernmeldelehrling.de

An dem Zahlenbeispiel können wir die Rechenoperation besser erkennen. Für die Brüche wird aus dem Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, der Hauptnenner ermittelt. Wir erkennen, daß im Zähler die einzelnen Faktoren des gemeinsamen Nenners mit einer Ausnahme erscheinen (z. B. $3 \cdot 4$). Die Ausnahme ist der Nenner des einzelnen Bruches (z. B. 2).

In dem vorstehenden Beispiel ist:

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ oder } \frac{1}{a} = \frac{b\ c}{a\ b\ c}$$

Ebenso ist $\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ oder $\frac{1}{b} = \frac{a\ c}{a\ b\ c}$

Beispiele:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) x = 1$$

$$\left(\frac{bc + ac + ab}{abc}\right) x = 1$$

$$(bc + ac + ab)\ x = a\ b\ c$$

$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

$$\frac{x}{a + x} = \frac{b}{c}$$

$$x\ c = b\ (a + x)$$

$$x\ c = ba + bx$$

$$xc - bx = ab$$

$$x\ (c - b) = ab$$

$$x = \frac{a\ b}{c - b}$$

$a + x$ rückt von links unten auf die rechte Seite nach oben in den Zähler. Aus der Division wird auf der anderen Seite eine Multiplikation. Es wird sozusagen kreuzweise ($\times$) multipliziert.

Wichtig ist hierbei, daß $a + x$ als ein **gemeinsamer** Ausdruck behandelt wird. $a + x$ muß als Klammerausdruck von unten links nach oben rechts mit b multipliziert werden. Wir dürfen niemals einen Ausdruck unter einem Bruchstrich auftrennen und a oder x einzeln multiplizieren.

$$\frac{x}{a - x} = \frac{b}{c}$$

$$xc = b\ (a - x)$$

$$xc = ab - bx$$

$$bx + xc = ab$$

$$x\ (b + c) = ab$$

$$x = \frac{a\ b}{b + c}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a + x}{b + x}$$

$$(b + x)\ b = (a + x)\ c$$

$$b^2 + bx = ac + cx$$

$$bx - cx = ac - b^2$$

$$x\ (b - c) = ac - b^2$$

$$x = \frac{ac - b^2}{b - c}$$

Beispiel: $\frac{5\ ax}{a - b} - 3a = 10x$

Bei der vorstehenden Aufgabe können wir **nicht** kreuzweise multiplizieren; das geht nur bei zwei Brüchen.

Wir multiplizieren **beide** Seiten der Gleichung mit $a - b$, damit der Ausdruck im Nenner **verschwindet.**

$$\frac{5\ ax\ (a - b)}{a - b} - 3a\ (a - b) = 10x\ (a - b)$$

$$5ax - 3a^2 + 3ab = 10ax - 10bx$$

$$5ax - 10ax + 10bx = 3a^2 - 3ab$$

$$x\ (5a - 10a + 10b) = 3a\ (a - b)$$

$$x = \frac{3a\ (a - b)}{5\ \ (2b - a)}$$

Beispiel: $\frac{4x}{2a + 3b} - 5 = \frac{7b}{5a}$

Wenn wir bei der vorstehenden Aufgabe die linke Seite **gleichnamig** machen, dann haben wir wieder auf beiden Seiten einen Bruch, der kreuzweise multipliziert werden kann.

$$\frac{4x - 5\ (2a + 3b)}{2a + 3b} = \frac{7b}{5a}$$

$$5a\ [4x - 5\ (2a + 3b)] = 7b\ (2a + 3b)$$

$$5a\ [4x - 10a - 15b)] = 14ab + 21b^2$$

$$20ax - 50a^2 - 75ab = 14ab + 21b^2$$

$$20ax = 14ab + 75ab + 21b^2 + 50a^2$$

$$x = \frac{89ab + 21b^2 + 50a^2}{20a}$$

Wir wollen nun dazu übergehen, uns die Gleichungen selbst aufzustellen. In der Praxis sind häufig bestimmte Verhältnisse gegeben, und wir müssen dann den Wert einer fehlenden Größe suchen.

fernmeldelehrling.de

Angewandte oder eingekleidete Aufgaben

1. Einem Wasserbehälter kann durch 3 Röhren Wasser zugeführt werden. Die eine Röhre füllt ihn in 5, die andere in 6 und die dritte Röhre **allein** in $7\frac{1}{2}$ Stunden.

   In welcher Zeit ist der Behälter voll, wenn alle drei Röhren zugleich geöffnet werden?

Lösung:

Man überlegt sich, wonach gefragt ist, hier ist nach der **Zeit** gefragt, wie viele **Stunden** dauert es usw. Wir nehmen daher an, es dauert x **Stunden,** bis der Behälter voll ist. Wenn in x Stunden der Behälter voll ist, dann ist in **einer** Stunde **nur** $\frac{1}{x}$ des Behälters voll.

Wir wissen also jetzt, daß **alle 3** Röhren zusammen in einer Stunde $\frac{1}{x}$ des Behälters füllen.

Da die **erste** Röhre 5 Stunden braucht, füllt sie in einer Stunde $\frac{1}{5}$ die **zweite** $\frac{1}{6}$, die dritte $\frac{1}{7{,}5}$ $\left(\frac{2}{15}\right)$

Alle drei Röhren liefern also in einer Stunde

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$$

Wir haben vorher festgestellt, in einer Stunde ist $\frac{1}{x}$ voll. Beide Werte müssen daher gleich groß sein.

Das ist die Gleichung!

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{6 + 5 + 4}{30}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

Alle drei Röhren brauchen also 2 Stunden bis der Behälter voll ist.

2. Die Abgangsorte zweier einander **entgegenfahrenden** Lokomotiven sind 22,5 km entfernt.

   Die **erste** Lokomotive legt 308 m in der Minute zurück. Die **zweite** legt 288 m in der Minute zurück. Wenn nun die erste Lokomotive 15 Minuten **vor** der zweiten abgefahren ist, wieviel Zeit **nach** Abfahrt der zweiten fahren sie einander vorbei?

Lösung:

Die **erste** Lokomotive fährt 15 Minuten **früher** ab, hat also bis zur Abfahrt der zweiten Lokomotive $15 \cdot 308$ m $= 4620$ m zurückgelegt.

Die ganze Strecke ist 22,500 km, davon ist die erste Lokomotive bereits 4,620 km gefahren. Also sind beide Lokomotiven **bei Abfahrt** der zweiten nur noch $22{,}5 - 4{,}62 = 17{,}88$ km auseinander.

Sie kreuzen sich aber **nicht** in der Mitte; aber die Zeit, die beide bis dahin fahren, ist **gleich** groß.

Diese unbekannte Größe nehmen wir als x an.

Die erste Lokomotive wird dann in x Minuten $x \cdot 308$ m zurücklegen. Die zweite wird in x Minuten $x \cdot 288$ m zurücklegen. Die in dieser Zeit von beiden Lokomotiven zurückgelegten Wege ergeben zusammen die oben genannte Strecke von 17,88 km oder 17 880 m.

Also haben wir die Gleichung gefunden:

$$x \cdot 308 + x \cdot 288 = 17\,880$$

$$596x = 17\,880$$

$$x = \frac{17\,880}{596}$$

$$x = 30$$

Also 30 Minuten nach Abfahrt der zweiten Lokomotive fahren sie aneinander vorbei.

Aufgabe 22:

a) $4x + 9 = 5x + 4$

b) $\frac{3}{4}x - 7 = 11$

c) $\frac{6}{x} + 5 = 41$

d) $3x + 12 - (12x + 18) = -2x + 36$

e) $5\,[7x - (5x - 30)] = 15$

$12 = 4x - 10\,(20 - x)$

f) Eine Zahl ist um 13 größer als eine andere. Die Summe beider ist 27. Wie heißen die beiden Zahlen?

fernmeldelehrling.de

III. Gleichungen mit 2 Unbekannten

1. Allgemeines

Sind in einer Gleichung **2 Unbekannte** vorhanden, so lassen sich diese nicht eindeutig bestimmen.

In der Gleichung $x + y = 100$

sind x und y die Unbekannten. Da beide zusammen die Summe 100 ergeben sollen, lassen sich **zahllose** Wertepaare finden, z. B. $x = 50$ und $y = 50$ oder $x = 95$ und $y = 5$ usw. Hat man jedoch noch eine **zweite** Gleichung mit den Unbekannten x und y zur Verfügung, dann gibt es nur **einen bestimmten** Wert für x und y, der in beiden Gleichungen richtig ist.

$$\text{Gl. I}: \quad 3x + 2y = 42$$
$$\text{Gl. II}: \quad 2x + 3y = 33$$

Folgende Bedingungen sind immer zu beachten:

- Es müssen so viele Gleichungen gegeben sein wie Unbekannte gegeben sind.
- Die Unbekannten müssen natürlich in allen Gleichungen den gleichen Wert haben.

In dem vorstehenden Beispiel haben wir **zwei** Unbekannte (x, y) und somit auch **zwei** Gleichungen, die wir mit den Ziffern I und II bezeichnen.

Es gibt eine Anzahl von Lösungen. Wir wollen nur die wichtigsten davon durcharbeiten. Alle Lösungsarten haben einen Hauptgedanken gemeinsam: Man sucht nach und nach **eine** Unbekannte, um die **andere** wegzuschaffen; das wird solange fortgesetzt, bis nur noch **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten übrig bleibt.

2. Substitutions — oder Einsetzungsmethode

Das Wort kommt von Substitut = Stellvertreter. In unserer Verwendung bedeutet es soviel wie vertreten, ersetzen oder **einsetzen.**
Der Arbeitsvorgang ist folgender:
Man vereinfacht eine Gleichung so lange, bis man **eine** Unbekannte ganz allein auf der **linken** Seite hat. Dann setzt man den für diese Unbekannte erhaltenen Wert in die **andere** Gleichung ein. Aus **zwei** Gleichungen wird somit **eine** Gleichung.
Ausführung:

$$\text{Gl. I}: \quad 3x + 2y = 42$$
$$3x = 42 - 2y$$
$$x = \frac{42 - 2y}{3}$$

Den erhaltenen Wert für x setzen wir nun in die andere Gleichung ein.

$$\text{Gl. II}: \quad 2x + 3y = 33$$
$$2\,\frac{42 - 2y}{3} + 3y = 33$$
$$\frac{84 - 4y}{3} + 3y = 33$$
$$\frac{84 - 4y + 9y}{3} = 33$$
$$84 - 4y + 9y = 33 \cdot 3$$
$$5y = 99 - 84$$
$$y = 3$$

Hat man nun eine Unbekannte (y) in ihrem Wert bestimmt, so ist es leicht, auch die andere Unbekannte (x) zu finden. Man setzt einfach den gefundenen Wert in eine der Gleichungen ein:

Gl. I:	oder Gl. II:
$3x + 2y = 42$	$2x + 3y = 33$
$3x + 2 \cdot 3 = 42$	$2x + 3 \cdot 3 = 33$
$3x = 42 - 6$	$2x = 33 - 9$
$x = \frac{36}{3}$	$x = \frac{24}{2}$
$x = 12$	$x = 12$

Damit haben wir auch schon eine Probe gemacht, denn es kann nicht in beiden Gleichungen dasselbe Resultat sich ergeben, wenn wir irgendwo einen Fehler gemacht hätten.

3. Gleichsetzungsmethode

Man löst beide Gleichungen nach **einer** Unbekannten (x oder y) auf. Da der Wert in **beiden** Gleichungen **gleich** sein muß, so können wir sie durch ein **Gleichheitszeichen** verbinden.

Ausführung:

$$\text{Gl. I}: \quad x + y = 100$$
$$\text{Gl. II}: \quad 2x - y = 20$$

fernmeldelehrling.de

Wir müssen jetzt **beide** Gleichungen nach y auflösen.

$$\begin{aligned} &\text{Gl. Ia:} && y = 100 - x \\ &\text{Gl. IIa:} && y = 2x - 20 \end{aligned}$$

Beide Werte für y nach Gleichung Ia und IIa können durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden.

$$\begin{aligned} \text{(Gl. Ia)} \qquad 100 - x &= 2x - 20 \qquad \text{(Gl. IIa)} \\ 100 + 20 &= 3x \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Aus Gleichung Ia ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= 100 - x \\ y &= 100 - 40 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

4. Additions- und Subtraktionsmethode

Durch Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen muß **eine** Unbekannte (x oder y) zum Verschwinden gebracht werden.

$$\begin{aligned} &\text{Gl. I:} && x + y = 100 \\ &\text{Gl. II:} && 2x - y = 20 \\ \hline &&& 3x = 120 \\ &&& x = 40 \end{aligned}$$

Addition

Summe

Die Unbekannte y kann man jetzt aus der Gleichung I ermitteln.

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ y &= 100 - x \\ y &= 100 - 40 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

Sind aber in den beiden Gleichungen **unterschiedliche** Beizahlen von einer Unbekannten vorhanden, so muß man durch Multiplikation erreichen, daß sie **gleich** werden, damit bei der Addition oder Subtraktion die Unbekannte herausfällt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} &\text{Gl. I:} && 5x + 3y = 21 \\ &\text{Gl. II:} && 7x - 2y = 17 \end{aligned}$$

Multipliziert man die Gleichung I mit „2" und Gleichung II mit „3", so erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{Gl. Ia:} && 10x + 6y = 42 \\ &\text{Gl. IIa:} && 21x - 6y = 51 \\ \hline &&& 31x = 93 \\ &&& x = 3 \end{aligned}$$

Addition

Summe

Durch Einsetzen von x in Gleichung I oder II folgt:

$$\begin{aligned} \text{Gl. I:} \quad 5x + 3y &= 21 \\ 15 + 3y &= 21 \\ 3y &= 21 - 15 \\ y &= \frac{6}{3} \\ y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Gl. II:} \quad 7x - 2y &= 17 \\ 21 - 2y &= 17 \\ -2y &= 17 - 21 \\ -2y &= -4 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 23:

1. $\begin{aligned} 10x + 2y &= 80 \\ 3x + y &= 26 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 6x + 2y &= -10 \\ -x - 2y &= -5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 30x - 28y &= 100 \\ 5x - 2y &= 30 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x &= 3y - 2 \\ x &= 5y - 12 \end{aligned}$

IV. Die Anwendung von Gleichungen in der Elektrotechnik

Für die Berechnung bestimmter Größen gibt es in der Technik Formeln, die als **Unbekannte** nicht mehr den Buchstaben „x" enthalten. Wenn wir aus der gegebenen Formel oder Gleichung eine uns **unbekannte Größe** ermitteln wollen, so müssen wir auch wieder die Formel so lange verändern, bis die Unbekannte allein auf der linken Seite der Gleichung zu stehen kommt.

Beispiele:

a) $U = I \cdot R$

In der vorstehenden Formel sind z. B. U und I bekannt; Gesucht ist der Wert für R?

$$R = \frac{U}{I}$$

fernmeldelehrling.de

b) $$R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

In der vorstehenden Formel soll die Größe l ermittelt werden. Durch Umstellung erhalten wir:

$$A \cdot R = \rho \cdot l$$

$$l = \frac{A \cdot R}{\rho}$$

c) $$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \qquad R_1 \text{ wird gesucht}$$

$$R_1 = R - R_1 - R_2 - R_3 - R_4$$

d) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad R_1 \text{ wird gesucht}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$$

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}}$$

e) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R \text{ wird gesucht}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

$$\frac{R}{1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}$$

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

f) $$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_2 \text{ wird gesucht}$$

$$R\,(R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2$$

$$R \cdot R_1 + R \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2$$

$$R \cdot R_1 = R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_2$$

$$R \cdot R_1 = (R_1 - R)\,R_2$$

$$\frac{R \cdot R_1}{R_1 - R} = R_2$$

g) $$E = I\,(Ri + Ra) \qquad Ra \text{ wird gesucht}$$

$$E = I \cdot Ri + I \cdot Ra$$

$$I \cdot Ra = E - I \cdot Ri$$

$$Ra = \frac{E - I \cdot Ri}{I}$$

$$Ra = \frac{E}{I} - \frac{I \cdot Ri}{I}$$

$$Ra = \frac{E}{I} - Ri$$

h) $$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad i_1 \text{ wird gesucht}$$

$$i_1 \cdot R_1 = i_2 \cdot R_2$$

$$i_1 = \frac{i_2 \cdot R_2}{R_1}$$

i) $$P = U \cdot I \qquad I \text{ wird gesucht}$$

$$I = \frac{P}{U}$$

j) $$P = I^2 \cdot R \qquad I \text{ wird gesucht}$$

$$I^2 = \frac{P}{R}$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

k) $$R = R_{18}\,(1 + \alpha \cdot \Delta t) \qquad R_{18} \text{ wird gesucht}$$

$$R_{18} = \frac{R}{1 + \alpha \cdot \Delta t}$$

$$R = R_{18} + R_{18} \cdot \alpha \cdot \Delta t \qquad \alpha \text{ wird gesucht}$$

$$R_{18} \cdot \alpha \cdot \Delta t = R - R_{18}$$

$$\alpha = \frac{R - R_{18}}{R_{18} \cdot \Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{R - R_{18}}{R_{18} \cdot \alpha} \qquad \Delta t \text{ wird gesucht}$$

fernmeldelehrling.de

1) $\frac{W_1}{W_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ R_2 wird gesucht

$$\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^2 = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{W_1^2}{W_2^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$W_1^2 \cdot R_2 = W_2^2 \cdot R_1$$

$$R_2 = \frac{W_2^2 \cdot R_1}{W_1^2}$$

V. Die graphische Darstellung von Funktionen

Wir haben im Kapitel B gesehen, daß die Veränderung einer Zahl bildlich an der Zahlengeraden gezeigt werden kann. Wenn aber **zwei** voneinander abhängige Größen vorhanden sind, dann kann das nicht mehr an einer Zahlengeraden dargestellt werden.

Eine Größe, die in ihrem Wert von einer anderen abhängt, heißt eine Funktion der anderen Größe.

Hierfür dienen zur besseren Übersicht die **graphischen Darstellungen.**

Wollen wir z. B. einen Überblick über den Verlauf der Temperatur eines bestimmten Zeitabschnittes (z. B. eines Tages) bekommen, so lesen wir von 0 — 24 Uhr alle 2 Stunden (e. F. auch stündlich) am Thermometer die Temperatur ab und tragen sie in eine Tabelle ein.

Uhr	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Cels.	12°	10°	10°	9°	11°	13°	20°	22°	22,5°	21°	20°	18°	15°

Nach der vorstehenden Tabelle kann man sich nur mühsam einen Überblick über die Temperaturverhältnisse während eines Zeitabschnitts verschaffen. Dagegen ist die folgende graphische Darstellung von weit größerer Anschaulichkeit.

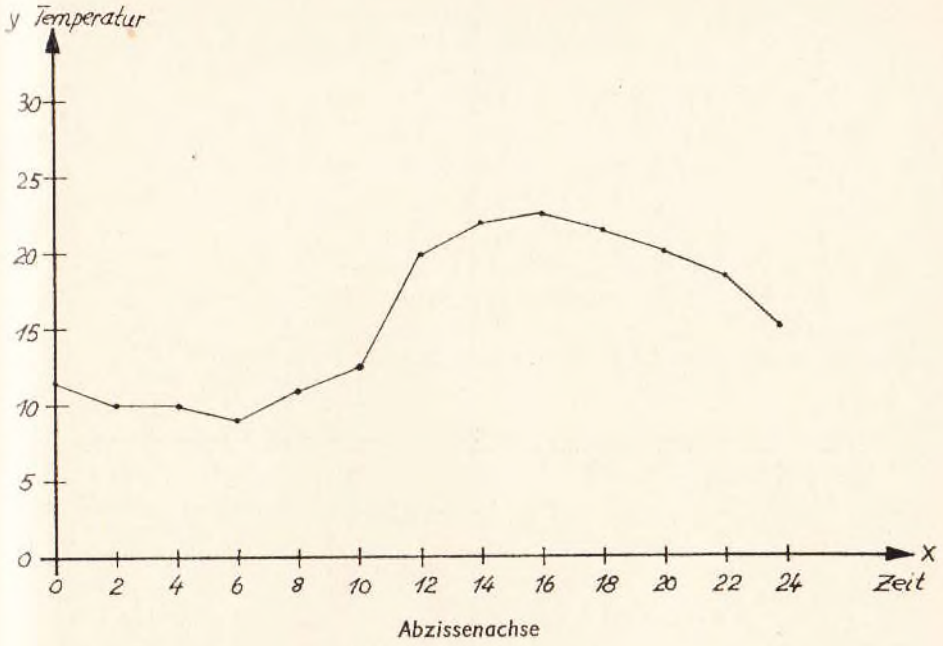


Abb. 37

Auf Millimeterpapier oder anderem Papier tragen wir auf einem waagerechten Strahl, der *Abzissenachse*, gleiche Teilstrecken ab, die dem aufeinanderfolgenden Zeitraum von 2 Stunden entsprechen. Beim Nullpunkt errichten wir die Senkrechte (*Ordinate*), die für die Temperatur gleichmäßig unterteilt ist. Die gemessenen Temperaturwerte werden als Punkte bei der dazugehörigen Uhrzeit eingetragen. Verbinden wir jetzt die einzelnen Meßpunkte durch gerade Verbindungsstrecken, so erhalten wir den Temperaturverlauf **graphisch** dargestellt. Man spricht von der **Temperaturkurve.**

Das Bild zeigt deutlich die Vorteile der graphischen Darstellung. Man erkennt sofort, wann die höchste und tiefste Temperatur herrschte, in welchem Zeitraum die Temperatur am stärksten stieg, in welchem Zeitraum sie gleich blieb usw. Auch ist es möglich, Zwischenwerte abzulesen (zu interpolieren). Welche Temperatur herrschte um 11.00 Uhr oder um 19.30 Uhr? Doch ist hierbei Vorsicht geboten. Wollen wir die Änderung der Temperatur genauer wissen, so müssen mehr Temperaturmessungen durchgeführt werden (etwa alle 30 Minuten).

In der Mathematik und in der Technik handelt es sich nicht mehr um solche Beobachtungen, sondern um Gleichungen, die man auch **Funktionsgleichungen** nennt. Zu diesem Zweck zeichnet man ein **Koordinatenkreuz.**

fernmeldelehrling.de

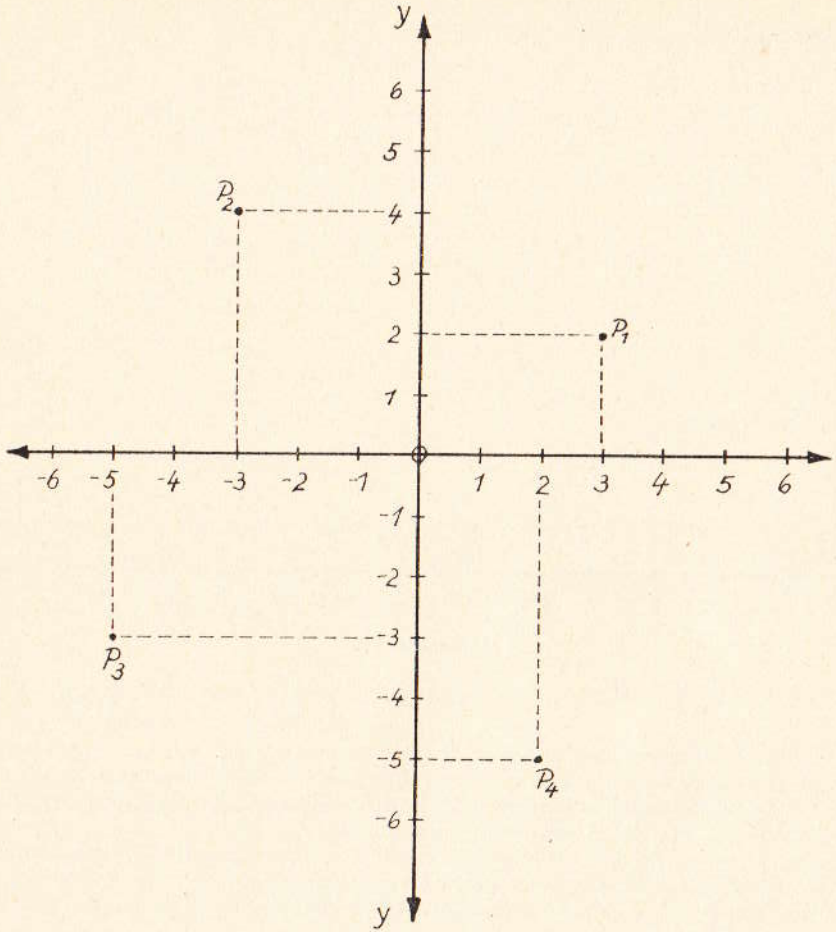


Abb. 38

Die waagerechte Achse heißt **Abzissen- oder x-Achse,** die senkrechte Achse heißt **Ordinaten- oder y-Achse.** Vom Schnittpunkt der Koordinatenachsen trägt man auf beiden Achsen (x und y) nach beiden Richtungen Maßeinheiten ab. Die Richtung der **Abzissenachse** nach rechts ist **positiv,** nach links **negativ.** Die Richtung der **Ordinatenachse** nach oben ist **positiv,** nach unten **negativ.** Dementsprechend haben Abzissen und Ordinaten positive und negative Werte.

Jeder Punkt (P_1 usw.) im Kreuz hat immer zwei Werte, einen x- und einen y-Wert.

Beispiel:

Folgende Funktion ist graphisch darzustellen:

$$y = 2x$$

Wir stellen zunächst wieder eine Tabelle auf

x	1	2	3	— 1	— 2
y	2	4	6	— 2	— 4

Der Wert y kann für die eingetragenen x-Werte aus der oben stehenden Gleichung ermittelt werden.

Für $x = 1$ ist $y = 2$ usw.

Jetzt zeichnen wir das Koordinatenkreuz.

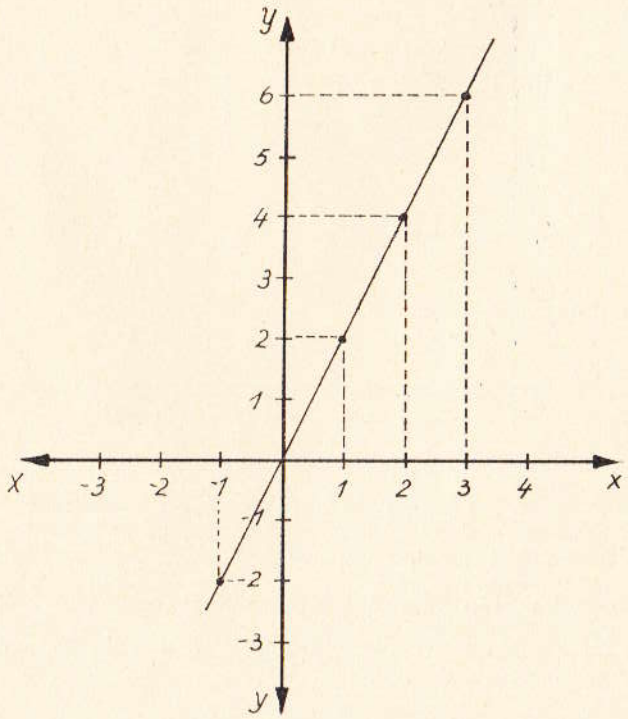


Abb. 39

fernmeldelehrling.de

In dieses Achsenkreuz werden die einzelnen Werte aus der Tabelle als Punkte eingetragen. So wird z. B. für $x = 1$ und $y = 2$ der Schnittpunkt ermittelt usw. Wenn man die einzelnen Punkte miteinander verbindet, so erhält man die **Kurve** der Funktion. In diesem Beispiel ist es eine gerade Linie, die durch den Nullpunkt geht.

Ebenso kann man Funktionsgleichungen aus der Elektrotechnik graphisch darstellen.

Beispiel:

Der Spannungsabfall an einem Widerstand ist graphisch darzustellen:

$$U = I \cdot R$$

Da der Widerstand R im Stromkreis mit 1 kΩ konstant bleibt, ist der Spannungsabfall U eine Funktion von der Stromstärke I.

I in mA	10	20	30	40
U = I · R (V)	10	20	30	40

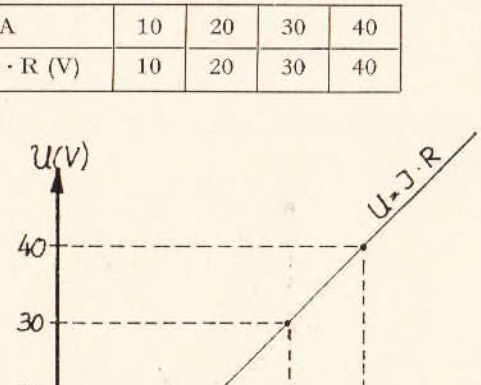


Abb. 40

In das Achsenkreuz werden die einzelnen Werte wieder eingetragen. Die Verbindung der eingezeichneten Punkte ergibt die Strom-Spannungskurve bei gleichbleibendem Widerstand. Es handelt sich auch hier wieder um eine Gerade.

Graphische Darstellung von Gleichungen mit 2 Unbekannten

Im Kapitel E III 3 haben wir bei der folgenden Aufgabe, die zwei Unbekannten x und y rechnerisch ermittelt.

$$\text{Gl. I:} \quad x + y = 100$$
$$\text{Gl. II:} \quad 2x - y = 20$$

Die rechnerische Ermittlung ergab:

$$x = 60 \text{ und } y = 40$$

Für die graphische Darstellung lösen wir beide Gleichungen nach y auf:

Gl. I: $y = 100 - x$

y	10	20	30	40	50
x	90	80	70	60	50

Gl. II: $y = 2 \times - 20$

y	10	20	30	40	50
x	0	20	40	60	80

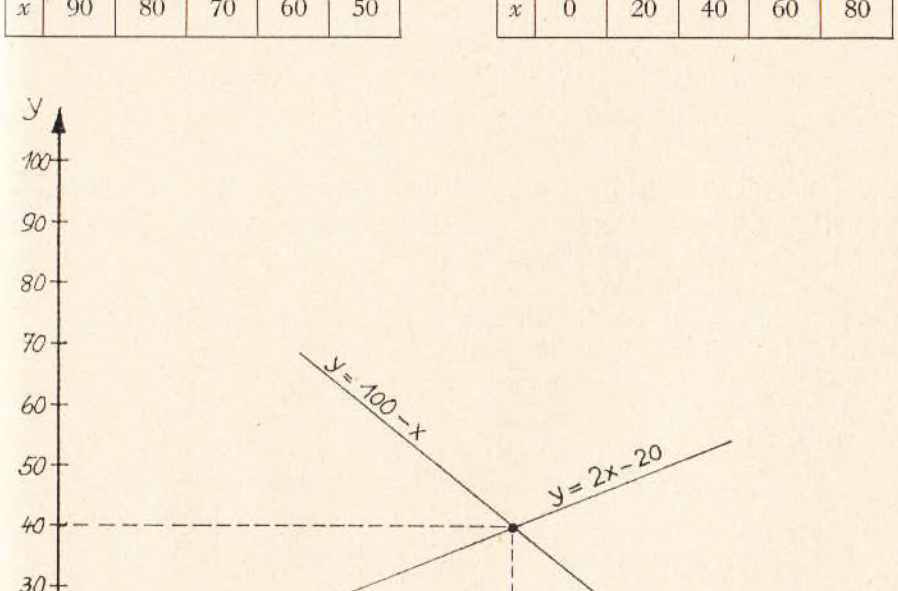


Abb. 41

Diese Funktionen stellen zwei gerade Linien dar, die sich in einem Punkt schneiden. Als Schnittpunkt finden wir $x = 60$ und $y = 40$. Diese Werte stimmen also mit den errechneten überein.

Die graphische Lösung von zwei linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten besteht darin, den **Schnittpunkt** beider Geraden zu finden.

fernmeldelehrling.de

VI. Die Proportion

Haben 2 Verhältnisse denselben Wert (z. B. $18 : 12 = \frac{3}{2}$ und $9 : 6 = \frac{3}{2}$), so sind sie gleich. Werden sie durch das Gleichheitszeichen zu einer Gleichung verbunden, so erhält man eine **Proportion.**

$$18 : 12 = 9 : 6$$

$$a : b = c : d$$

innere

äußere Glieder

Gelesen: a (verhält sich) zu b wie c zu d.

Man nennt die 4 Glieder der Reihe nach das 1., 2., 3. und 4. Glied der Proportion. a und c heißen die **vorderen,** b und d die **hinteren** Glieder, ferner a und d die **äußeren,** b und c die **inneren Glieder** der **Proportion.**

Die Proportion kann auch als Bruchgleichung geschrieben werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Beispiel:

Bei der Karte 1 : 100000 verhält sich:

$$\frac{\text{Kartenstrecke}}{\text{wirkliche Strecke}} = \frac{1}{100\ 000}$$

Hat man eine Proportion, so ergibt sich durch das kreuzweise Multiplizieren die Produktengleichung:

$$a : b = c : d$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Produktengleichung: $ad = bc$

In einer Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren Glieder.

Im praktischen Rechnen hat die Proportion eine große Bedeutung. Ist in einer Proportion ein Glied unbekannt, so kann man dieses aus den drei anderen berechnen.

Beispiel:

$$5 : x = 10 : 3$$

$$\frac{5}{x} = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{5 \cdot 3}{10}$$

Praktische Anwendung findet die Proportion beim Lösen von Dreisatzaufgaben:

1. Ein Schlossermeister zahlt für 4 Gesellen 96 DM Tagelohn, wieviel hat er täglich zu zahlen, wenn er noch 2 Gesellen dazu nimmt?

   Die Aufgabe enthält 2 Verhältnisse: Ein Verhältnis zwischen der **Zahl** der **Gesellen** und ein Verhältnis zwischen den **Tagelöhnern.**

$$\frac{4 \text{ Gesellen}}{4 + 2 \text{ Gesellen}} = \frac{96 \text{ DM}}{x \text{ DM}}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{96}{x}$$

$$x = \frac{96 \cdot 6}{4}$$

$$x = 144 \text{ DM}$$

2. Drei Arbeiter graben einen Garten in 8 Tagen um. Wie lange brauchen 4 Arbeiter zu der Arbeit?

   Auch diese Aufgabe enthält 2 Verhältnisse: Ein Verhältnis zwischen der **Zahl** der **Arbeiter** und ein Verhältnis zwischen der **Zahl** der **Arbeitstage.**

   Die Vermehrung der Arbeiter hat jedoch keine Vermehrung, sondern eine Verminderung der Arbeitstage zur Folge, also ist das **umgekehrte** Verhältnis der Arbeitstage dem der Arbeiter gleichzusetzen:

$$\left.\frac{3 \text{ Arbeiter}}{4 \text{ Arbeiter}} = \frac{x \text{ Tage}}{8 \text{ Tage}}\right\} \text{ umgekehrtes Verhältnis}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$$

$$x = \frac{3 \cdot 8}{4}$$

$$x = 6 \text{ Tage}$$

Wenn beide Größen in demselben Verhältnis wachsen oder abnehmen, dann stehen sie in einem geraden Verhältnis zueinander, sie sind direkt proportional.

fernmeldelehrling.de

Stehen dagegen die Größen im umgekehrten Verhältnis zueinander, d. h. wird die eine größer, dann wird die andere kleiner, so sind sie umgekehrt proportional.

3. Der Sockel eines Gebrauchsgegenstandes vom Ausmaß 5 : 8 soll auf eine im genau gleichen Verhältnis stehende Unterlage gesetzt werden, die nur eine Breite von 11,2 mm haben kann. Wie groß ist die Länge?

$$\frac{5}{8} = \frac{11{,}2}{x}$$

$$x = \frac{11{,}2 \cdot 8}{5}$$

$$x = 17{,}92 \text{ mm}$$

Aufgabe 24:

1. $3 : 4 = 9 : x$
2. $6 : 4 = x : 4$
3. $14 : 5 = 28 : x$
4. $\frac{4a}{6b} : \frac{6a}{8c} = \frac{24c}{15b} : x$
5. $(13x + 1) : 7 = 14 : 20$

VII. Wiederholungsfragen zum Abschnitt E

1. Was versteht man unter einer Gleichung?
2. Was kann man mit einer Gleichung machen, ohne ihren Wert zu ändern?
3. Wie werden die Glieder einer Gleichung auf die andere Seite gebracht?
4. Was versteht man unter Auflösung einer Gleichung?
5. Wie wird der Nenner in einer Gleichung beseitigt?
6. Wie werden die Rechenzeichen auf die andere Seite der Gleichung gebracht?
7. Wie kann die Potenzform einer Unbekannten (x^2) beseitigt werden?
8. Wie kann die Wurzel einer Unbekannten ($\sqrt{x}$) beseitigt werden?
9. Wie kann man prüfen, ob die Unbekannte richtig ermittelt wurde?
10. Welche Bedingungen müssen bei Gleichungen mit 2 Unbekannten erfüllt werden?
11. Welche Lösungsmethode gibt es bei Gleichungen mit 2 Unbekannten?
12. Wozu dienen graphische Darstellungen von Funktionen?

F. Der pythagoreische Lehrsatz

I. Allgemeines

Der Lehrsatz des Pythagoras ist einer der wichtigsten Lehrsätze der Geometrie. Pythagoras war ein griechischer Philosoph, der um 550 vor Chr. lebte. Sein Lehrsatz, der sich mit dem Verhältnis der einzelnen Seiten in einem **rechtwinkligen** Dreieck befaßt, ermöglicht uns in der Wechselstromlehre die Berechnung der Wirk-, Blind- und Scheinanteile.

Das rechtwinklige Dreieck hat, wie sein Name sagt, einen rechten Winkel (90°). Wo dieser Winkel von 90° liegt, spielt keine Rolle.

● **Die Summe der Winkel in jedem Dreieck beträgt immer 180°**

In einem Dreieck können nur ein **rechter** und zwei **spitze** Winkel enthalten sein, weil zwei rechte Winkel schon zusammen 180° hätten.

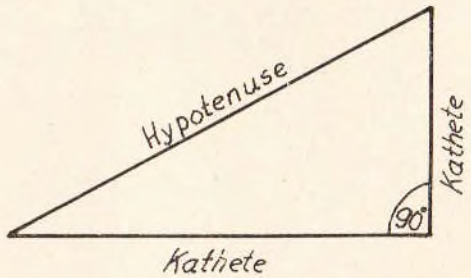


Abb. 42

Die beiden, den rechten Winkel einschließenden Seiten, heißen die **Katheten;** die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite hat den Namen **Hypotenuse.**

Beachte auch die Schreibweise. Man liest oft das Wort **Hypotenuse** mit „th" geschrieben; es hat aber mit Hypothese oder Hypothek nichts zu tun. Die Wörter **„Kathete"** und **„Pythagoras"** werden dagegen mit „th" geschrieben.

II. Beweis für die Richtigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes

An einem **rechtwinkligen** Dreieck, in dem sich die Seiten wie 3 : 4 : 5 verhalten, wollen wir jetzt den pythagoreischen Lehrsatz erläutern und beweisen.

Wir zeichnen das Dreieck mit der Hypotenuse von 5 cm und den beiden Katheten von 4 und 3 cm Länge.

fernmeldelehrling.de

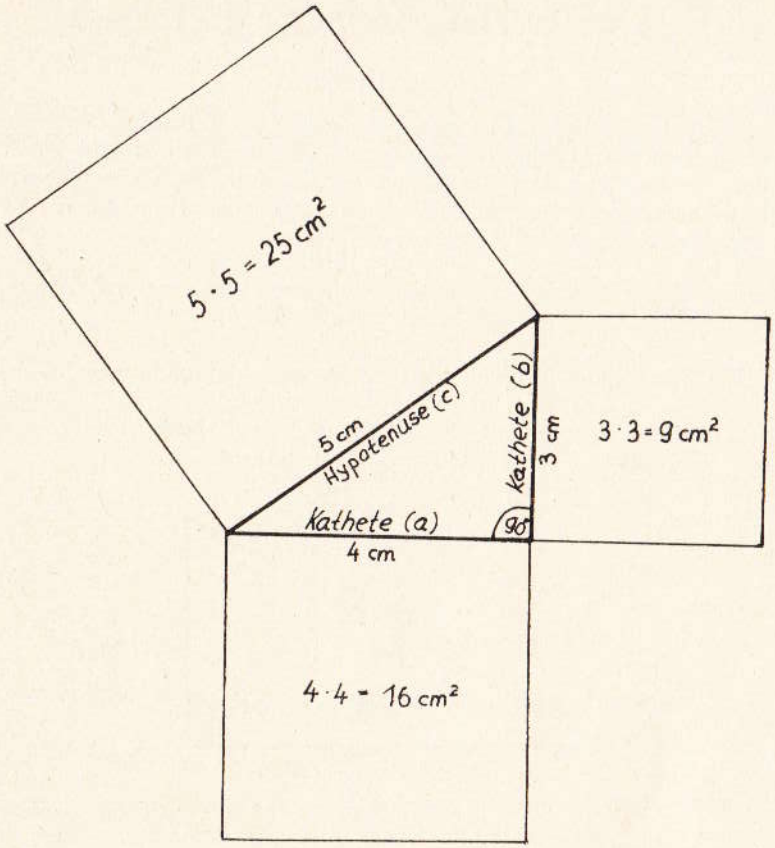


Abb. 43

Über die einzelnen Dreiecksseiten wird je ein Quadrat errichtet. Wir erhalten also ein großes Kathetenquadrat von 4 cm Seitenlänge, ein kleines Kathetenquadrat von 3 cm Seitenlänge und ein Hypotenusenquadrat von 5 cm Seitenlänge.

Die einzelnen Quadrate ergeben folgende **Flächen:**

1. Großes Kathetenquadrat	$4 \cdot 4 = 16$ cm²	(a^2)
2. Kleines Kathetenquadrat	$3 \cdot 3 = 9$ cm²	(b^2)
Summe	25 cm²	
3. Hypotenusenquadrat	$5 \cdot 5 = 25$ cm²	(c^2)

Bei der Betrachtung der Flächen erkennen wir, daß die beiden Kathetenquadrate mit zusammen 25 cm² in der Größe dem Hypotenusenquadrat von ebenfalls 25 cm² entsprechen.

Hieraus folgt der pythagoreische Lehrsatz:

In einem **rechtwinkligen** Dreieck ist die Summe der beiden **Kathetenquadrate** gleich dem **Hypotenusenquadrat.**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Daraus folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Setzen wir für $a = 4$ und $b = 3$ ein:

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$c = \sqrt{16 + 9}$$

$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

Die Seite c haben wir über die Formel des pythagoreischen Lehrsatzes durch Umstellung der Gleichung ermitteln können. Ebenso kann man die Gleichung nach a oder b umstellen.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

In dem vorstehenden Beispiel haben wir gesehen, daß bei einem Seitenverhältnis von 3 : 4 : 5 ein **rechtwinkliges** Dreieck herauskommt. Es gibt aber auch noch andere Zahlengruppen, die die Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken angeben z. B. 5 : 12 : 13, 7 : 24 : 25, 8 : 15 : 17 usw., man nennt sie **pythagoreische** Zahlen. Wenn man sie mit beliebigen Zahlen multipliziert, erhält man neue pythagoreische Zahlen.

Schon die alten Ägypter sollen mit einer Schnur, die durch Knoten in drei Abschnitte im Verhältnis 3 : 4 : 5 geteilt war, rechte Winkel im Freien abgesteckt haben.

fernmeldelehrling.de

Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes:

1. Bei einem rechtwinkligen Dreieck soll die unbekannte Seite ermittelt werden:

$a = 40$ cm
$b = 9$ cm
$c = ?$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$c = \sqrt{40^2 + 9^2}$
$c = \sqrt{1600 + 81}$
$c = \sqrt{1681}$
$c = 41$ cm

2. $c = 41$ cm
$b = 9$ cm
$a = ?$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
$a = \sqrt{41^2 - 9^2}$
$a = \sqrt{1681 - 81}$
$a = \sqrt{1600}$
$a = 40$

3. $c = 41$
$a = 40$
$b = ?$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$b = \sqrt{41^2 - 40^2}$
$b = \sqrt{1681 - 1600}$
$b = \sqrt{81}$
$b = 9$

Beispiele aus der Elektrotechnik:

1. In dem rechtwinkligen Dreieck soll der unbekannte Wechselstromwiderstand Rs ermittelt werden:

Wirkwiderstand $R_w = 100$
Blindwiderstand $R_B = 1750$
Scheinwiderstand $R_s = ?$

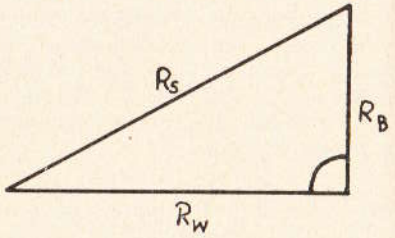


Abb. 44

$R_s = \sqrt{R_w^2 + R_B^2}$
$R_s = \sqrt{100^2 + 1750^2}$
$R_s = 1753$

2. Die unbekannte Blindleistung ist zu ermitteln:

Scheinleistung $P_s = 4400$
Wirkleistung $P_w = 3000$
Blindleistung $P_B = ?$

$P_B = \sqrt{P_s^2 - P_w^2}$
$P_B = \sqrt{4400^2 - 3000^2}$
$P_B = 3210$

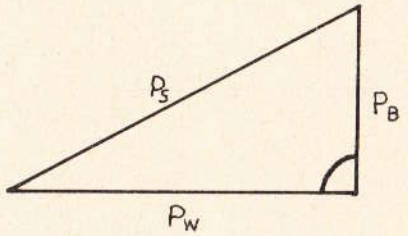


Abb. 45

Aufgabe 24

1. $a = 6$, $b = 8$, $c = ?$
2. $c = 29$, $a = 21$, $b = ?$
3. $R_w = 36$, $R_B = 48$, $R_s = ?$
4. $R_s = 70$, $R_B = 56$, $R_w = ?$
5. $P_w = 100$, $P_B = 75$, $P_s = ?$
6. $P_s = 165$, $P_w = 132$, $P_B = ?$

G. Die Winkelfunktionen

I. Allgemeines

Bei den folgenden Betrachtungen wollen wir uns nur soweit mit den einfachen Winkelfunktionen eines **rechtwinkligen** Dreiecks befassen, wie es für das Verständnis in der Elektrotechnik (Wechselstromtechnik) unbedingt erforderlich ist.

Das rechtwinklige Dreieck enthält die Winkel α (Alpha), β (Beta) und γ (Gamma).

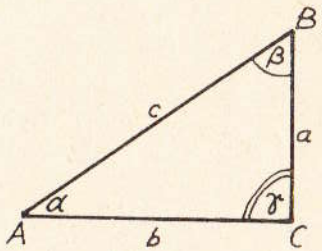


Abb. 46

fernmeldelehrling.de

Das Verhältnis der Seiten a und b ändert sich bei **kleineren oder größeren Dreiecken nicht,** solange die Winkel unverändert bleiben.

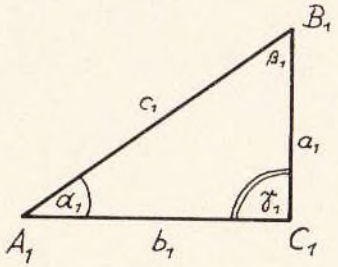


Abb. 47

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

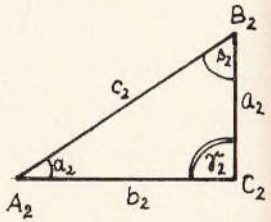


Abb. 48

Zu jedem Verhältnis von zwei Seiten müssen also in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmte Winkel α und β gehören.

Nun wollen wir uns aber nicht nur mit den Seiten, sondern auch mit den Winkeln befassen. Nehmen wir den spitzen Winkel bei A, also den Winkel α, sprich Alpha.

In der nebenstehenden Zeichnung sind nun mehrere Winkel eingetragen, α, α_1, α_2. Hierdurch ergeben sich die Seiten a, a_1, a_2 und c, c_1, c_2.

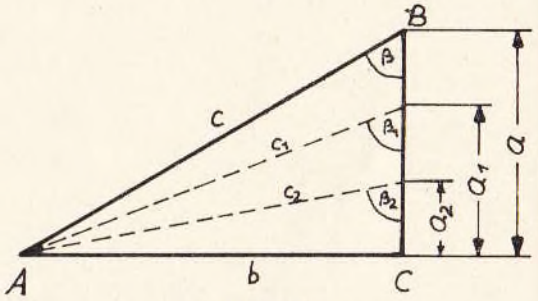


Abb. 49

- Werden die Seiten a und c kleiner, so wird auch der Winkel α kleiner, und zwar im gleichen Verhältnis.

Wir können also sagen:

der Winkel α hat das Verhältnis $a : c$
der Winkel α_1 hat das Verhältnis $a_1 : c_1$
der Winkel α_2 hat das Verhältnis $a_2 : c_2$

Zu jedem Verhältnis der Seiten $\left(\frac{a}{c}\right)$ muß also immer ein bestimmter Winkel gehören (α).

Der Winkel α kann durch das Verhältnis der **gegenüberliegenden Kathete** a zur **Hypotenuse** c bestimmt werden. **Diese Winkelfunktion wird „Sinus" genannt** „sin" geschrieben.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Beispiel: Gegeben: $a = 3$, $c = 6$ $\quad \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

nach der Tabelle ist: $\alpha = 30°$

Der Winkel α kann aber auch durch das Verhältnis der **anliegenden Kathete** b zur **Hypotenuse** c bestimmt werden. **Diese Winkelfunktion wird „Kosinus"** genannt und „cos" geschrieben.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Beispiel:

Gegeben: $b = 2$, $c = 4$ $\quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

$\alpha = 60°$ (Tabelle)

Bisher wurde der Winkel α durch das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse bestimmt (sin und cos). Der Winkel α kann außerdem durch das Verhältnis der beiden Katheten bestimmt werden (tan und cot).

- Das Verhältnis der **Gegenkathete** zur **Ankathete** ist der **Tangens** (geschrieben: tan).

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

- Das Verhältnis der **Ankathete** zur **Gegenkathete** wird **Kotangens** genannt (geschrieben: cot).

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

fernmeldelehrling.de

Wir haben bisher immer nur vom Winkel α gesprochen. Das rechtwinklige Dreieck enthält aber außerdem noch den spitzen Winkel „β“ (lies Beta). Die für den Winkel α entwickelten Beziehungen gelten aber genauso für den Winkel β. Wir dürfen uns nur nicht zu ängstlich an die Buchstaben in den Formeln klammern, wie das der Ungeübte gern macht. Es kommt nicht darauf an, daß $\sin \alpha = a : c$ ist, sondern $\sin \alpha$ = Gegenkathete: Hypotenuse.

Beim Winkel „β“ ist z. B.:

$$\sin \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\sin \beta = \frac{b}{c}$
$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\cos \beta = \frac{a}{c}$
$\tan \alpha = \frac{a}{b}$	$\tan \beta = \frac{b}{a}$
$\cot \alpha = \frac{b}{a}$	$\cot \beta = \frac{a}{b}$

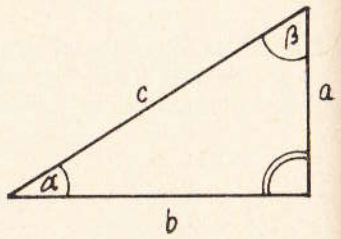


Abb. 50

Aus der vorstehenden Gegenüberstellung ergibt sich folgendes:

$$\sin \alpha = \cos \beta \left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\cot \alpha = \tan \beta \left(\frac{b}{a}\right)$$

Wenn wir in den vorstehenden Gleichungen für den Winkel $\beta = 90° - \alpha$ einsetzen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos (90° - \alpha) \\ \cos \alpha &= \sin (90° - \alpha) \\ \tan \alpha &= \cot (90° - \alpha) \\ \cot \alpha &= \tan (90° - \alpha) \end{aligned}$$

- Die Funktion eines Winkels ist gleich der **Kofunktion** seines **Komplementwinkels** (Ergänzungswinkel zu 90°).

Durch diesen Zusammenhang können aus der Sinustabelle die Kosinuswerte und aus der Tangenstabelle die Kotangenswerte abgelesen werden.

Auszug aus der Tabelle für Winkelfunktionen

Sinus Grad	Kosinus Grad		Tangens Grad	Kotangens Grad	
0	90	0,000	0	90	0,000
10	80	0,174	10	80	0,176
20	70	0,342	20	70	0,364
30	60	0,500	30	60	0,577
40	50	0,643	40	50	0,839
50	40	0,766	50	40	1,192
53	37	0,799	53	37	1,327
60	30	0,866	60	30	1,732
70	20	0,940	70	20	2,747
80	10	0,985	80	10	5,671
90	0	1,000	90	0	

Zur Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken müssen außer dem rechten Winkel noch zwei Größen bekannt sein.

II. Beispiele für die Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken:

1. Gegeben: $a = 8$ — $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = 6$ — $c = \sqrt{64 + 36}$
Gesucht: $c = ?$ — $c = \sqrt{100}$
$\alpha = ?$ — $c = 10$
$\beta = ?$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

nach der Tabelle: $\alpha = 53°$

$\beta = 90° - \alpha = 90 - 53 = 37°$

oder $\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\beta = 37°$

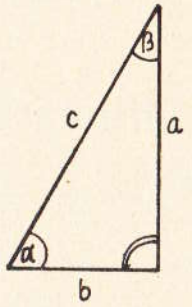


Abb. 51

fernmeldelehrling.de

2. Gegeben: $c = 15$
$a = 9$

Gesucht: $b = ?$
$\alpha = ?$
$\beta = ?$

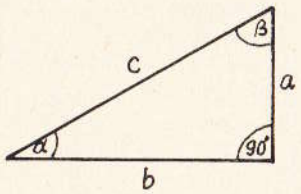


Abb. 52

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{15^2 - 9^2}$$
$$= \sqrt{144}$$
$$= 12$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{15} = 0{,}8$$
$$\alpha = 37°$$
$$\beta = 90 - \alpha = 53°$$

oder $\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{9}{15} = 0{,}6$
$$\beta = 53°$$

oder $\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{12}{9} = 1{,}33$
$$\beta = 53°$$

oder $\cot \beta = \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = 0{,}75$
$$\beta = 53°$$

III. Wiederholungsfragen zu den Abschnitten F und G

1. Wie groß ist die Summe der Winkel in einem Dreieck?
2. Wie heißen die Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck?
3. Wie heißen die Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck?
4. Wie heißt der pythagoreische Lehrsatz?
5. Wodurch kann der Winkel α bestimmt werden?
6. Welche Winkelfunktionen sind bekannt?
7. Was ist ein Komplementwinkel?
8. Wofür werden die Winkelfunktionen in der Elektrotechnik gebraucht?

H. Lösungen zu den Übungen und Aufgaben

Aufgabe 1: Die Primzahlen zwischen 1 und 100 sind:
1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Aufgabe 2: a) k.g.V. = 360
b) k.g.V. = 1800
c) k.g.V. = 2160

Aufgabe 3: a) $94\frac{13}{21}$
b) $57\frac{789}{1000}$
c) $27\frac{232}{555}$
d) $8\frac{233}{288}$

Aufgabe 4: a) $\frac{19 \cdot 9}{4} = 42\frac{3}{4}$
b) $\frac{95 \cdot 4}{3} = 126\frac{2}{3}$
c) 15 350
d) $4\,449\frac{1}{2}$

Aufgabe 5: a) $\frac{3}{20}$ $\frac{4}{25}$ $\frac{2}{11}$
b) $\frac{2}{33}$ $\frac{7}{75}$ $\frac{11}{280}$

Aufgabe 6: a) $2\frac{1}{4}$ $2\frac{3}{7}$ $1\frac{2}{19}$
b) $2\frac{1}{16}$ $2\frac{3}{20}$ $4\frac{1}{24}$
c) $4\frac{3}{4}$ $2\frac{1}{12}$ $1\frac{7}{30}$
d) $\frac{2}{3}$ $\frac{11}{14}$ $\frac{11}{20}$
e) $1\frac{7}{8}$ $5\frac{3}{4}$ $3\frac{1}{20}$

Aufgabe 7: a) $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{5}$
b) $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$
c) $1\frac{7}{9}$ $1\frac{2}{3}$ 4 6

Aufgabe 8: 10

fernmeldelehrling.de

Aufgabe 9: a) 3, 2, 5

b) 3, 7, $1\frac{4}{11}$

c) $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{9}{14}$ $1\frac{3}{5}$

d) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{8}$

e) 7 $1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{3}$

f) $16\frac{7}{8}$ $\frac{112}{2025}$

Aufgabe 10: a) 305,80788

b) 80,09088

c) 572,25 200,1406 0,035904

d) 14,5824 1,013750 165,550

e) 0,0014 0,7585 0,000096

f) 83,8 $\approx$ 2,752

Aufgabe 11: 0,75 0,85 0,944 2,4 9,875 7,98 12,013

Aufgabe 12: a) 1,375 $(1\frac{3}{8})$ 1,95 $(1\frac{19}{20})$ 14,88

b) 0,066 0,35 $\frac{3}{70}$ $\frac{4}{5}$ $2\frac{1}{5}$

Aufgabe 13: 720 6,57

Aufgabe 14: 1. 79

2. 57

Aufgabe 15: $a_1) = 44$

$a_2) = 45$

$b_1) = 31$

$b_2) = 41$

Aufgabe 16: a) $7a + 5x + 14y$

b) $4\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{6}y$

c) $5b + 6\frac{3}{4}c$

d) $27\frac{1}{2}$

e) 12

f) 11,458

Aufgabe 17: a) 0,493

$b_1) = 22$

$b_2) = 2\frac{1}{12}$

Aufgabe 18: 1. a — d

2. b

3. c

4. x — y + z

5. y — 2z

6. a — b + c — d — e — f

7. x — y — z — n — v

8. 0

Aufgabe 19: a) $-24a$

b) $20x + 25$

c) $5a + 20$

d) $an - 4a + 5n - 20$

e) $32a + 8b = 8\,(4a + b)$

f) $32ax + 29bx - 45cx$

Aufgabe 20: a) 20000 Ω

b) 6000 KΩ

c) 10000 nF

d) 2000 pF

e) 6 cm

f) 3,6 m

fernmeldelehrling.de

Aufgabe 21: a) 57, 99, 44, 65,29, 99,89, 13,9, 62,9, 0,05
b) 1,2 · 1,2 m

Aufgabe 22: a) $x = 5$
b) $x = 24$
c) $x = \frac{1}{6}$
d) $x = -6$
e) $x = -13{,}5$
f) $x = 15\frac{1}{7}$
g) $x = 7$ und 20

Aufgabe 23: a) $x = 7$
$y = 5$
b) $x = -3$
$y = 4$
c) $x = 8$
$y = 5$
d) $x = 13$
$y = 5$

Aufgabe 24: 1. $c = 10$
2. $b = 20$
3. $R_s = 60$
4. $R_w = 42$
5. $P_s = 125$
6. $P_B = 99$

Grundgesetze der Physik

Im folgenden wollen wir uns mit den **physikalischen Grundbegriffen** befassen, die für eine gute praktische und theoretische Ausbildung unbedingt erforderlich sind. Den Ausbildungsplan überschreitende physikalische Betrachtungen und Gleichungen werden bewußt nicht behandelt, auch wenn dadurch der behandelte Stoff nicht völlig in sich abgeschlossen ist.

A. Allgemeines

Sämtliche **physikalischen Vorgänge,** bei denen sich im Gegensatz zu **chemischen** Vorgängen die Zusammensetzung der Stoffe nicht verändert, können auf drei Grundgrößen zurückgeführt werden.

1. Grundgröße		**Länge**	
2. Grundgröße		**Zeit**	
3. Grundgröße	**Masse**	oder	**Kraft**

Von diesen drei Grundgrößen werden alle anderen Größen abgeleitet, indem sie durch die Multiplikation von Grundgrößen (Arbeit = Länge mal Kraft) oder durch die Division von Grundgrößen (Geschwindigkeit = Länge : Zeit oder Beschleunigung = Länge : Zeit) dargestellt werden.

Da die Naturerscheinungen in Versuchsreihen erforscht werden, **entstehen physikalische Gesetze aus Zahlenbeziehungen,** die während der Versuche ermittelt werden. Diese Zahlenbeziehungen sind nur möglich, weil **jeder physikalischen Größe eine Meßzahl zugeordnet** werden kann, **die angibt, wie oft eine Maßeinheit in jeder einzelnen Größe enthalten ist.** Wird also eine physikalische Größe gemessen, wird sie mit ihrer Maßeinheit verglichen:

Messen ist nur Vergleichen mit einer festgelegten Einheit.

Die Maßeinheiten physikalischer Größen können grundsätzlich frei gewählt werden. Heute noch sind für einige physikalische Größen nebeneinander verschiedene Maßeinheiten üblich, z. B. für die Länge die Maßeinheiten Kilometer, Meter, Zentimeter, aber auch Fuß, Zoll, Meile und Seemeile. **Auf das physikalische Gesetz selbst hat die Wahl der Maßeinheiten keinen Einfluß,** nur die Maßzahlen (die in der Gleichung auftretenden Konstanten) werden dadurch bestimmt. **In der Physik sind nur die Maßeinheiten der Grundgrößen festgelegt, die anderen Maßeinheiten können aus den Grundgrößen abgeleitet werden,** sie stellen — wie die zugehörigen abgeleiteten Größen — Produkte oder Potenzprodukte der Maßeinheiten der Grundgrößen dar.

fernmeldelehrling.de

I. Die Maßeinheiten der drei Grundgrößen

Die Maßeinheiten der drei Grundgrößen werden Grundeinheiten genannt. Alle Grundeinheiten sind durch ein Normal bestimmt, das international anerkannt ist.

1. Das Normal der Länge

Die Längeneinheit ist das Urmeter, *das im Internationalen Büro für Maße und Gewichte im Pavillon de Breteuil in Sèvres bei Paris* aufbewahrt wird.

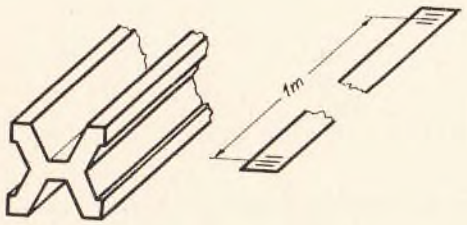


Abb. 55

Das Urmeter ist ein Stab aus einer Legierung von 90% Platin und 10% Iridium. Der Stab, dessen Querschnitt in Abb. 55 dargestellt ist, trägt auf dem Grunde der Rinne an beiden Enden je drei feine Striche; der Abstand der beiden mittleren Striche beträgt bei einer Temperatur von 0°C*) „ein Meter" (1 m). Das Meter entspricht fast genau dem zehnmillionsten Teil eines Erdquadranten (Abstand zwischen Pol und Äquator). Kopien des Urmeters befinden sich im Besitz aller Kulturländer, sie dienen in diesen Ländern als Normale der Längeneinheit.

Neben dem Meter (m) sind in der Technik **folgende** vom Meter abgeleitete **Längeneinheiten üblich:**

1 Kilometer (km)	$= 10^3$ m
1 Zentimeter (cm)	$= 10^{-2}$ m
1 Millimeter (mm)	$= 10^{-3}$ m
1 Mikron (μ)	$= 10^{-6}$ m
1 Millimikron (mμ)	$= 10^{-9}$ m
1 Mikromikron ($\mu\mu$)	$= 10^{-12}$ m

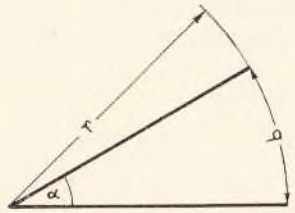
In der Physik wird häufig das Zentimeter als Maßeinheit angewendet.

Das Lichtjahr ist eine Längeneinheit der Astronomie; die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt, entspricht $0{,}94608 \cdot 10^{13}$ km.

*) °C = Grad Celsius, Maßeinheit der Temperatur.

Die genaue Länge des Meters kann auch mit Hilfe von Lichtwellen bestimmt werden. International anerkannt ist die Bestimmung der Längeneinheit mit der roten Linie des Elementes Cadmium, ein Meter entspricht 1553164,13 Wellenlängen dieses Lichtes.

Aus der **Längeneinheit** werden die **Flächeneinheit** und die **Einheit des Raumes** (*Volumeneinheit*) abgeleitet. **Flächeneinheit ist das Quadratmeter** (qm oder m^2), ein Quadrat, dessen Seitenlänge 1 m beträgt. **Volumeneinheit ist das Kubikmeter** (cbm oder m^3), ein Würfel, dessen Kantenlänge 1 m beträgt.



$\alpha^\circ \mathrel{\widehat{=}} \widehat{\alpha} = \frac{b}{r}$

Abb. 56

Neben der Länge, der Fläche und dem Rauminhalt ist für die Bestimmung des Raumes noch der **Winkel** wichtig. Er stellt ein **Längenverhältnis** dar und ist eine **reine Zahl ohne Maßeinheit** und daher von der Wahl der Längeneinheit unabhängig. **Der Winkel kann im Gradmaß** (Einheit: Ein Grad = 1°) **und im Bogenmaß** (Länge des Kreisbogens über dem Winkel dividiert durch den Radius — vgl. Abb. 56) **angegeben werden.** Das Gradmaß wird in der Praxis am meisten verwendet.

2. Das Normal der Zeit

Jeder Vorgang im praktischen Leben, auch in der Physik, besteht aus einer Folge von Ereignissen. Jedem Ereignis ist dabei eine bestimmte Zeit zugeordnet; die einzelnen Ereignisse können gleichzeitig stattfinden, sie können aber auch zeitlich aufeinanderfolgen. **Der Zeitbegriff und die Zeitmessung spielen in den Beobachtungsreihen der Naturlehre eine wichtige Rolle.**

Die Zeiteinheit ist der Tag, das ist die Dauer einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Achse.

Die Umdrehung der Erde wird ermittelt durch die Beobachtung der Stellung der Erde gegenüber der Sonne, und zwar wird der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Kulminationen*) der Sonne gemessen (wahrer Sonnentag). Von dem Sonnentag unterscheidet sich der Sternentag, das ist der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Kulminationen eines beliebigen Fixsternes; der Sternentag dauert etwa 3 Minuten und 56 Sekunden länger als der Sonnentag.

Jeder Längengrad der Erde hat aus diesem Grunde seine eigene Zeit (Ortszeit). Um im praktischen Leben die Zeitbestimmung zu vereinfachen, ist die Erde in 15° breite Zonen eingeteilt worden, in denen jeweils die gleiche Zeit gilt (Zonenzeit).

*) Kulmination = Durchgang eines Gestirns durch den Meridian; hierbei erreicht das Gestirn seine größte Höhe über dem Horizont. Die „obere Kulmination" der Sonne findet um 12.00 Uhr, die „untere Kulmination" um Mitternacht statt.

fernmeldelehrling.de

Diese Zonen haben einen Zeitunterschied von jeweils einer Stunde. Für Deutschland und die übrigen mitteleuropäischen Länder gilt die mitteleuropäische Zeit (MEZ), d. h. die Ortszeit des 15. Längengrades östlich von Greenwich. Die Ortszeit von Greenwich ist als Weltzeit festgelegt worden.

- **Die physikalische Zeiteinheit ist die Sekunde (s),** die von der Zeiteinheit Tag*) abgeleitet wird, weil der Tag in der Physik in vielen Fällen einen zu großen Zeitbegriff darstellt.

1 Tag hat

24 Stunden (h),
$24 \cdot 60 =$ **1440 Minuten (min),**
$24 \cdot 60 \cdot 60 =$ **86400 Sekunden (s).**

Die Sekunde ist also der 86400. Teil eines Sonnentages.

3. Das Normal der Masse und der Kraft

Als Masseneinheit gilt die Masse des Urkilogramms. Sie heißt 1 Kilogramm (1 kg)

Wir benutzen in der Physik als Masseneinheit meist den tausendsten Teil davon:

1 Gramm ($1\ g = 10^{-3}\ kg$)

Das Urkilogramm ist ein Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung, dessen Masse international als Masseneinheit oder Krafteinheit von 1 Kilogramm (1 kg) festgelegt worden ist. Die Masse eines Kubikdezimeters (eines Liters) Wasser bei 4° C im luftleeren Raum auf dem 45. Breitengrad und in Meeresspiegelhöhe entspricht einem Kilogramm und war die ursprüngliche Begründung der Masseneinheit.

Für die Krafteinheit wird die Bezeichnung „Kilopond" (kp) verwendet.

Der tausendste Teil des Kiloponds ist das

Pond ($1\ p = 10^{-3}\ kp$)

Durch die noch nicht ganz beseitigte Doppeldeutigkeit des Wortes „Gewicht" (Kraft) ergeben sich bei der Bezeichnung ‚Kilopond" immer wieder Unklarheiten. Deshalb soll hier eine kurze Erläuterung gegeben werden:
Durch die Anziehungskraft der Erde wird von jedem Körper auf seine Unterlage ein Druck (eine Kraft) ausgeübt. Dieser Druck wächst mit der Masse des Körpers. Die auf die Unterlage wirkende Kraft heißt Gewicht.

*) Tag (als physikalischer Begriff) = mittlerer Sonnentag; der mittlere Sonnentag errechnet sich als arithmetisches Mittel aller Sonnentage eines Jahres.

Das Gewicht des Körpers ist je nach Art und Größe sehr verschieden. Wollen wir wissen, wie groß es ist, so legen wir auf die eine Waagschale den zu wägenden Körper und auf die andere „Gewichtsstücke", und zwar so viele, daß die Waage im Gleichgewicht ist. Dann sind die Kräfte, mit denen sie nach unten drücken (ihr Gewicht) gleich groß ($F_1 = F_2$).

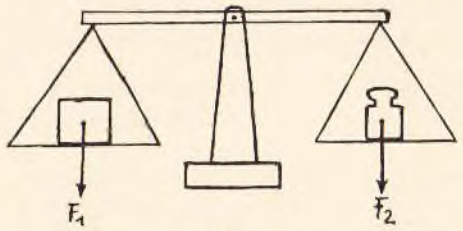


Abb. 57

Im täglichen Leben verlangt man jedoch nicht „soviel Zucker" wie erforderlich ist, damit die Waagschale mit derselben Kraft wie von einem 1 kg-Gewichtsstück nach unten gedrückt wird, sondern man verlangt einfach 1 kg Zucker, um eine bestimmte Menge zu erhalten. Die Hausfrau ist schließlich an der Stoffmenge und nicht an dem Gewicht oder an der Kraft, die auf die Unterlage drückt, interessiert. Die Waage mißt also eine bestimmte träge Menge Zucker ab, aber auch eine gewisse Kraft, die wir in der Physik Gewicht nennen. Für das praktische Leben braucht kein Unterschied in diesen Fällen gemacht zu werden.

Für die Physik ist aber Stoffmenge (Masse) und Gewicht (Kraft) nicht dasselbe. Der Unterschied wird uns klar, wenn wir davon ausgehen, daß ein Körper im freien Weltenraum und außerhalb des Anziehungsbereichs der Erde sein Gewicht vollkommen verliert, doch seine Masse unverändert erhalten bleibt (Gesetz von der Erhaltung der Masse). Als unterschiedliche Maßeinheit werden in der Physik für die Masse das Kilogramm und für die Kraft oder das Gewicht das Kilopond verwendet. Im praktischen Leben ist jedoch für das Gewicht oder die Kraft noch die Maßeinheit „Kilogramm" üblich, deshalb wollen wir sie in den praktischen Beispielen auch noch verwenden.

4. Das CGS-System und das MKS-System

Wie einleitend festgestellt wurde, reichen die **drei Grundgrößen Länge, Zeit** und **Masse** aus, um die meisten Vorgänge der Physik erfassen zu **können. Deshalb genügen der Physik auch die den drei Grundgrößen zugeordneten Maßeinheiten (Grundeinheiten), wenn alle anderen Maßeinheiten von den Grundeinheiten abgeleitet werden,** was sich stets mit Hilfe physikalischer Gesetze oder aus den Begriffsbestimmungen heraus durchführen läßt. Bereits im Jahre 1836 haben die beiden deutschen Mathematiker und Physiker *Gauß* und *Weber* vorgeschlagen, alle Einheiten der Physik auf die Grundeinheiten der **Länge (Zentimeter),** der **Masse (Gramm)** und der **Zeit (Sekunde)** zu beziehen. **Dadurch werden in physikalischen Gesetzen und Rechnungen Umrechnungskonstanten vermieden. Die Einheiten anderer physikalischer Größen werden wie die Größen selbst aus den drei Grundeinheiten abgeleitet (abgeleitete Einheiten).**

fernmeldelehrling.de

Dieses Maßsystem wird Zentimeter-Gramm-Sekunde-System (abgekürzt CGS-System) oder auch **absolutes** Maßsystem **genannt,** weil alle abgeleiteten Einheiten auf **1 cm, 1 g** und **1 s** bezogen werden.

Die **Technik** bevorzugt ein **Maßsystem,** dem auch die drei Grundgrößen zugrunde liegen, wobei aber die **Länge in Metern,** die **Kraft in Kilogramm** und die **Zeit in Sekunden** gemessen werden. Dieses Maßsystem heißt **Meter-Kilogramm-Sekunde-System** (abgekürzt **MKS-System**) oder auch **technisches** Maßsystem. In den folgenden Ausführungen wird vorzugsweise das CGS-System verwendet werden.

Um die Berechnung kontrollieren zu können, wird in der Physik **neben der eigentlichen Rechnung mit den Maßzahlen noch eine Nebenrechnung mit den Maßeinheiten** selbst durchgeführt, wobei am Ende des Rechnungsganges auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Maßeinheiten stehen müssen. Da die Maßeinheiten auch Dimensionen genannt werden, wird die Rechnung mit den Maßeinheiten **Dimensionsrechnung** genannt.

B Aufbau und Zustandsformen der Körper

- Jeder Körper beansprucht für sich einen **Raum.**
- Der physikalisch kleinste Teil eines Körpers heißt **Molekül.**
- Die Zusammenhangskraft, die die Moleküle eines Körpers zusammenhält, heißt **Kohäsion.**
- Die Moleküle lassen sich chemisch noch weiter zerlegen in **Atome.**
- Atome sind die **kleinsten** Teile eines **Grundstoffes** oder **Elementes.**
- Es gibt etwa **100** Elemente.
- Sämtliche Körper (Stoffe) sind aus den Grundstoffen zusammengesetzt. Sie unterscheiden sich voneinander durch die Art und Anzahl der in ihren Molekülen vorhandenen Atome.

Alle Körper können in **festem, flüssigem** oder **gasförmigem** Zustand den Raum ausfüllen. Diese Zustandsformen oder **Aggregatzustände** der Körper hängen von der Stärke der **Kohäsion** ab. **Durch Temperaturveränderungen bzw. Durch Druckänderungen kann die Stärke der Kohäsion und damit der Aggregatzustand geändert werden.**

I. Feste Körper

Die Stoffe der festen Körper haben einen **bestimmten Rauminhalt** und eine **bestimmte Gestalt.** Ihre Moleküle können nur schwer gegeneinander verschoben oder voneinander getrennt werden, weil zwischen den Molekülen eine **große** Kohäsion besteht.

II. Flüssige Körper

Flüssige Körper haben auch einen **bestimmten Rauminhalt,** aber **keine** bestimmte Gestalt. Ihre Moleküle haben eine **schwache** Kohäsion.

III. Luftförmige Körper-Gase

Luftförmige Körper oder Gase haben **keinen** bestimmten Rauminhalt und **keine** bestimmte Gestalt. Gase haben ein Ausdehnungsbestreben; sie lassen sich aber auch stark zusammendrücken. Zwischen den Molekülen der Gase ist praktisch **keine** Kohäsion vorhanden.

Ein Stoff kann durch Temperatur- oder Druckänderungen von einer Zustandsform in die andere übergehen. Das Wasser kann z. B. beim Gefrieren aus der flüssigen in die feste Form, beim Schmelzen aus der festen in die flüssige Form, beim Sieden aus der flüssigen in die gasförmige Form, beim Kondensieren aus der gasförmigen in die flüssige Form übergehen.

C. Mechanik der festen Körper

I. Die Kraft

Eine Kraft (Zugkraft oder Druckkraft) kann folgende Wirkungen verursachen:

1. Eine Kraft kann den Körper verformen (statische Kräfte).
2. Eine Kraft kann den Bewegungszustand eines Körpers verändern (dynamische Kräfte).

Kräfte, die Zug- bzw. Druckwirkungen ausüben und dadurch einen Körper verformen, werden als **statische** Kräfte bezeichnet. Kräfte, die Bewegung hervorrufen, sind **dynamische** Kräfte.

fernmeldelehrling.de

Durch einen **Kraftpfeil** (Vektor) kann man **Größe, Richtung** und **Lage** einer Kraft darstellen.

Die Länge des Pfeiles ist ein Maß für die Größe der Kraft (z. B. 1 cm Pfeillänge entspricht 10 kg)*. Das Formelzeichen für eine Kraft ist F.

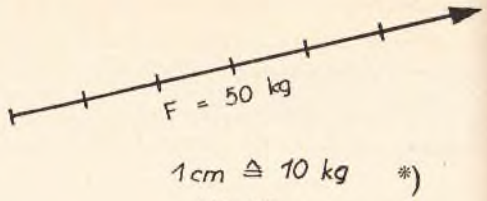


Abb. 58

I Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, so ist stets eine gleich große, in entgegengesetzter Richtung wirkende **Gegenkraft** vorhanden.

Wenn wir z. B. auf einen Tisch einen Druck ausüben, so wird vom Tisch ein gleich großer Druck entgegengesetzt (andernfalls würde der Tisch zusammenbrechen).

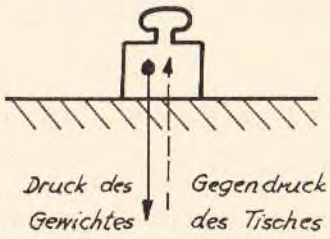


Abb. 59

II. Schwerkraft — Gewicht

Legen wir einen Stein auf die flache Hand, spüren wir, wie der Stein auf die Hand drückt. Wir müssen eine Kraft aufwenden, um den Stein zu unterstützen, d. h. um ihn in einer bestimmten Höhe zu halten. Jeder Körper, in unserem Beispiel der Stein, übt auf eine Unterlage einen **Druck** aus (Abb. 60a); **jeder Körper ist schwer.**

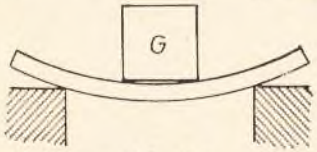


Abb. 60a

Hängen wir ein Metallstück an einer Schnur auf, wird die Schnur straff nach unten gezogen; der Körper übt auf seine Aufhängung einen **Zug** aus (Abb. 60b).

Abb. 60b

Wird die Schnur mit einer Schere durchgeschnitten, fällt das Metallstück zur Erde (= Fall). Alle irdischen Körper, die nicht unterstützt oder aufgehängt sind, fallen zur Erde (Abb. 60c).

Abb. 60c

*) Wie bereits unter I 3 näher ausgeführt, soll in den praktischen Beispielen für „F" die Maßeinheit „kg" und nicht „kp" verwendet werden.

Die Kraft, die zum Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, ist die Anziehungskraft der Erde, die Schwerkraft genannt wird. Alle irdischen Körper unterliegen der Schwerkraft, sie sind schwer und haben ein Gewicht.

> **Gesetz:** Alle irdischen Körper haben das Bestreben, sich dem Mittelpunkt der Erde zu nähern, sie sind schwer.

Die **Wirkungen der Schwerkraft** sind **Druck, Zug und Fall.** Wir nennen den Druck oder Zug, den ein Körper nach unten ausübt, **sein Gewicht;** das Gewicht eines Körpers ist also eine Kraft.

Das Gewicht ist je nach **Art und Größe der Körper sehr verschieden. Körper verschiedener Art, aber gleichen Volumens** (gleicher Größe) **sind verschieden schwer.** Diese Eigenart ist eine **Stoffkonstante** und wird ausgedrückt durch das **Artgewicht** oder das **spezifische Gewicht** der Körper, das durch das **Gewicht von 1 cm³ des Stoffes** gegeben ist. Das Artgewicht wird mit γ bezeichnet, seine Maßeinheit ist $\frac{g}{cm^3}\left[\frac{p}{cm^3}\right]$

Die Anziehungskraft der Erde wirkt nicht nur auf die Körper, die sich unmittelbar auf der Erdoberfläche befinden; sie wirkt auf alle Körper, die im sogenannten **Schwerefeld der Erde** sind. Aus diesem Grunde kreisen der Mond (natürlicher Erdtrabant) und die künstlichen Erdtrabanten der Jetztzeit (Raketengeschosse) um die Erde, und daher ist es für die Rakentenforscher verhältnismäßig schwierig, Raketen aus dem Schwerefeld der Erde hinauszuschießen.

Die **Anziehungskraft herrscht zwischen allen Körpern,** gleichgültig, ob sie sich im Schwerefeld der Erde befinden oder nicht. So erklärt sich auch die Erscheinung der Adhäsion, nämlich der Kraft, die zwei verschiedene Stoffe (z. B. Glas und Wasser) aneinanderhaften läßt. Alle Planeten unseres Sonnensystems unterliegen der Anziehungskraft der Sonne, weil sie sich im **Schwerefeld der Sonne** befinden. Ganz allgemein kann demnach nicht nur von der Anziehungskraft der Erde, vielmehr muß von der **gegenseitigen Anziehungskraft der Massen** (der *Massen-Anziehung*) gesprochen werden; dabei ist stets davon auszugehen, daß **die größere Masse die kleinere anzieht,** wenn beide frei beweglich sind.

III. Zusammenhänge zwischen Kraft und Masse

Die Ursache einer Bewegung ist immer eine Kraft. Eine gleichbleibende Kraft erteilt einem Körper eine gleichbleibende Beschleunigung*), die um so größer

*) Die Geschwindigkeit eines Körpers ist die Weglänge, die der Körper in einer bestimmten Zeiteinheit (z. B. in einer Sekunde = 1 s) zurücklegt; die Beschleunigung ist dagegen der Geschwindigkeitszuwachs je Zeiteinheit (je Sekunde) und wird in Metern

je Sekunde² $= \frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$ gemessen

fernmeldelehrling.de

ist, je größer die Kraft ist. Ein Körper setzt einer Beschleunigung immer einen Trägheitswiderstand entgegen, der nach dem Reaktionsgesetz in seiner Größe der auf ihn wirkenden Kraft gleich ist.

Isaak Newton stellte als erster Beziehungen zwischen Kraft und Beschleunigung auf und erhielt dabei gleichzeitig ein Maß für die **Masse eines Körpers.** In der Physik beinhaltet der Begriff der Masse **zwei Eigenschaften** jedes Körpers, nämlich die Eigenschaften **„schwer"** und **„träge"**. Mit einer auf einen Körper wirkenden Kraft F und der von dieser Kraft erzeugten Beschleunigung a steht die Masse in der Beziehung:

$$\text{Masse} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}}$$

$$m = \frac{F}{a} = F \cdot a^{-1}$$

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

$$F = m \cdot a$$

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$$

$$a = \frac{F}{m} = F \cdot m^{-1}$$

Bei frei fallenden Körpern ist das Gewicht die Kraft (Schwerkraft), die der Masse eine Beschleunigung erteilt. **Die Beschleunigung, die ein frei fallender Körper durch die Anziehungskraft der Erde erfährt, wird Erdbeschleunigung g genannt.**

Die Erdbeschleunigung ist nicht an allen Punkten der Erde gleich groß, sie nimmt vielmehr von den Polen ($9{,}83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) zum Äquator ($9{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) hin ab, weil die Erde an den Polen abgeplattet ist und dadurch die Poloberfläche geringeren Abstand vom Erdmittelpunkt hat und weil die Zentrifugalbeschleunigung*), die der Erdbeschleunigung entgegengerichtet ist, zum Äquator hin zunimmt.

In unseren Breitengraden beträgt die Erdbeschleunigung $9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die Erdbeschleunigung nimmt mit zunehmender Höhe ab, in der Mondentfernung beträgt sie z. B. nur noch $0{,}27 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

Wenden wir das Newtonsche Kraftwirkungsgesetz auf das Gewicht G eines Körpers der Masse m an, so gilt:

*) Zentrifugalbeschleunigung = Beschleunigung, bedingt durch die Fliehkraft, die infolge der Erdumdrehung auftritt.

$$\text{Gewicht} = \text{Masse} \cdot \text{Erdbeschleunigung}$$

$$G = m \cdot g$$

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Erdbeschleunigung}}$$

$$m = \frac{G}{g} = G \cdot g^{-1}$$

Die Masse eines Körpers ist das gleichbleibende Verhältnis des Körpergewichts zur Erdbeschleunigung. Wird die Erdbeschleunigung geringer, z. B. am Äquator, wird auch das Gewicht eines Körpers entsprechend geringer, seine träge Masse bleibt aber unverändert.

Meßverfahren für Kraft und Masse:

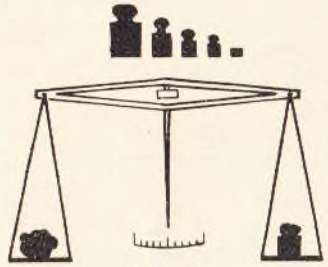


Abb. 61

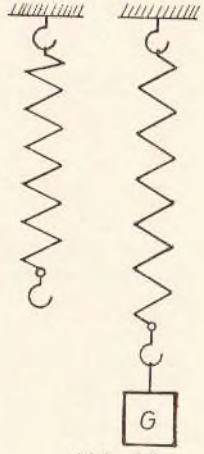


Abb. 62

Zur Messung der Schwerkraft und der Masse werden dieselben Hilfsmittel benutzt, nämlich eine beliebige **Waage** und ein **Wägesatz. Die Massen zweier Körper sind gleich, wenn die Körper an demselben Ort gleiche Gewichte haben,** die Körper werden dann von der Erde mit gleichen Kräften angezogen. Bei den **gleicharmigen Hebelwaagen** (auch Balkenwaagen genannt) (Abb. 61) wird das **Gleichgewicht** nach dem **Hebelgesetz** durch das Gewicht des zu wiegenden Körpers einerseits und das Gewicht der geeichten Gewichtsstücke andererseits hergestellt. **Ist die Waage im Gleichgewicht, dann haben Körper und Gewichtsstücke gleiche Massen und gleiches Gewicht.**

Neben diesem Meßverfahren kann die Größe der Kraft mit der **Elastizität** einiger fester Körper gemessen werden, weil die **elastische Formveränderung** (Dehnung bzw. Verkürzung) **im Verhältnis der Belastung wächst.** Abb. 62 zeigt eine Zugfederwaage; besonders deutlich ist die Dehnung der Schraubenfeder aus Stahl oder

fernmeldelehrling.de

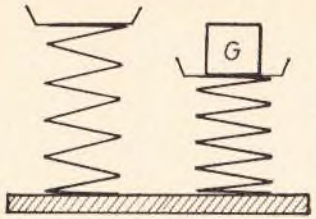


Abb. 63

Messing zu erkennen. Bei der in Abb. 63 wiedergegebenen Federwaage wird die Feder zusammengedrückt (Druckfederwaage). Wäre die Anziehung der Erde nur halb so groß, würde die Feder nur halb so viel zusammengedrückt oder gedehnt werden. **Mit der Federwaage wird also das Gewicht eines Körpers bestimmt, mit einer Hebelwaage dagegen seine Masse.**

IV. Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften mit demselben Angriffspunkt

Wirken auf einen Punkt eines Körpers gleichzeitig mehrere Kräfte unterschiedlicher Größe und Richtung ein, können diese durch eine einzige Kraft ersetzt werden, die allein dieselbe Wirkung verursacht wie die einzelnen Kräfte zusammen. Werden Größe und Richtung der wirkenden Kräfte durch entsprechende Pfeile dargestellt (Vektordiagramm), so ergibt sich aus den einzelnen Kräften die **Gesamtkraft, die Resultierende.** Die **Bewegungsrichtung** des Körpers wird durch die **Richtung der Gesamtkraft** bestimmt, die **Beschleunigung** durch die **Größe der Gesamtkraft.**

Für das Zusammensetzen von Kräften gelten folgende Regeln:

- **a)** Wirken zwei Kräfte in **gleicher Richtung** auf einen Körper ein, so ist die **Gesamtkraft gleich der Summe der Einzelkräfte** (Abb. 64):

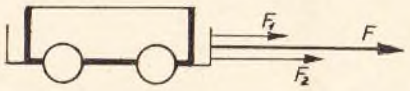


Abb. 64

$$F = F_1 + F_2$$

- **b)** Wirken zwei Kräfte in **entgegengesetzter Richtung** auf einen Körper ein, so ist die **Gesamtkraft gleich der Differenz der Einzelkräfte** (Abb. 65):

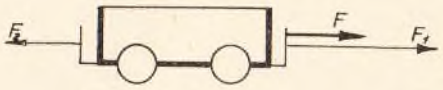


Abb. 65

$$F = F_1 - F_2$$

- **c)** Wirken zwei Kräfte **unter einem Winkel** auf einen Körper ein, wird die **Gesamtkraft durch die Diagonale eines Parallelogramms, des Kräfteparallelogramms** dargestellt (Abb. 66); die Kräfte werden **räumlich addiert.**

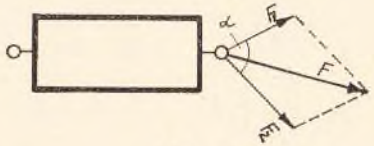


Abb. 66

- **d) Für mehrere Kräfte** (Abb. 67a) **läßt sich die Gesamtkraft finden, indem zunächst zwei Kräfte** (in Abb. 67b F_1 und F_2) **zusammengesetzt werden.** Die so erhaltene Gesamtkraft F' wird mit einer dritten Kraft (hier F_3) wieder zu einem Parallelogramm vereinigt usw. Die Gesamtkraft kann einfacher gefunden werden, **indem die einzelnen Kraftpfeile unter Beibehaltung ihrer Richtung und Größe zu einem Kräftevieleck** (Abb. 67c) **aneinandergereiht werden.** Die Verbindung zwischen **Anfang und Ende des Kräftevielecks stellt die Größe und Richtung der Gesamtkraft dar.**

Allgemein kann also für das Zusammensetzen von Kräften gesagt werden: **Die Gesamtkraft F ist gleich der Summe der Einzelkräfte,** wobei zu berücksichtigen ist, daß die Kräfte gerichtete Größen sind, also räumlich addiert werden müssen:

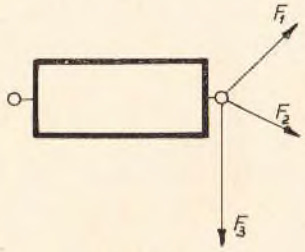


Abb. 67a

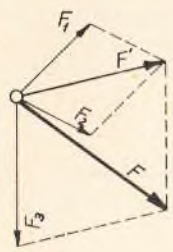


Abb. 67b

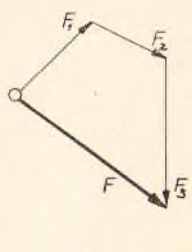


Abb. 67c

- **Bei dynamischen Kraftwirkungen** ist die Bewegung häufig an eine feste Bahn gebunden, deren Richtung keineswegs mit der Kraftrichtung zusammenzufallen braucht. Zum Beispiel greift beim Ziehen eines Schlittens (Abb. 68) die Kraft unter einem Winkel an.

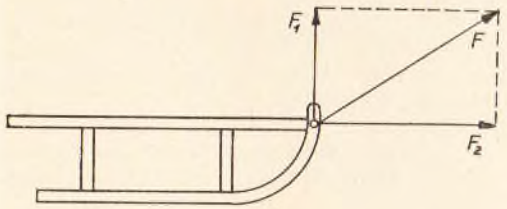


Abb. 68

Ein Teil der Kraft (F_1) ist bestrebt, den Schlitten zu heben, der andere Teil (F_2) ist die Kraft, die den Schlitten vorwärts zieht. **Die Kraft F wird in ihre Teilkräfte oder Komponenten** (F_1 und F_2) **zerlegt.**

Dieses Zerlegen einer gegebenen Gesamtkraft in Teilkräfte trägt oft wesentlich zur Aufklärung komplizierter Kraftwirkungen oder Gleichgewichtslagen bei. **Die Teilkräfte einer in einem Punkt angreifenden Kraft können mit Hilfe des Kräfteparallelogramms gefunden werden.**

fernmeldelehrling.de

Bei der zeichnerischen Darstellung werden durch den Endpunkt der gegebenen Gesamtkraft die Parallelen in Richtung der Wirkungslinien der Teilkräfte gezogen, wodurch die Größe der Seitenkräfte gewonnen wird (Abb. 69).

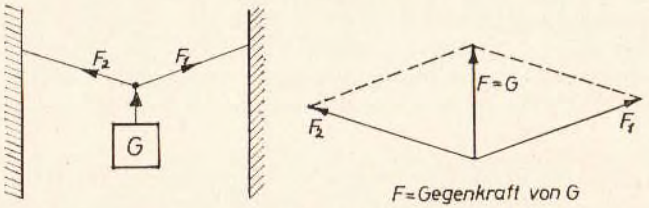


Abb. 69

Beispiele:

1) Auf einen Leitungsmast (Abb. 70a) wirken Leitungszugkräfte von $F_1 = 300$ kg* und $F_2 = 400$ kg unter einem Winkel von 60° zueinander. Wie groß ist die Gesamtkraft? In welcher Richtung wäre eine Strebe oder ein Anker anzubringen? (Lösung zeichnerisch!)

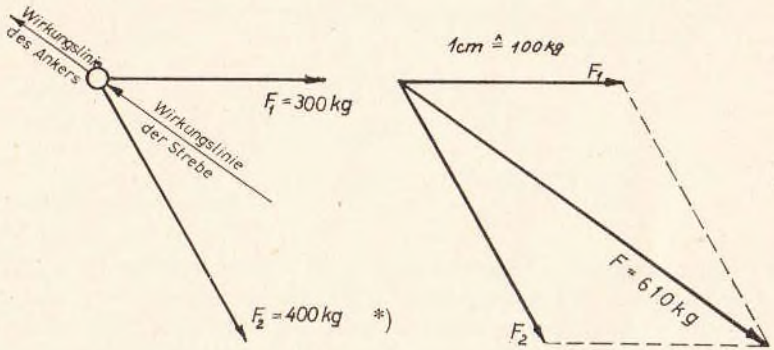


Abb. 70a Abb. 70b

Eine Strebe wird auf Druck beansprucht und nimmt daher die Gesamtkraft $F = 610$ kg auf, wenn sie in Richtung der Kraft F aufgestellt wird. Ein Anker wird auf Zug beansprucht und nimmt die Gesamtkraft F auf, wenn er entgegen der Kraftrichtung F aufgestellt wird.

2) Auf einen Leitungsmast wirken die Leitungskräfte $F_1 = 50$ kg, $F_2 = 80$ kg, $F_3 = 100$ kg und $F_4 = 60$ kg nach Abbildung 71a. Wie groß ist die Gesamtzugkraft? In welcher Richtung ist Strebe oder Anker anzubringen? (Lösung nur zeichnerisch!)

Die Gesamtzugkraft F beträgt nach Abb. 71b 108 kg. Die Richtung der Strebe oder des Ankers muß in der Wirkungslinie der Gesamtzugkraft liegen; die Wirkungslinien von Anker und Strebe sind in Abb. 71a eingezeichnet.

*) Für „F" ist auch in diesen praktischen Beispielen die Maßeinheit „kg" und nicht „kp" verwendet worden.

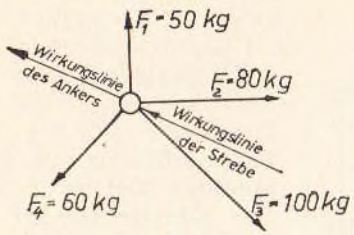


Abb. 71a

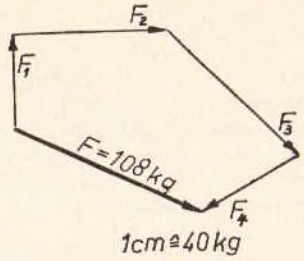


Abb. 71b

3) Ein A-Mast hat die Last von 200 kg zu tragen. Welche Last entfällt auf jeden seiner Schenkel, wenn diese einen Winkel von 20° einschließen? (Lösung zeichnerisch!)

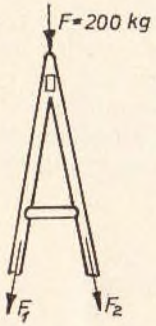


Abb. 72a

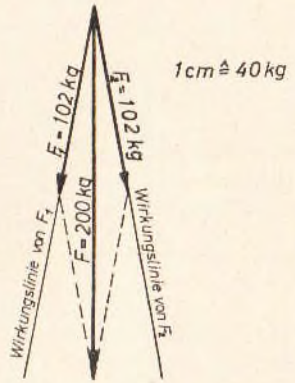


Abb. 72b

Jeder Schenkel hat eine Last von 102 kg zu tragen ($F_1 = F_2 = 102$ kg).

V. Gleichgewicht der Körper

1. Gleichgewicht der Kräfte und der Drehmomente

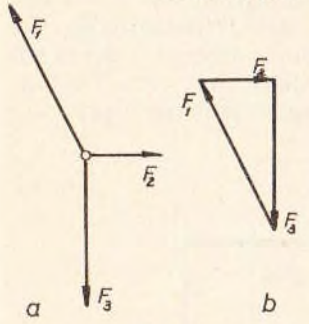


Abb. 73

Zunächst müssen wir untersuchen, in welcher Weise Kräfte auf einen Körper einwirken können und unter welchen Bedingungen Kräfte im Gleichgewicht sind. Es kommt bei einem Körper nicht nur darauf an, wie groß eine Kraft ist und in welcher Richtung sie auf ihn wirkt, sondern auch, an welchem Punkt des Körpers die Kraft angreift. **Kräfte, die in demselben Punkt eines Körpers angreifen, können im Gleichgewicht stehen, wenn die Gesamtkraft im Kräftevieleck Null ist** (Abb. 73).

fernmeldelehrling.de

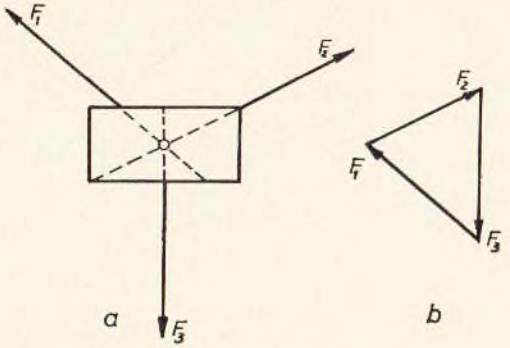


Abb. 74

Ferner können mehrere Kräfte an einem Körper auch dann im **Gleichgewicht** sein, **wenn die Verlängerung ihrer Richtungspfeile, d. h. ihre Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden und die Gesamtkraft Null ist** (Abb. 74). Der **Schnittpunkt der Wirkungslinien** gilt dann als der **gemeinsame Angriffspunkt der Kräfte.** Jede Kraft kann also entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne daß sich ihre Wirkung verändert.

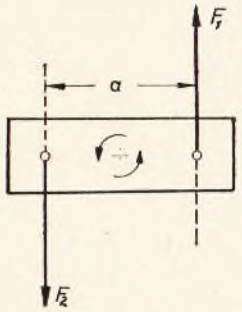


Abb. 75

Haben zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte nicht dieselbe Wirkungslinie, stehen sie nicht mehr im Gleichgewicht. Zwei solche Kräfte werden ein **Kräftepaar** genannt; ein Kräftepaar übt auf den Körper ein **Drehmoment** aus, weil es einen Körper zu drehen versucht (in Abb. 75 im Sinne der gekrümmten Pfeile).

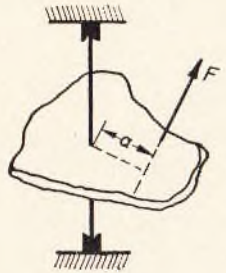


Abb. 76

Ist ein **Körper drehbar gelagert,** übt **jede einzelne Kraft ein Drehmoment auf die Drehachse aus** (Abb. 76). Die **Größe des Drehmomentes** wird bestimmt durch die **Größe der Kraft** und durch den **senkrechten Abstand** a **der Wirkungslinien der Kräfte bzw. den senkrechten Abstand** a **der Kraft vom Drehpunkt (Drehachse).** Aus dem Produkt dieser beiden Größen ergibt sich die Größe des Drehmomentes M:

Drehmoment = Kraft · Abstand
$M = F \cdot a$

Dabei ist zu beachten, daß neben der Größe des Drehmomentes auch dessen Richtung wesentlich ist. Ein Drehmoment wird also ähnlich wie die Kraft erst durch Größe und Richtung genau festgelegt; **ein Drehmoment ist eine gerichtete Größe.** Wie bei den Kräften können auch mehrere Drehmomente zu einem Gesamtdrehmoment zusammengesetzt werden. Mehrere Drehmomente können sich gegenseitig aufheben (Abb. 77). Demnach können nicht nur Einzelkräfte, sondern auch **Drehmomente an einem Körper im Gleichgewicht sein.**

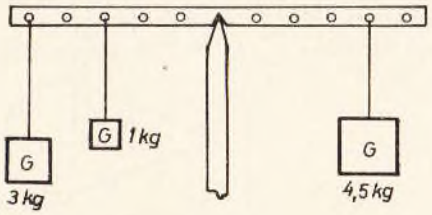


Abb. 77

Als allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht der Körper gilt:

Alle Einzelkräfte und außerdem alle Drehmomente, die auf einen Körper wirken, müssen miteinander im Gleichgewicht stehen. Bleibt nach dem Zusammensetzen aller Einzelkräfte und Drehmomente noch eine Einzelkraft oder ein Drehmoment übrig, befindet sich der Körper nicht mehr im Gleichgewicht. Die **Einzelkraft** bewirkt eine **beschleunigte fortschreitende Bewegung** und das **Drehmoment** eine **beschleunigte Drehbewegung** des Körpers.

2. Schwerpunkt und Gleichgewicht

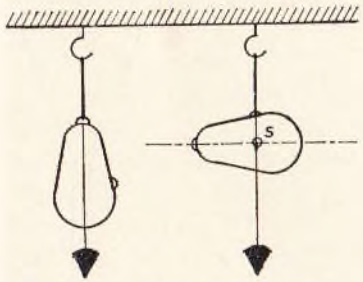


Abb. 78

Der Schwerpunkt eines unregelmäßigen, flächenhaften Körpers kann durch einen einfachen Versuch bestimmt werden, indem der Körper nacheinander in zwei verschiedenen Punkten an einem Faden aufgehängt wird. Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Fadenrichtungen (Schwerelinien) (Abb. 78). Der Schwerpunkt regelmäßiger Flächen und Körper ist durch Zeichnung leicht zu finden. [Beispiele siehe Abbildungen 79a bis d — beim Dreieck (Abb. 79c) ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden —].

Abb. 79a

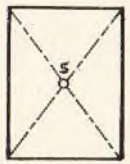


Abb. 79b

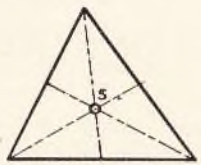


Abb. 79c

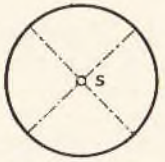


Abb. 79d

fernmeldelehrling.de

3. Gleichgewichtsarten

- Ist ein **Körper in seinem Schwerpunkt unterstützt,** ist er **in jeder Lage im Gleichgewicht.** Der Körper befindet sich dann in der **stetigen, unterschiedslosen oder indifferenten Gleichgewichtslage** (Abb. 80).

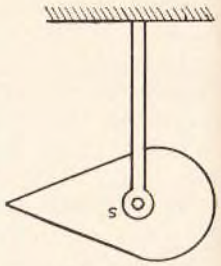


Abb. 80

- Wird der **Körper in einem anderen Punkt** als dem Schwerpunkt **unterstützt,** dreht er sich und pendelt hin und her, bis **sein Schwerpunkt genau lotrecht unter dem Unterstützungspunkt** liegt (Abb. 81). Der Körper befindet sich dann in der **sicheren oder stabilen Gleichgewichtslage.**

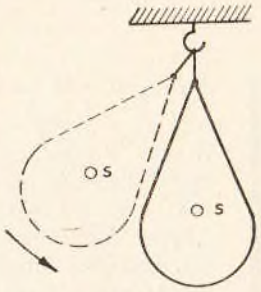


Abb. 81

- Ein **Körper** ist aber auch im Gleichgewicht, wenn **sein Unterstützungspunkt lotrecht unter dem Schwerpunkt liegt** (Abb. 82). Der Körper nimmt aber umkippend die stabile Lage ein, wenn der Schwerpunkt aus dieser lotrechten Geraden gerät. Diese **künstlich herbeigeführte Lage ist die unsichere oder labile Gleichgewichtslage.**

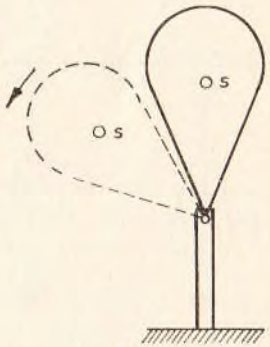


Abb. 82

4. Standfestigkeit

Wird ein Körper nicht in einem einzigen Punkt, sondern in einer Fläche unterstützt, ist für physikalische und praktische Betrachtungen seine **Standfestigkeit** wichtig.

Ein Körper steht fest, wenn das Lot vom Schwerpunkt durch die Unterstützungsfläche geht (Abb. 83a).

Geht das **Lot** vom Schwerpunkt seitlich **an der Unterstützungsfläche vorbei, bleibt der Körper nicht in dieser Lage stehen,** er fällt um (Abb. 83b).

Die Standfestigkeit ist um so größer, je weiter sich die Unterstützungsfläche nach allen Seiten erstreckt und je näher der Schwerpunkt bei der Unterstützungsfläche liegt (Abb. 83c).

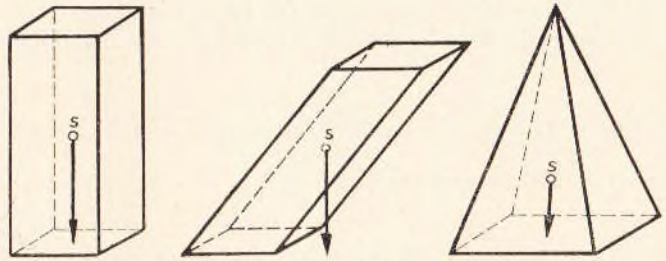


Abb. 83a Abb. 83b Abb. 83c

VI. Bewegung der Körper

1. Allgemeines über den Bewegungszustand eines Körpers

Wenn wir von der **Bewegung** eines Zuges, eines Autos, eines Flugzeuges, eines fallenden Gegenstandes usw. sprechen, denken wir an den **Weg,** der zurückgelegt wird, und an die **Zeit,** die benötigt wird, um an das Ziel zu gelangen. **Alle bewegten Körper verändern ihren Ort,** sie nehmen nach und nach verschiedene Stellungen im Raum ein.

2. Trägheit, Beharrungsvermögen

Wir wissen, daß ein Körper nur durch eine Kraft bewegt werden kann, und ein sich bewegender Körper (z. B. rollende Kugel) nach einiger Zeit von selbst wieder in den Ruhestand zurückkehrt. Die Rückkehr in den **Ruhezustand** tritt nur deshalb ein, weil eine die Bewegung **hindernde** Kraft (Reibung) einwirkt. Andernfalls würden die sich bewegenden Körper ewig in Bewegung bleiben.

Dieses Beispiel zeigt uns, daß jedem Körper eine gewisse **Trägheit** oder ein **Beharrungsvermögen** innewohnt, das sich bei jeder **Zustandsänderung** bemerkbar macht.

Der englische Physiker Newton (sprich: njuten) hat daher folgenden Satz aufgestellt:

> Jeder Körper verharrt so lange im Zustand der Ruhe oder geradlinig gleichförmiger Bewegung, bis er durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

fernmeldelehrling.de

3. Gleichförmige Bewegung

- **Die Bewegung eines Körpers ist gleichförmig, wenn der Körper in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt.**

Die **Geschwindigkeit** v ist die Größe, die angibt, **wie schnell ein Körper seinen Ort** (seine Stellung im Raum) **verändert.** Die **Geschwindigkeit** v ist bei gleichförmiger Bewegung der **Weg** s, den ein Körper in einer **Zeiteinheit** t zurücklegt.

Legt ein Körper in 12 s einen Weg von 72 m zurück, so legt er in 1 s $\frac{72}{12} = 6$ m zurück; seine Geschwindigkeit beträgt $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Geschwindigkeit v eines Körpers wird also gefunden, indem der Weg s durch die Zeit t geteilt wird:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

$$v = \frac{s}{t}$$

Die **Maßeinheit der Geschwindigkeit** wird aus den **Grundgrößen** der **Zeit** und der **Länge** abgeleitet:

$$v = \frac{s}{t} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$$

Die Maßeinheit der Geschwindigkeit ist **Meter je Sekunde.**

Durch Umstellen der Gleichung lassen sich der Weg und die Zeit berechnen.

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

$$s = v \cdot t$$

$$\text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Für schnelle Bewegungen wird als Geschwindigkeitsmaß der Weg benutzt, der in einer willkürlich gewählten Zeitspanne, z. B. in einer Minute, in einer Stunde, in einem Jahr zurückgelegt wird (wie Kilometer je Stunde).

Beispiele:

1. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Lastenaufzug, der in der Zeit von 2 min 12 s eine Höhe von 66 m überwindet?

$$v = \frac{s}{t} \qquad / \ t = 2 \text{ min } 12 \text{ s} = 2 \cdot 60 + 12 = 132 \text{ s}$$

$$= \frac{66}{132}$$

$$v = 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Lastenaufzug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2. Um wieviel Meter bewegt sich ein Förderband in der Zeit von 1 min 24 s weiter, wenn seine Geschwindigkeit $0{,}15\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?

$$s = v \cdot t \qquad / \ t = 1 \text{ min } 24 \text{ s} = 1 \cdot 60 + 24 = 84 \text{ s}$$

$$= 0{,}15 \cdot 84$$

$$s = 12{,}6 \text{ m}$$

Das Förderband bewegt sich in 1 min 24 s um 12,6 m weiter.

3. In welcher Zeit laufen von einer Riemenscheibe 150 m Riemen ab, wenn die Riemengeschwindigkeit $7{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt?

$$t = \frac{s}{v}$$

$$= \frac{150}{7{,}5}$$

$$t = 20 \text{ s}$$

4. Ungleichförmige Bewegung

Eine Bewegung ist nur selten wirklich gleichförmig, z. B. wird ein Radfahrer beschleunigt oder verzögert fahren, wenn Gefälle oder Steigungen, Kurven oder Hindernisse vorhanden sind, der Wegezustand ihn also zu Geschwindigkeitsänderungen zwingt.

- **Die Bewegung eines Körpers ist ungleichförmig,** wenn der Körper **in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten ungleiche Wege**

fernmeldelehrling.de

zurücklegt. Die Bewegung gilt als **ungleichförmig beschleunigt,** wenn die zurückgelegten Wege in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten größer werden (Geschwindigkeitszuwachs); sie ist **ungleichförmig verzögert,** wenn die zurückgelegten Wege in gleichen aufeinanderfolgenden Zeiten kleiner werden (Geschwindigkeitsabnahme).

Die **Beschleunigung** a einer Bewegung ist gegeben durch das **Verhältnis des Geschwindigkeitsunterschieds** $\Delta v = v - v_0$*) **und der Zeit** t, in der sie erfolgt.

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsunterschied}}{\text{Zeitunterschied}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v_0}{t}$$

In der Gleichung ist Δv der **Geschwindigkeitsunterschied,** der sich aus der Differenz $v - v_0$ errechnet, worin v die **Endgeschwindigkeit** (am Ende der Meßzeit t) und v_0 die **Anfangsgeschwindigkeit** (am Anfang der Meßzeit t) ist.

5. Freier Fall

Lassen wir **verschiedene Körper,** z. B. ein Blatt, ein Stückchen Kork und eine Bleikugel aus derselben Höhe frei fallen, so stellen wir fest, daß die Körper **nicht gleich schnell fallen.** Führen wir den Versuch dagegen in einem luftleeren Raum durch, bemerken wir, daß alle Körper gleich schnell fallen, d. h. daß die Beschleunigung der Körper im luftleeren Raum stets gleich groß ist. **Im luftleeren Raum fallen alle Körper gleich schnell.** Der **Fall eines Körpers ohne Bewegungswiderstand** wird als **freier Fall** bezeichnet. **Die Beschleunigung, die ein Körper beim Fall durch die Anziehungskraft der Erde erfährt, wird Erdbeschleunigung** g **genannt.**

6. Kreisbewegung

Nach dem Trägheitsgesetz bewegt sich ein Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradeaus, solange keine Kraft auf ihn einwirkt. Soll er sich **gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegen,** so muß auf den Körper **dauernd eine Kraft einwirken,** die ihn zwingt, die Kreisbahn einzuhalten. Wird z. B. ein Körper durch einen Faden festgehalten und so zur kreisförmigen Bewegung gezwungen, so wird durch den Faden **eine nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete Kraft** auf den Körper ausgeübt; diese Kraft ist die **Zentripetalkraft oder Zentralkraft.**

*) Δ = Delta, großer griechischer Buchstabe, mathematisches Kurzzeichen für „Differenz"; lies hier: Δv = Geschwindigkeitsunterschied.

Die **Kraft,** die einen gleichförmig auf einem Kreis bewegten Körper **nach außen zieht,** wird **Fliehkraft oder Zentrifugalkraft** genannt.

VII. Arbeit und Leistung

1. Mechanische Arbeit

Zieht ein Pferd einen Wagen eine bestimmte Strecke, so leistet es eine **Arbeit.** Wird ein Stein gehoben oder eine Schraubenfeder gespannt, so muß eine Kraft wirken, wodurch der Körper veranlaßt wird, sich längs eines Weges zu bewegen.

Eine mechanische Arbeit wird verrichtet, wenn längs einer Wegstrecke durch eine Kraft ein Widerstand überwunden wird.

Die Arbeit ist um so größer, je größer die erforderliche Kraft und je weiter der Weg ist, längs dem die Kraft wirkt.

Die **Arbeit** A einer Kraft F ist gleich dem **Produkt aus der Kraft** F **und dem in ihrer eigenen Richtung zurückgelegten Weg** s.

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft mal Weg}$$

$$A = F \cdot s$$

Die **Maßeinheit der Arbeit** wird aus der **Grundgröße der Kraft** und aus der **Grundgröße der Länge** (Grundgröße des Weges) abgeleitet:

$$A = F \cdot s \text{ (kg} \cdot \text{m} = \text{m} \cdot \text{kg} = \textbf{mkg)}$$

Die Maßeinheit der Arbeit ist das **Meterkilogramm,** also die Arbeit, die verrichtet wird, wenn ein Widerstand von 1 kg längs eines Weges von 1 m überwunden wird.

Beispiele:

1. Ein beladener Wagen wird mit einer Kraft $F = 25$ kg längs einer Strecke $s = 800$ m bewegt. Welche Arbeit wird verrichtet?

$$A = F \cdot s$$
$$A = 25 \cdot 800$$
$$A = 20000 \text{ mkg}$$

2. Durch eine Kette mit der Zugkraft $F = 20$ kg wird in 1 Minute eine Arbeit von 6000 mkg an eine Arbeitsmaschine abgegeben. Welche Kettenlänge läuft in dieser Zeit ab?

fernmeldelehrling.de

$$A = F \cdot s$$

$$s = \frac{A}{F}$$

$$s = \frac{6000}{20}$$

$$s = 300 \text{ m (Kettenlänge)}$$

2. Mechanische Leistung

Wird irgendeine Arbeit verrichtet, so ist es für die Größe der Arbeit ohne Bedeutung, in welcher Zeit sie verrichtet wird. Im täglichen Leben, vor allem aber in der Technik, kommt es nicht nur darauf an, daß die Arbeit verrichtet wird, vielmehr wird eine Größe benötigt, die angibt, in welcher Zeit die Arbeit getan wird. Ein Arbeiter, der 20 m Kabelgraben in 5 Std. aushebt, „leistet" mehr als ein anderer, der für die gleiche Arbeit 10 Std. benötigt. Um verschiedene Arbeiter, vor allem verschiedene Motoren, miteinander vergleichen zu können, wurde der Begriff der **Leistung** eingeführt.

- **Leistung ist die in einer Zeiteinheit** (im allgemeinen in einer Sekunde) **verrichtete Arbeit.**

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$$

$$P = \frac{A}{t}$$

oder

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

Die mechanische Leistung ist gleich dem Produkt aus Kraft mal Weg dividiert durch die Zeit.

Die **Maßeinheit der Leistung** wird aus der **Grundgröße der Zeit** und aus der **abgeleiteten Größe der Arbeit** abgeleitet:

$$P = \frac{A}{t}\left[\frac{\text{mkg}}{\text{s}} \text{ oder } \frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right]$$

Die Maßeinheit der Leistung ist das **Meterkilogramm je Sekunde** oder das Kilogrammeter je Sekunde. Es ist die Leistung, wenn ein Widerstand von 1 kg längs eines Weges von 1 m in der Zeit von 1 s überwunden wird.

Für größere Leistungen ist die Maßeinheit die **Pferdestärke (PS):**

$$1 \text{ PS} \triangleq 75 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

$$1 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \triangleq 0{,}0133 \text{ PS}$$

Die mittlere Leistung eines Menschen beträgt etwa $\frac{1}{10}$ PS, die des Pferdes tatsächlich nur $\frac{2}{3}$ PS; kurzzeitig kann ein Pferd 1 PS, der Mensch $\frac{1}{3}$ PS leisten.

Beispiele:

1. Eine Last von 1,5 t soll in 50 s 18 m gehoben werden. Welche Mindestleistung in $\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$ und PS muß der eingesetzte Kran haben?

$$P = \frac{F \cdot s}{t} \qquad F = 1{,}5 \text{ t} = 1500 \text{ kg}$$

$$P = \frac{1500 \cdot 18}{50}$$

$$P = 540 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

Lösung nach der Dimensionsgleichung:

$$1 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \triangleq 0{,}0133 \text{ PS}$$

$$540 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \triangleq 540 \cdot 0{,}0133 = 7{,}182 \text{ PS}$$

$$P \approx 7{,}2 \text{ PS}$$

2. Welche Leistung in PS besitzt eine Pumpe, die in 1 Stunde einen 30 m hoch gelegenen Wasserbehälter von 15 m³ Inhalt füllt?

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

$$P = \frac{15000 \cdot 30}{3600} = \frac{1500}{12}$$

$$P = \frac{500}{4}$$

$$P = 125 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

F: 1 dm³ Wasser $\triangleq$ 1 kg

1 m³ Wasser $\triangleq$ 1000 kg

15 m³ Wasser $\triangleq$ 15000 kg

$F = 15000$ kg

t: 1 h $\triangleq$ 3600 s

$t = 3600$ s

fernmeldelehrling.de

Lösung nach der Dimensionsgleichung

$$1\ \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \mathrel{\hat{=}} 0{,}0133\ \text{PS}$$

$$125\ \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \mathrel{\hat{=}} 125 \cdot 0{,}0133\ \text{PS}$$

$$P = 1{,}66\ \text{PS}$$

3. Begriff der Energie

Energie ist aufgespeicherte Arbeit.

Fällt z. B. der Lastklotz eines Rammbäres aus einer bestimmten Höhe herab, so wird bei jedem Schlag ein Pfahl weiter in den Boden getrieben (Abb. 84). Die geleistete Arbeit des Lastklotzes ist um so größer, je größer das gehobene Gewicht und der Hub sind (das ist die Höhe, um die der Lastklotz gehoben worden ist). Solange der Klotz oben eingeklemmt ist, ist in ihm Arbeit ($A = F \cdot s$) gespeichert. Wird der Lastklotz freigegeben, fällt er herab, und die in ihm gespeicherte Arbeit wird frei; die **Energie der Lage** ($\mathbf{A} = F \cdot s$) wird in **Energie der Bewegung** umgewandelt.

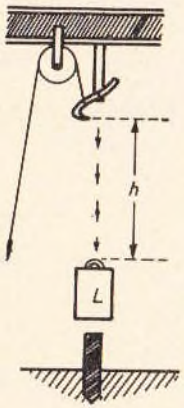


Abb. 84

Zur genauen Berechnung erhält man aus der Formel $A = F \cdot s$ für die Bewegungsenergie:

$$\mathbf{A} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Diese Formel lehrt uns, daß die Bewegungsenergie mit der Masse und mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst; wenn also die Geschwindigkeit verdreifacht wird, so wächst die Bewegungsenergie auf das $3^2 = 9$fache der ursprünglichen Größe an.

Das Vermögen, Arbeit zu verrichten, wird Energie genannt. Energie kann immer wieder in andere Energieformen umgewandelt werden: z. B. mechanische Energie in Wärmeenergie oder in elektrische Energie, elektrische Energie in mechanische, chemische oder Wärmeenergie. Die verbrauchte Energie der einen Form ist genau so groß wie die gewonnene Energie der anderen Formen. Es ist dabei nicht zu verhindern, daß ein Teil der verbrauchten Energie in nutzlose Wärmeenergie umgewandelt wird.

4. Der Wirkungsgrad

Infolge der Verluste ist bei Maschinen die **gewonnene Arbeit oder abgegebene Energie immer geringer als die aufgewendete Arbeit oder zugeführte Energie.** Es ist aber auch die abgegebene Leistung kleiner als die zugeführte Leistung. **Das Verhältnis zwischen gewonnener Arbeit A_{gew} und aufgewendeter Arbeit A_{auf} ist eine Maßzahl für den Wirkungsgrad η*) einer Maschine:**

*) η; sprich Eta, kleiner griechischer Buchstabe; Formelzeichen für den Wirkungsgrad.

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{gewonnene Arbeit}}{\text{aufgewendete Arbeit}}$$

$$\eta = \frac{A_{\text{gew}}}{A_{\text{auf}}}$$

Es ist: $A = P \cdot t$

daraus folgt: $\eta = \dfrac{A_{\text{gew}}}{A_{\text{auf}}} = \dfrac{P_{\text{ab}} \cdot \not{t}}{P_{\text{zu}} \cdot \not{t}} = \dfrac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

Der Wirkungsgrad η ist eine **Verhältniszahl und daher dimensionslos;** er kann entweder als **echter Bruch** (z. B. $\eta = \frac{4}{5}$), als **Dezimalbruch** (z. B. $\eta = 0{,}8$) oder in **Prozenten** (z. B. $\eta = 80\,\%$) ausgedrückt werden.

Der Wirkungsgrad ist immer kleiner als 1, weil die gewonnene Arbeit nicht größer als die aufgewendete Arbeit werden kann.

Beispiele:

1. Welchen Wirkungsgrad hat eine Arbeitsmaschine, wenn sie mit 4 PS angetrieben wird und 3,2 PS leistet?

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

$$\eta = \frac{3{,}2}{4}$$

$$\eta = 0{,}8 = 80\,\%$$

fernmeldelehrling.de

2. Einer Turbine werden in jeder Sekunde 120 l Wasser von 50 m Gefälle zugeführt. Welche Leistung gibt die Turbine ab, wenn ihr Wirkungsgrad 75% beträgt?

$$P_{zu} = \frac{F \cdot s}{t} \qquad F\text{: } 120 \text{ l Wasser} \mathrel{\hat{=}} 120 \text{ kg}$$

$$P_{zu} = \frac{120 \cdot 50}{1} \qquad F = 120 \text{ kg}$$

$$P_{zu} = 6000 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

$$P_{ab} = P_{zu} \cdot \eta$$

$$P_{ab} = 6000 \cdot 0{,}75 = \frac{6000 \cdot 3}{4} = 1500 \cdot 3$$

$$P_{ab} = 4500 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

3. Eine Pumpe mit einem Wirkungsgrad von 0,70 fördert in jeder Sekunde 20 l Wasser auf 21 m Höhe. Welche Antriebsleistung verlangt die Pumpe?

$$P_{ab} = \frac{F \cdot s}{t} \qquad F\text{: } 20 \text{ l Wasser} \mathrel{\hat{=}} 20 \text{ kg}$$

$$P_{ab} = \frac{20 \cdot 21}{1} \qquad F = 20 \text{ kg}$$

$$P_{ab} = 420 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

$$P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta}$$

$$P_{zu} = \frac{420}{0{,}7}$$

$$P_{zu} = 600 \frac{\text{mkg}}{\text{s}}$$

Lösung nach der Dimensionsgleichung:

$$1 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \mathrel{\hat{=}} 0{,}0133 \text{ PS}$$

$$600 \frac{\text{mkg}}{\text{s}} \mathrel{\hat{=}} 600 \cdot 0{,}0133 = 7{,}98 \text{ PS}$$

$$P_{zu} \approx 8 \text{ PS}$$

D. Einfache Maschinen, Riemen- und Zahnradantriebe

Kräfte, die notwendig sind, eine Arbeit zu verrichten, werden in der Regel durch einfache Geräte, wie Seil, Stange, Rolle, Hebel, schiefe Ebene (geneigte Bahn), übertragen. **Größe, Richtung und Angriffspunkt der Kraft können durch diese Geräte** in zweckmäßiger Weise so **geändert werden,** daß die aufzuwendende Kraft möglichst klein ist.

Durch einfache Maschinen wird **Arbeit nicht gespart,** die Arbeit wird **lediglich umgeformt,** d. h. **Kraft und Weg** werden zweckmäßig **verteilt.** Bekanntlich ist die Arbeit A gleich dem Produkt von Kraft F und Weg s ($A = F \cdot s$). Selbst wenn F kleiner wird, bleibt die Größe des Produkts A erhalten, wenn s entsprechend vergrößert wird. (Wird z. B. F auf den vierten Teil vermindert, muß s viermal so groß werden, damit A gleich groß bleibt.)

Goldene Regel der Mechanik:

Was man an Kraft spart, muß man an Weg zugeben.
Was man an Weg spart, muß man an Kraft zugeben.

Wir unterscheiden vier verschiedene Grundformen der **einfachen Maschinen:**

1. **Seil und Stange**
2. **Rolle und Flaschenzug**
3. **Hebel**
4. **Schiefe Ebene**

- **Alle zusammengesetzten Maschinen lassen sich auf diese einfachen Maschinen zurückführen.**

I. Seil und Stange

Abb. 85
Seil

Abb. 86
Stange

Um den **Angriffspunkt einer Zugkraft verlegen zu können,** werden **Seile** angewendet (Abb. 85).

Mit Hilfe einer **Stange** kann der **Angriffspunkt einer Druckkraft verlegt** werden (Abb. 86). Die Stange kann auch benutzt werden, um den Angriffspunkt einer Zugkraft zu verlegen.

Unverändert bleiben in beiden Fällen **Größe und Richtung der Kraft.**

fernmeldelehrling.de

II. Hebel

Der Hebel ist eine einfache Vorrichtung zum Heben einer Last. Er besteht aus einer **festen Stange, die um einen Punkt drehbar gelagert ist.**

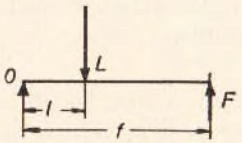


Abb. 87

Nach den Angriffspunkten der Last und der Kraft werden **einseitige und zweiseitige Hebel** unterschieden.

Greifen Kraft und Last auf derselben Hebelseite vom Drehpunkt 0 aus an, ist es ein **einseitiger Hebel** (Abb. 87).

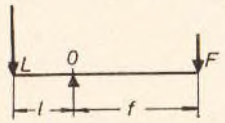


Abb. 88

Greifen Kraft und Last auf verschiedenen Hebelseiten an, ist es ein **zweiseitiger Hebel** (Abb. 88).

Der Abstand der **Kraft** F vom Drehpunkt 0 ist der **Kraftarm** f; der der **Last** L vom Drehpunkt 0 der **Lastarm** l.

Für den Hebel gelten folgende **Gleichgewichtsbedingungen:**

Kraftmoment = Lastmoment
Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm
$$F \cdot f = L \cdot l$$

Je länger der Kraftarm ist, um so geringer kann die Kraft sein.

Die verrichtete Arbeit bleibt unabhängig von der Länge des Kraftarms gleich groß:

$$A = F \cdot s = \text{konstant.}$$

Durch den Hebel wird nur die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflußt, Arbeit wird nicht eingespart.

Durch den gleicharmigen zweiseitigen Hebel wird nur die Richtung der Kraft geändert.

III. Die Rolle

Mit einem Seil (Drahtseil, Tau, Schnur, Kette usw.) kann man den **Angriffspunkt** einer Kraft verlegen. Zieht man das Seil durch einen Ring oder um einen Pfahl herum, so kann man infolge der Biegsamkeit des Seils die Zugrichtung beliebig ändern. Um die dabei auftretende Reibung zu verringern, kann man eine **Rolle** verwenden.

1. Feste Rolle

Bei einer **festen** Rolle greift die **Last** G an dem **einen** und die **Kraft** F am **anderen** Ende des Seils an.

Wenn man die Reibung vernachlässigt, ist

$$F = G$$

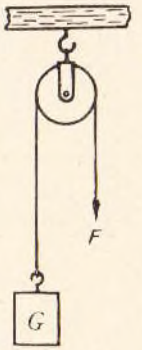


Abb. 90

2. Lose Rolle

Bei einer **losen** Rolle wirkt die Last G an der der Rolle. Die **Kraft** F greift an dem nach **oben** führenden Ende des Seils an. Das **andere** Ende des Seils ist mit einem festen Punkt verbunden. Beide parallelen Seilstücke tragen die **Hälfte** der Last G, so daß bei Vernachlässigung der Reibung die Last mit der Kraft

$$F = \frac{G}{2}$$

hochgezogen werden kann.

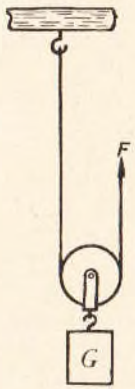


Abb. 91

Dieser Kraftersparnis um die Hälfte steht ein doppelt so großer Weg der Kraft gegenüber.

Vgl. „Goldene Regel der Mechanik".

IV. Der Flaschenzug

Ein Flaschenzug ist eine Zusammensetzung aus **festen** und **losen** Rollen. Dabei verteilt sich die Last gleichmäßig auf sämtliche Seilstücke zwischen den festen

fernmeldelehrling.de

und losen Rollen. Da die Zahl der Seilstücke der Zahl der Rollen (n) entspricht, wird eine Last mit der Kraft

$$F = \frac{G}{n}$$

hochgezogen.

Da es sich auch hier nur um eine Umformung der mechanischen Arbeit handelt, muß die Kraftersparnis mit einem längeren Weg erkauft werden.

Bei einem Flaschenzug mit einer losen Rolle ergibt sich

$$F = \frac{G}{2}$$

(Reibung und Gewicht der losen Rolle vernachlässigt)

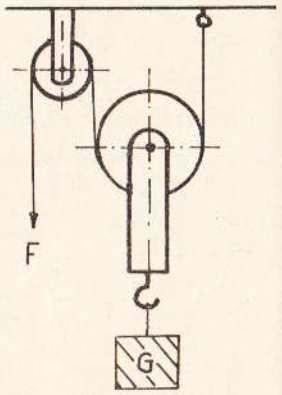


Abb. 92

Bei einem Flaschenzug mit 3 losen Rollen ergibt sich

$$F = \frac{G}{6}$$

(Reibung und Gewicht der losen Rollen vernachlässigt)

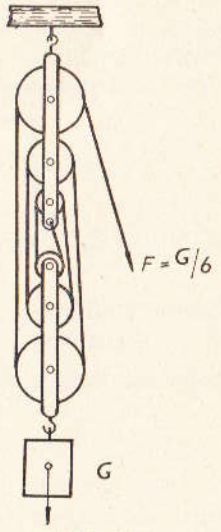


Abb. 93

Beispiel:

Eine Last von 240 kg soll mit einem Flaschenzug aus je 2 festen und 2 losen Rollen hochgezogen werden. Die losen Rollen wiegen zusammen 4 kg.

Welche Kraft ist aufzuwenden?

Geg.: $G = 244$ kg
$n = 4$ Rollen

Ges.: F

Lösung:

$$F = \frac{G}{n}$$

$$F = \frac{244}{4}$$

$$F = 61 \text{ kg}$$

V. Übertragen von Drehbewegungen

Oft wird eine drehende Bewegung von einer Welle auf eine andere übertragen. Diese „Übersetzung" kann durch Riemengetriebe und durch Zahnradgetriebe erfolgen. Dabei findet meistens eine Änderung der Drehzahl statt. Die Drehzahl wird in der Technik mit „n" bezeichnet.
Bei den Zahnrädern und Riemenscheiben sind die Radien der Räder die Hebelarme; auch hier gilt die Gleichung

Kraft · Kraftarm = Last · Lastarm

a) Übersetzung durch Riemenscheiben

In einer bestimmten Zeit läuft die gleiche Länge des gemeinsamen Riemens über den Umfang U der treibenden wie der getriebenen Scheibe. Dabei muß sich die Scheibe mit dem kleineren Durchmesser schneller drehen als die Scheibe mit dem größeren Durchmesser, z. B.

U_1	U_2	n_1	n_2
2 m	1 m	1	2
3 m	1 m	1	3
8 m	2 m	1	4

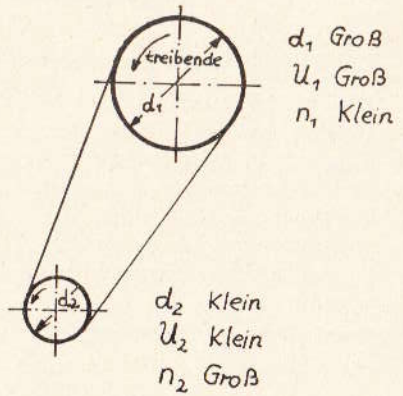


Abb. 94

fernmeldelehrling.de

Das Verhältnis der Drehzahl der treibenden Scheibe zur Drehzahl der getriebenen Scheibe wird Übersetzungsverhältnis genannt:

$$\ddot{u} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

Beispiel:

Ein Motor mit der Drehzahl $n_1 = 1500$ U/min hat eine Riemenscheibe mit dem Durchmesser $d_1 = 60$ mm. Welche Drehzahl n_2 hat die von dem Motor angetriebene Maschine, wenn die Riemenscheibe dieser Maschine einen Durchmesser $d_2 = 300$ mm hat?

Gegeben: $d_1 = 60$ mm

$d_2 = 300$ mm

$n_1 = 1500 \frac{U}{min}$

Gesucht: n_2

Lösung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$$\frac{d_1 \cdot n_1}{d_2} = n_2$$

$$n_2 = \frac{d_1 \cdot n_1}{d_2}$$

$$= \frac{60 \cdot 1500}{300}$$

$$n_2 = 300 \frac{U}{min}$$

b) **Übersetzung durch Zahnräder**

Die Radgrößen der Zahnräder werden in der Regel nicht durch den Umfang oder durch den Durchmesser, sondern durch die Zähnezahlen bestimmt. Somit lautet die Gleichung für das Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

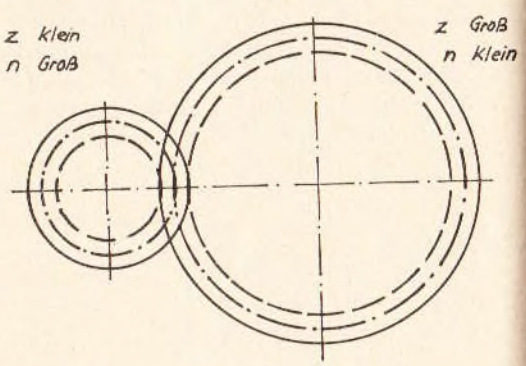


Abb. 95

Beispiel:

Ein Zahnrad mit 110 Zähnen macht 200 U/min und treibt ein Zahnrad mit 40 Zähnen an. Wie groß ist die Drehzahl des getriebenen Rades?

Gegeben: $z_1 = 110$ Zähne

$n_1 = 200 \frac{U}{min}$

$z_2 = 40$ Zähne

Gesucht: n_2

Lösung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{z_1 \cdot n_1}{z_2} = n_2$$

$$n_2 = \frac{z_1 \cdot n_1}{z_2}$$

$$= \frac{110 \cdot 200}{40}$$

$$n_2 = 550 \text{ U/min}$$

V. Schiefe Ebene

1. Allgemeines

Schwere Lasten sind leichter zu heben oder herabzulassen, wenn zwei oder mehrere Bohlen schräg vom Boden an die Umladerampe oder an den Wagen gelegt werden. Die **Kraft,** die jetzt aufzuwenden ist, **ist kleiner als das Gewicht der Last;** ihre Größe hängt von der **Steigung der geneigten Bahn ab. Durch die schiefe Ebene wird die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflußt, Arbeit wird nicht eingespart.**

Die **Kraftersparnis an der geneigten Bahn** kommt **durch** die **Kraftzerlegung** zustande. Die Kraft kann in verschiedenen Richtungen an der Last angreifen.

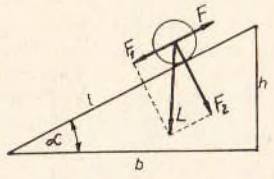


Abb. 96

Das lotrecht nach unten wirkende Gewicht L einer Last kann in **zwei Teilkräfte** F_1 und F_2 zerlegt werden (Abb. 96). Die Teilkraft F_1 hat das Bestreben, den Körper längs der Ebene abwärts zu bewegen (Hangabtrieb), während die Teilkraft F_2 senkrecht auf die Bahn drückt (Druckkraft). Die Größe der Teilkraft F_1 gibt an, wie groß die Gegenkraft F sein muß, um der Last das Gleichgewicht zu halten, wenn F parallel zur Bahn wirkt.

fernmeldelehrling.de

Das Kräftedreieck aus L, F_1 und F_2 ist dem Dreieck der geneigten Bahn ähnlich: die Last L entspricht der Länge l, die Druckkraft F_2 der Grundlinie b und der Hangabtrieb F_1 der Höhe h, der Steigungswinkel a ist gleich dem Winkel, der durch L und F_2 eingeschlossen ist. Wird in die Gleichung für die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt:

Kraft	=	F	(Hangabtrieb)
Kraftarm	=	l	(geneigte Bahn)
Last	=	L	(Gewicht der Last)
Lastarm	=	h	(Höhe)

so ergibt sich:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}$$
$$F \cdot l = L \cdot h$$

Die aufzuwendende Kraft F errechnet sich demnach an der schiefen Ebene zu:

$$F = L \cdot \frac{h}{l}$$

Die aufzuwendende Kraft F wird also mit länger werdender Bahn l kleiner.

Die **Steigung** einer geneigten Bahn ist das **Verhältnis** der **Höhe** h zur **Länge** l:

$$\text{Steigung} = \frac{h}{l} = \sin a$$

Wirkt die Kraft parallel zur geneigten Bahn, ist die aufzuwendende Kraft gleich dem Produkt aus Last und Steigung:

$$F = L \cdot \frac{h}{l} = L \cdot \sin a$$

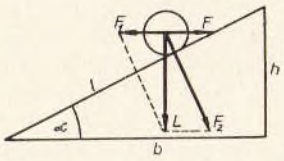


Abb. 97

Anders liegen die Kraftverhältnisse, wenn die Kraft parallel zur Grundlinie b angreift (Abb. 97), wie es bei einem Keil und einer Schraube der Fall ist.
Das Kräftedreieck aus L, F_1 und F_2 ist auch hier dem Dreieck der geneigten Bahn ähnlich: die Last L entspricht hier der Grundlinie b, die Druckkraft F_2 der Länge l und die Kraft F (gleich F_1) der Höhe h, der Neigungswinkel a ist gleich

dem Winkel, der durch L und F_2 eingeschlossen ist. Wird in die Gleichgewichtsgleichung eingesetzt:

Kraft	=	F	
Kraftarm	=	b	(Grundlinie)
Last	=	L	(Gewicht der Last)
Lastarm	=	h	(Höhe)

so ergibt sich:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}$$
$$F \cdot b = L \cdot h$$

Es ist dann:

$$F = L \cdot \frac{h}{b}$$

Die aufzuwendende Kraft F wird also mit länger werdender Grundlinie b kleiner.

Die **Neigung** einer geneigten Bahn ist das **Verhältnis** der **Höhe h** zur **Grundlinie b:**

$$\text{Neigung} = \frac{h}{b} = \tan a$$

Wirkt die Kraft parallel zur Grundlinie der geneigten Bahn, ist die aufzuwendende Kraft gleich dem Produkt aus Last und Neigung:

$$F = L \cdot \frac{h}{b} = L \cdot \tan a$$

2. Der Keil

Der Keil ist von der schiefen Ebene abgeleitet worden. **Durch den Keil wird die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflußt;** er wird in der Form von Messer, Meißel, Beil, Stemmeisen, Sense, Spaten usw. angewendet.

Der **Keil** ist ein **dreiseitiges Prisma,** dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist. Der **Keilwinkel** wird von den Seitenflächen (Seiten s) eingeschlossen und ist ein **spitzer Winkel.** Wird auf den Rücken r des Keils die **Kraft** F

fernmeldelehrling.de

ausgeübt, **zerlegt** sie sich **in zwei gleichgroße Seitenkräfte** L (L_1 *und* L_2), deren Wirkungslinien senkrecht auf beiden Seitenflächen s des Keils stehen.

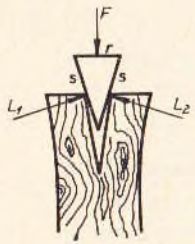


Abb. 98

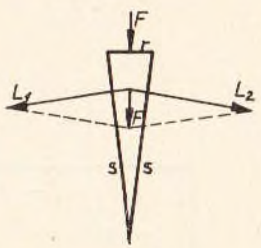


Abb. 99

Das Kräfteparallelogramm, das beim Zerlegen der Kraft F entsteht, zeigt, daß das **Keildreieck dem Teildreieck der Kräfte ähnlich** ist (Abb. 99). Auf Grund dieser ähnlichen Dreiecke gilt die Verhältnisgleichung:

$$F : L = r : s$$

$$\boxed{\frac{F}{L} = \frac{r}{s}}$$

Die aufzuwendende Kraft F errechnet sich demnach beim Keil zu:

$$\boxed{F = L \cdot \frac{r}{s}}$$

Die Seitenkräfte L eines Keiles sind um so größer, je kleiner der Bruch $\frac{r}{s}$ ist, d. h. je kleiner der Keilwinkel ist.

Infolge der an den Seitenflächen auftretenden Reibung sitzt der Keil so fest, daß er auch dann in seiner Lage gehalten wird, wenn die Kraft F nicht mehr wirkt. Anwendung: Befestigen von Riemenscheiben auf Wellen, Verkeilen von Rädern.

3. Die Schraube

Die Schraube ist wie der Keil eine Art schmal schiefe Ebene. Bei der Schraube ist die schiefe Ebene um einen zylindrischen Dorn herumgewickelt worden. So entsteht eine Schraubenlinie, wenn um einen Zylinder, dessen Grundfläche den Radius r hat, ein rechtwinkliges aus Papier geschnittenes Dreieck herumgewickelt wird, dessen Grundlinie b dem Kreisumfang des Zylinders $U = 2\pi r$ entspricht (Abb. 100). Die Höhe h des Dreieckes ist die Ganghöhe der Schraube. Weil die Kraft F bei der Schraube parallel zur Grundlinie am Umfang der Schraubenspindel angreift, gilt die Gleichung:

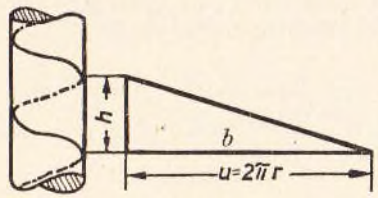


Abb. 100

$$F = L \cdot \frac{h}{b}$$

Bei der Schraube muß in diese Gleichung für die Grundlinie b der Umfang der Schraubenspindel U eingesetzt werden:

$$F = L \cdot \frac{h}{U}$$

In der Technik wird aber selten der Umfang einer Schraube angegeben, üblich ist die Angabe des Schraubendurchmessers d. Da $U = d \cdot \pi$ ist, folgt:

$$\boxed{F = L \cdot \frac{h}{d \cdot \pi}}$$

h ist **die Ganghöhe der Schraube** und d **der Schraubendurchmesser.**

Die Wirkung der Schraube kann vergrößert werden, wenn die Kraft an einem Hebelarm (Kurbel, Schraubenschlüssel oder Flügelschraube) angreift; als **Durchmesser** d ist dann der **doppelte Abstand von Schraubenmitte und Angriffspunkt der Kraft** einzusetzen.

Durch die Schraube wird die Größe der aufzuwendenden Kraft verkleinert; Arbeit wird nicht eingespart, weil mit kleiner werdender Kraft der Kraftweg größer wird.

Schrauben werden in der Technik häufig verwendet:

a) in Pressen, um einen großen Druck mit einer kleinen Kraft auszuüben (Hobelbank, Schraubzwinge, Schraubstock),

b) zum Heben von Lasten (Hebeböcke) und

c) zum Bewegen von Land-, Wasser- und Luftfahrzeugen (Schiffsschraube und Luftschraube).

fernmeldelehrling.de

An den Flanken der Schraube tritt eine Reibung auf, daß die Schraube wie der Keil auch dann festsitzt, wenn keine Kraft mehr wirkt; die Schraube wird daher häufig als Befestigungsmittel verwendet (Befestigungsgewinde).

Beispiele:

1) Mit welcher Kraft zieht ein Fahrzeug abwärts, das auf einer Straße mit einer Steigung 1:30 steht und ein Gewicht von 1,2 t hat?

$$F = L \cdot \frac{h}{l} \qquad L = 1{,}2\ \text{t} = 1200\ \text{kg}$$

$$= 1200 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1200}{30}$$

$$F = 40\ \text{kg}$$

2) Mittels einer Keilpresse soll ein Widerstand von 360 kg überwunden werden. Auf den Rücken des Keils soll dabei eine Kraft von 40 kg wirken. Wie groß muß das Verhältnis Rücken r zur Seite s und wie groß muß der Keilwinkel φ sein?

$$\frac{r}{s} = \frac{F}{L}$$

$$\frac{r}{s} = \frac{40}{360}$$

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{9}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{s} = \frac{r}{2s}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2 \cdot 9} \quad \frac{1}{18} = 0{,}0556$$

Nach Tabelle für sin-Funktionen:

$$\frac{\varphi}{2} = 3°\,12$$

$$\varphi = 2 \cdot \frac{\varphi}{2} = 6°\,24$$

E. Der Schall

I. Die Schallerregung

Worte, Geräusche und Musik sind physikalische Vorgänge, von denen wir durch ein besonderes Sinnesorgan, unser **Gehör,** Kenntnis erhalten. Was wir mit dem Ohr wahrnehmen, wird mit **Schall** bezeichnet.

- Der **Schall** wird durch **schnell aufeinanderfolgende Schwingungen** eines **elastischen Körpers,** des **Schallerregers,** hervorgerufen. **Jeder Körper,** der in einem festen, flüssigen oder gasförmigen Stoff **schwingt,** wird zu einer **Schallquelle.**

- Ein **reiner musikalischer Ton** entsteht durch **Schallwellen** mit **regelmäßigen Schwingungen der Moleküle.** Die **Tonhöhe** wird dabei allein durch die **Schwingungszahl der Moleküle** bestimmt.

- Unter **Schwingungszahl** oder **Frequenz eines Tones** wird die **Anzahl der in einer Sekunde auf die Luft ausgeübten Stöße** verstanden. Das **Maß der Frequenz** ist das **„Hertz„ (Hz)*); 1 Hz entspricht einer Schwingung pro Sekunde.**

- Der **Klang eines Tones** wird bestimmt durch die **Art,** die **Anzahl** und die **Stärke** der in dem Klang **enthaltenen Obertöne.** Jeder **Oberton** erzeugt für sich **eine Schwingung.** Die **Überlagerung mehrerer Schwingungen** ergibt die **Klangfarbe eines Tones.** Ein musikalisch geschultes Ohr hört aus einem Frequenzgemisch, wie es die Überlagerung mehrerer Schwingungen darstellt, die einzelnen Bestandteile (Grundton und Obertöne) heraus, dabei ist für die Klangfarbe des Tones die Stärke jeder einzelnen Schwingung wesentlich. Herrscht eine Frequenz vor, bestimmt die vorherrschende Frequenz die Höhe des Klanges, die **Obertöne** geben dem Ton die **Klangfarbe.**

Unregelmäßige Schwingungen empfinden wir als **Geräusch, kurz andauernde kräftige Schwingungen** als **Knall.**

Wir kennen sehr viele **Schallquellen,** z. B. die Stimmbänder des Kehlkopfes, die Saiten der Streichinstrumente und des Klaviers, die Luftsäulen der Orgelpfeifen und der Blasinstrumente, die Resonanzböden von Geige und Klavier, die Platte eines Schalgzeuges, das Fell der Pauke, die Glocke, die Membrane eines Lautsprechers.

Ebenso vielseitig ist die **Energiezufuhr** bei den einzelnen Schallquellen. Die menschliche Stimme und die Blasinstrumente erhalten ihre Energie in Form eines schnellen Luftstromes, die Saiten der Streichinstrumente durch den Strich des Bogens, die Klaviersaite und die Glocke durch den Schlag eines Hammers. Die Lautsprechermembrane erhält ihre Energie in Form elektromagnetischer Energie. **Jede Schallquelle formt die ihr zugeführte mechanische oder elektrische Energie in Schallenergie um.**

II. Die Schallausbreitung

Der **Schall** muß vom **Schallerreger** zum **Schallempfänger** übertragen werden. Die Schwingungen des Schallerregers versetzen die Luft in seiner Umgebung in Schwingungen; die dabei entstehenden **Verdichtungen und Verdünnungen der Luft** werden als **Schallwellen** bezeichnet.

*) Hertz zu Ehren des deutschen Physikers Heinrich Hertz.

fernmeldelehrling.de

- **Der Schall breitet sich,** von Luftmolekül zu Luftmolekül fortpflanzend, **nach allen Seiten hin gleichmäßig aus,** bis er auf den Schallempfänger trifft, z. B. im Gehörgang des Ohres auf das Trommelfell. Das Trommelfell gerät dadurch in Schwingungen und leitet den Schall in das innere Ohr weiter.

  Zur **Übertragung des Schalles** vom Schallerreger auf das Ohr ist also die **Luft als Schallträger** nötig. Selbstverständlich können auch **feste, flüssige** oder andere **gasförmige Stoffe** als **Schallträger** wirken und Schallwellen übertragen.

  Der Schall wird von elastischen Körpern besser übertragen als von plastischen. Plastische Körper, wie Watte, Asche, Filz, Wolle, Torfmull, eignen sich daher **zur Schallabdichtung.**

- **In luftleeren Räumen (im Vakuum) vermag sich eine Schallwelle nicht fortzupflanzen, weil dort keine Schallträger vorhanden sind.**

  Die **Schallgeschwindigkeit** wird ermittelt, indem die **Entfernung** zwischen **Schallerreger und Schallempfänger** und die **Zeit** gemessen wird, die der Schall benötigt, um diese Entfernung zu durchlaufen.

  Auch hier kann die Gleichung

$$v = \frac{s}{t}$$

  angewendet werden:

- **In ruhiger Luft pflanzt sich der Schall bei einer Temperatur von 0°C** mit einer Schallgeschwindigkeit von 331,3 $\frac{m}{s}$ und **bei 15°C** mit einer Schallgeschwindigkeit von 340 $\frac{m}{s}$ **fort.** Für eine Temperaturzunahme von 1°C nimmt die Schallgeschwindigkeit in Luft um etwa 0,6 $\frac{m}{s}$ zu.

- Die Schallgeschwindigkeit ist abhängig von der Elastizität des Schallträgers. **Feste und flüssige Körper leiten daher den Schall** im allgemeinen **besser als Luft,** d. h. die Schallgeschwindigkeit ist in festen und flüssigen Körpern größer als in gasförmigen Körpern. In Eisen beträgt sie etwa 5000 $\frac{m}{s}$, in Wasser 1450 $\frac{m}{s}$. Die Reichweite einer Schallwelle hängt von der Größe der Schallenergie und von der Beschaffenheit des Schallträgers ab.

Treffen Schallwellen auf eine elastische Wand, werden sie zurückgeworfen. Den **zurückgeworfenen Schall** bezeichnen wir als **Echo.** An unser Ohr gelangen also zweimal Schallwellen, die von ein und demselben Schallerreger herrühren; einmal kommen die Schallwellen unmittelbar von dem schwingenden Körper selbst, zum anderen durch Zurückwerfen (Reflexion) von der Wand. Damit beide Schalleinwirkungen, der unmittelbare Schall und das Echo, von unserem Ohr getrennt wahrgenommen werden können, muß zwischen ihrem Empfang ein Zeitraum von mindestens $\frac{1}{10}$ Sekunde liegen. In $\frac{1}{10}$ Sekunde legen die Schallwellen einen Weg von 34 m zurück, die reflektierende Wand muß somit mindestens 17 m entfernt sein. Ein **deutliches Echo** wird bei wesentlich größeren Entfernungen vernommen. Ein **mehrfaches Echo** ist zu hören, wenn derselbe Schall **mehrmals als Echo an das Ohr gelangt** (Abb. 101).

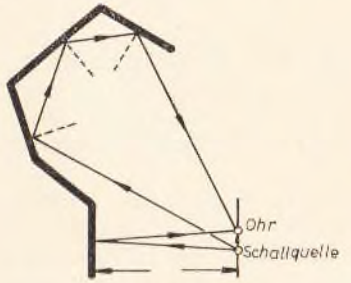


Abb. 101

Nachhall entsteht, wenn in einem geschlossenen Raum der Schallweg von der Schallquelle zur Wand kleiner als 17 m ist. Ein Echo kann dann wegen des kleinen Zeitunterschiedes nicht wahrgenommen werden, die reflektierten Schallwellen stören aber die unmittelbaren Schallwellen. In eingerichteten Räumen oder mit Menschen gefüllten Sälen ist ein Nachhall nicht vorhanden, weil plastische Körper die Schallwellen nicht zurückwerfen. In Theatern, Konzerträumen und Kirchen wird der Nachhall als störend empfunden und wird daher von den Bauakustikern mit allen verfügbaren Mitteln (Raumgestaltung und Verwendung plastischer Stoffe) bekämpft.

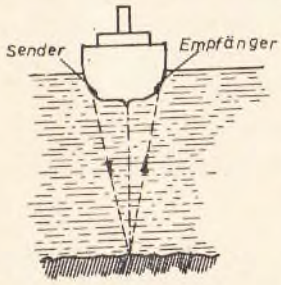


Abb. 102

Die Reflexion des Schalles wird beim **Echolot** benutzt (Abb. 102), um die Tiefe von Gewässern zu bestimmen. An einer Wand des Schiffes wird durch einen Schallsender ein starker gerichteter Schall erzeugt. Die Schallwellen dringen in die Tiefe, werden vom Meeresboden zurückgeworfen (reflektiert) und

fernmeldelehrling.de

von einem Empfänger im Schiff wieder aufgefangen. Aus der Zeit und der Schallgeschwindigkeit läßt sich dann auf einfache Weise der Schallweg ermitteln, der gleich der doppelten Wassertiefe ist:

$$\text{Wassertiefe} = \frac{\text{Schallgeschwindigkeit} \cdot \text{Ausbreitungszeit}}{2}$$

In ähnlicher Weise wird mit dem Echolot die Höhe von Luftfahrzeugen bestimmt.

Durch Trichter, Glasplatten, Hohlspiegel kann der Schall abgelenkt, gerichtet und zusammengefaßt (gebündelt) werden (Sprachrohr, Hörrohr).

III. Der Schallempfang

Jede Vorrichtung, die die Energie einer auftreffenden Schallwelle in eine andere Energieform verwandelt, ist ein **Schallempfänger.**

Zum Empfang von Schallwellen eignen sich besonders gut **Membranen.** Sie sind dünne Häutchen wie das Trommelfell oder auch dünne Scheiben aus Eisen, Kohle oder anderen Werkstoffen. **Membranen besitzen** entweder **keine Eigenschwingung** oder eine, die nur einer tiefen Frequenz entspricht, und können durch Schallwellen in Schwingungen versetzt werden, in sogenannte **erzwungene Schwingungen.** Die bekanntesten **Schallempfänger** sind das **menschliche Ohr** und die **Mikrophone. Durch das Mikrophon wird die auftreffende Schallenergie in elektromagnetische Energie umgeformt,** die in der Fernmeldetechnik besondere Bedeutung erlangt hat, weil sie in einfacher Weise verstärkt werden kann.

Die vom Ohr aufgefangenen Schallwellen führen nicht in jedem Falle zu einer Schallempfindung. Die **Schallempfindung** erfolgt **nur,** wenn die **Frequenz der Schallwellen** zwischen **etwa 20 Hz und etwa 20000 Hz liegt.** Der Frequenzbereich, den das menschliche Ohr aufnehmen kann, wird jedoch im Alter schlechter; mit zunehmendem Alter werden Töne über 10000 Hz kaum noch wahrgenommen.

Schallwellen mit der **Frequenz oberhalb 20000 Hz** werden vom Menschen nicht mehr gehört und als **Ultraschall** bezeichnet.

Die **Stärke des Schalles,** der unser Ohr trifft, ist von der **Energie der Schallwelle** abhängig. Die Schallstärke, die soeben noch eine **Lautempfindung** hervorruft, heißt **Reizschwelle oder Schwellenwert.** Die **Schallstärke** ist also von der Stärke der Empfindung, der **Lautstärke,** zu **unterscheiden. Die Lautstärke wächst**

langsamer als die Schallstärke; wird die Schallstärke um das Zehn- bzw. Hundertfache verstärkt, wächst die Lautstärke nur auf den doppelten oder dreifachen Betrag an*).

- Trifft eine Schallwelle, die von einem Schallsender bestimmter Eigenfrequenz ausgeht, auf einen Schallsender, einen Schallempfänger oder einen schwingfähigen Körper mit der gleichen Eigenfrequenz, versetzt sie diesen Körper ebenfalls in Schwingungen. Dieses **Mitschwingen** wird **Resonanz** genannt. Wird die Frequenz des Senders oder die Eigenfrequenz des Empfängers verändert, wird das Mitschwingen mehr oder weniger aufgehoben. Durch derartig **auf Resonanz abgestimmte Empfänger** können schwache Schallwellen bestimmter Frequenz wahrnehmbar gemacht werden.

IV. Die Schallaufzeichnung

Schallwellen können aufgezeichnet oder gespeichert werden, wobei der zeitliche Schwingungsvorgang entweder **mechanisch** in den **Rillen einer Schallplatte, optisch** auf dem **Filmstreifen des Tonfilms** oder **magnetisch** auf **Stahldrähten** sowie **eisenhaltigen** oder ferromagnetischen **Bändern** festgehalten wird. Die erstarrte Form ist jederzeit wieder in die ursprüngliche Gestalt der Schallwellen umwandelbar.

F. Die Wärme

I. Wärmeempfindung, Temperatur und Temperaturmessung

Durch unser Gefühl können wir unterscheiden, ob ein Körper **warm** oder **kalt** ist. Dieses Urteil über den **Wärmegrad eines Körpers,** über **seine Temperatur,** ist jedoch ungenau und kann beträchtlichen Täuschungen unterworfen sein. Wir empfinden z. B. Wasser mit Zimmertemperatur als warm, wenn wir vorher die probende Hand in Eiswasser getaucht haben, dagegen das Wasser mit der gleichen Temperatur als kalt, wenn die Hand vorher in heißem Wasser war. Um ein **zuverlässiges Urteil über die Temperatur** eines Körpers zu erhalten, wird die **Zustandsänderung eines Körpers bei Änderung des Wärmegrades** beobachtet. Von besonderer Bedeutung ist dabei die **Wärmeausdehnung der Körper.**

Fast alle Körper dehnen sich aus, wenn sie erwärmt werden, und ziehen sich zusammen, wenn sie sich abkühlen.

Temperaturen werden daher häufig **gemessen,** indem festgestellt wird, wie sich gewisse **Flüssigkeiten** unter dem Einfluß einer Temperaturänderung **ausdehnen oder zusammenziehen.** Flüssigkeiten werden zum Temperaturmessen ver-

*) Schallstärke und Lautstärke stehen im „Logarithmischen Verhältnis".

fernmeldelehrling.de

wendet, weil sie sich unter dem Einfluß einer Temperaturerhöhung wesentlich mehr ausdehnen als feste Stoffe und besser zu handhaben sind als Gase. Füllen wir eine Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, in eine Glaskugel, die sich nach oben in einer engen Glasröhre fortsetzt, können wir anhand der Flüssigkeitssäule die Volumenausdehnung ablesen. Ein solches Gerät ist ein **Thermometer.**

Die **Skalenteilung des Thermometers geht von zwei festen Punkten aus, dem Schmelzpunkt und dem Siedepunkt des Wassers.** Das Thermometer wird in schmelzendes Eis (Abb. 103a) und anschließend in siedendes Wasser (Abb. 103b) gesetzt, wobei der jeweilige Stand der Flüssigkeitssäule durch einen Strich am Glasrohr markiert wird (Abb. 103c). Die Temperaturen, bei denen Eis schmilzt und Wasser siedet, sind bei gleichen Druckverhältnissen stets dieselben. Bei der **Celsius-Skala** (Abb. 103c) ist der Abstand zwischen den beiden Markierungen (Schmelzpunkt und Siedepunkt) in hundert gleiche Teile eingeteilt. **Der Temperaturunterschied zwischen zwei Teilstrichen ist 1 Wärmegrad,** bei der Celsius-Skala **1 Grad Celsius** (1°C).

Abb. 103a

Abb. 103b

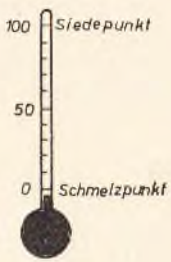


Abb. 103c

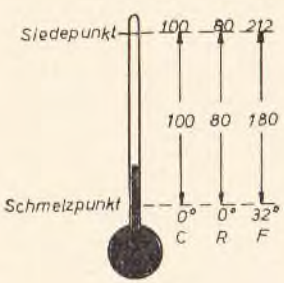


Abb. 104

Die *Celsius*-Skala ist heute fast ausschließlich üblich. Gelegentlich ist im Ausland noch die Skala *Réaumur* zu finden, bei der der Temperaturunterschied zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt in **80°R** eingeteilt ist (Abb. 104).

Bei der Skala nach *Fahrenheit,* die noch in Amerika und England verwendet wird, dient eine Kältemischung aus Eis und Salz zur Bestimmung des Nullpunktes. Der **Schmelzpunkt des Eises liegt bei der Fahrenheitskala bei 32° F und der Siedepunkt des Wassers bei 212°F** (Abb. 104).

Die gleichmäßige Teilung der Skala kann bei Bedarf unter dem Eispunkt (Minus-Grade) und über dem Siedepunkt fortgesetzt werden.

Besondere Ausführungen der Flüssigkeitsthermometer sind die Maximum- und Minimumthermometer. Ein **Maximumthermometer** zeigt die **höchste Temperatur in einem Zeitraum** an. Das Quecksilber schiebt beim Steigen in der engen Glasröhre ein Eisenstückchen vor sich her, das beim Zurückgehen der Flüssigkeit liegen bleibt, so daß später noch die höchste Temperatur abgelesen werden kann. Mit Hilfe eines Magneten kann das Eisenstäbchen wieder an den Quecksilberfaden herangebracht werden. Eine besondere Art des Maximumthermometers ist das **Fieberthermometer,** das von 35° bis 42° C in Zehntelgraden geeicht ist. Die Glasröhre ist beim Fieberthermometer dicht über der Glaskugel (dem Thermometergefäß) stark verengt. Bei Erwärmung wird das Quecksilber in das Glasrohr hineingepreßt, bei Abkühlung reißt aber der Quecksilberfaden an der Verengung ab und bleibt hängen. Durch Schütteln (Niederschlagen) des Thermometers wird der Quecksilberfaden wieder in das Gefäß zurückgeschlagen.

Ein **Minimumthermometer** zeigt die **niedrigste Temperatur in einem Zeitraum** an. Es ist ein Alkoholthermometer, in dessen Glasröhre ein Glasstift bei sinkender Temperatur mitgezogen wird, während er bei steigender Temperatur liegen bleibt und der Alkohol über ihn hinwegfließt.

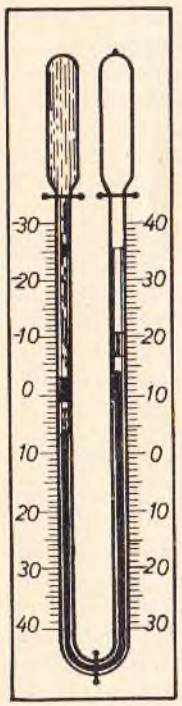


Abb. 105

Das **Maximum-Minimum-Thermometer** ist eine Verbindung beider Sonderausführungen (Abb. 105) und zeigt sowohl die höchste als auch die niedrigste Temperatur innerhalb eines Zeitabschnittes an. Es ist ein Alkoholthermometer, in dessen U-förmigem Teil sich ein Quecksilberfaden befindet. Der ganze Raum über dem Quecksilberfaden ist im linken Thermometerschenkel mit Alkohol gefüllt, während im rechten Thermometerschenkel der Raum über dem Quecksilberfaden nur teilweise mit Alkohol, darüber aber mit Alkoholdämpfen angefüllt ist. Auf beiden Enden des Quecksilberfadens liegen Stahlstäbchen. Das Stahlstäbchen im linken Schenkel zeigt die niedrigste Temperatur, das im rechten Schenkel die höchste Temperatur innerhalb eines Zeitabschnittes an. Die eigentliche **Thermometerflüssigkeit** ist der **Alkohol,** durch den der Quecksilberfaden bewegt wird. Bei steigender Temperatur dehnt sich der Alkohol im linken Thermometerschenkel aus und treibt daher den Quecksilberfaden im rechten Schenkel hoch. Bei fallender Temperatur zieht sich der Alkohol im linken Schenkel zusammen, die Alkoholdämpfe im rechten Glaskolben drängen jetzt den Quecksilberfaden so weit zurück, daß er gegen den Alkoholfaden im linken Thermometerschenkel stößt.

fernmeldelehrling.de

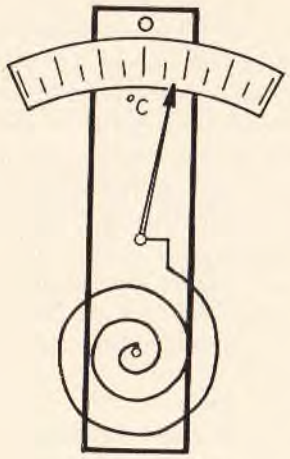


Abb. 106

Bei allen Flüssigkeitsthermometern wird der **Temperaturmeßbereich bestimmt durch den Erstarrungs- und Siedepunkt der verwendeten Flüssigkeit,** weil durch die Zustandsänderung auch andere Volumenänderungen eintreten. So kann das gewöhnliche Quecksilberthermometer nur für Temperaturmessungen zwischen —39°C und +200°C angewandt werden. Neben den Flüssigkeitsthermometern, vor allem **oberhalb und unterhalb ihrer Meßbereiche,** werden **Bimetallthermometer, Thermoelemente, Widerstandsthermometer** und für sehr hohe Temperaturen **Strahlungsthermometer** benutzt. Beim Bimetallthermometer beruht die Temperaturmessung auf der verschieden großen Wärmeausdehnung von Metallen. Ein Bimetallstreifen besteht aus zwei (zwei = bi) Metallstreifen, die eine unterschiedliche Wärmeausdehnung haben und mechanisch fest miteinander verbunden sind. Bei Erwärmung biegt sich daher der Bimetallstreifen durch. Die Durchbiegung ist ein Maß für die Temperatur, die durch einen Zeiger auf einer Skala angezeigt wird (Abb. 106). Je länger der Bimetallstreifen ist, um so größer wird die Durchbiegung und somit der Zeigerausschlag je Wärmeeinheit; damit ein möglichst großer Zeigerausschlag erzielt wird, ist der Bimetallstreifen zu einer Spirale aufgewickelt.

Abb. 107

Thermoelemente bestehen aus zwei Streifen verschiedener Metalle; die beiden Streifen sind an einem Ende mechanisch miteinander verbunden (Abb. 107). Wird die Verbindungsstelle erhitzt oder abgekühlt, tritt zwischen den freien Enden der beiden Metallstreifen eine geringe elektrische Spannung auf, deren Größe von der Temperaturänderung abhängig ist. Die Enden der Metallstreifen sind mit einem empfindlichen Millivoltmeter verbunden, dessen Skala jedoch nicht in Millivolt, sondern in Grad Celsius (°C) geeicht ist.
Die Eigenschaft elektrischer Leiter, bei Temperaturänderung auch den elektrischen Widerstand zu ändern, wird beim **Widerstandsthermometer** ausgenutzt. Ein empfindliches Galvanometer zeigt die Stromänderung an, die bei konstanter Spannung infolge der Widerstandsänderung auftritt, die durch die Temperaturänderung hervorgerufen wird. Die Skala des Galvanometers ist ebenfalls in °C geeicht. Beim **Strahlungspyrometer** wird die empfangene Strahlungswärme auf ein Thermoelement geleitet, das dadurch erwärmt wird und, wie bereits erläutert, die Temperatur anzeigt.

II. Absoluter Nullpunkt und absolute Temperatur

Im vorigen Abschnitt wurde gesagt, daß sich fast alle Stoffe ausdehnen, wenn sie erwärmt werden, und sich zusammenziehen, wenn sie sich abkühlen. Das trifft auch auf die gasförmigen Stoffe zu. Bei festen und flüssigen Stoffen ist der *Ausdehnungskoëffizient**) eine echte *Stoffkonstante*, also von der Art des Stoffes abhängig und je Stoff verschieden. Dagegen ist der **Ausdehnungskoëffizient für alle Gase nahezu gleich groß; das Volumen aller Gase steigt je Grad Celsius Temperaturerhöhung fast um den gleichen Betrag.** Wird Gas unter gleichbleibendem Druck von 0°C auf 100°C erwärmt, steigt das Volumen von 100% (bei 0°C) auf 136,6% (bei 100°C), d. h., je 100°C nimmt das Volumen des Gases um 36,6% zu, je 1°C um 0,366% $= 0{,}00366 = \frac{366}{100\ 000} = \frac{1}{273}$, bezogen auf das Volumen bei 0°C. Wird ein Gas abgekühlt, nimmt das Volumen — immer gleichbleibender Druck vorausgesetzt — je Grad Celsius um $\frac{1}{273}$ des Volumens bei 0°C ab.

- Das bedeutet, daß **bei einer Temperatur von —273°C ein Gas keinen Raum mehr einnehmen würde;** diese Temperatur von —273°C wird als **der absolute Nullpunkt** bezeichnet.

- Die Temperatur, die vom absoluten Nullpunkt an gezählt, also **auf den absoluten Nullpunkt bezogen** wird, ist **die absolute Temperatur** T.

- **Die absolute Temperatur wird in Grad Kelvin (°K) gemessen.** Die Maßeinheit „Grad Kelvin" ist dieselbe Maßeinheit wie „Grad Celsius", beide Maßeinheiten beziehen sich jedoch auf verschiedene Nullpunkte:

  die **Grad Kelvin** werden auf den **absoluten Nullpunkt,**
  die **Grad Celsius** auf den **Schmelzpunkt** des Eises bezogen.

  Da der absolute Nullpunkt um —273°C niedriger als der Schmelzpunkt des Eises liegt, wird die **absolute Temperatur** T ermittelt aus der **Celsius-Temperatur** t **plus 273°C:**

$$T = t + 273°C$$

  Besondere Bedeutung haben der absolute Nullpunkt und die absolute Temperatur bei der **Ausdehnung von Gasen und bei der Berechnung elektrischer Widerstände.** Der elektrische Widerstand von Leitern nimmt mit sinkender Temperatur sehr schnell ab und wird fast Null bei der absoluten Temperatur = —273°C. Der **Zustand elektrischer Leiter beim absoluten Nullpunkt** wird mit **Supraleitfähigkeit** bezeichnet. **Der absolute Nullpunkt,** die unterste Grenze der Temperatur, **wird niemals unterschritten noch erreicht werden können.**

*) Der Doppelpunkt über dem e ist ein Trema; das Trema besagt, daß das o und das e getrennt ausgesprochen werden sollen.

fernmeldelehrling.de

III. Die Wärmemenge

Zwei Körper sind im sogenannten **thermischen Gleichgewicht,** wenn sie **dieselbe Temperatur** haben. Berühren sich beide Körper, hat keiner das Bestreben, die Temperatur zu ändern. Berühren sich aber zwei Körper verschiedener Temperatur, gibt der wärmere Körper **„Wärme"** an den kälteren ab. Dabei kühlt sich der wärmere Körper ab, während sich der kältere erwärmt, bis der thermische Gleichgewichtszustand hergestellt ist, d. h., bis beide Körper dieselbe Temperatur haben. **Bei** derartigen **Temperaturänderungen** durch Zufuhr oder Entzug von Wärme sind **Art und Menge der beteiligten Stoffe wesentlich.**

- Eine **Temperaturerhöhung** bei Wasser hängt z. B. von der **zugeführten Wärmemenge** Q und dem **Gewicht** G der Wassermenge ab.
- **Die Maßeinheit der Wärmemenge ist die Kalorie (cal); 1000 cal = 10^3 cal sind eine Kilokalorie (kcal).**
- **Eine Kalorie ist die Wärmemenge, die 1 g Wasser um 1° C** (genau von 14,5 auf 15,5° C) **erwärmt.**

Durch Versuche wurde festgestellt, daß die Wärmemenge Q, die erforderlich ist, um 1 g eines Stoffes um 1° C zu erwärmen, bei jedem Stoff verschieden ist.

Die Wärmemenge, die ein Stoff je Gramm aufnehmen muß, damit seine Temperatur um 1° C steigt, wird die Artwärme oder spezifische Wärme c eines Stoffes genannt. Die spezifische Wärme c wird in **Kalorien je Grad Celsius und je Gramm** $\left[\frac{\text{cal}}{°\text{C} \cdot \text{g}}\right]$ oder in **Kilokalorien je Grad Celsius und je Kilogramm** $\left[\frac{\text{kcal}}{°\text{C} \cdot \text{kg}}\right]$ gemessen. In nachstehender Tabelle ist die spezifische Wärme c einiger fester und flüssiger Stoffe angegeben:

Stoff	c in $\frac{\text{cal}}{°\text{C} \cdot \text{g}}$
Wasser	1,0
Öl	0,45
Schwefelsäure	0,34
Aluminium	0,22
Nickel	0,11
Stahl	0,11
Konstantan	0,098
Kupfer	0,093
Silber	0,057
Quecksilber	0,033
Blei	0,031

Soll 1 g eines Stoffes um 1° C erwärmt werden, sind nach der Tabelle c cal nötig.

Soll 1 g desselben Stoffes um eine Temperaturänderung von Δt*) erwärmt werden, wird eine Wärmemenge Q von $c \cdot \Delta t$ benötigt.

Es gilt allgemein:

$$Q = G \cdot c \cdot \Delta t \text{ [cal]}$$
$$Q = G \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \text{ [cal]}$$

Die zur Temperaturerhöhung notwendige Wärmemenge wird entweder einem anderen Körper entzogen oder durch **Energieumwandlung** erzeugt. So entsteht aus **1 kWh****) **elektrischer Energie** eine **Wärmemenge von 860 kcal.** Wird **chemische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, entstehen durch Verbrennen von 1 kg Öl etwa 10000 kcal. Eine mechanische Energie von 427 mkg kann in eine Wärmemenge von 1 kcal umgewandelt werden.**

Beispiele:

1) Welche Wärmemenge ist notwendig, um 10 l Wasser von 15° C auf 95° C zu erwärmen?

10 l Wasser ≙ 10 kg Wasser; c von Wasser = 1

$$Q = G \cdot c \cdot (t_2 - t_1)$$
$$= 10 \cdot 1 \cdot (95 - 15)$$
$$= 10 \cdot 1 \cdot 80$$
$$\underline{Q = 800 \text{ kcal}}$$

2) Welche Wärmemenge nimmt ein 10 kg schweres Stahlstück von einer Ausgangstemperatur von 15° C auf, wenn es auf 95° C erhitzt werden soll?

c von Stahl = 0,11

$$Q = G \cdot c \cdot \Delta t \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$
$$= 10 \cdot 0{,}11 \cdot 80 \qquad \underline{\Delta t = 95 - 15 = 80° \text{ C}}$$
$$\underline{Q = 88 \text{ kcal}}$$

*) Temperaturänderung Δt = Differenz zwischen Endtemperatur t_2 und Ausgangstemperatur t_1 ($\Delta t = t_2 - t_1$).

**) 1 kWh = eine Kilowattstunde (Maß der elektrischen Arbeit).

fernmeldelehrling.de

3) Wieviel cal sind notwendig, um einen Lötkolben aus Kupfer von 300 g Gewicht von 20° C auf 320° C zu erwärmen?

c von Kupfer = 0,093

$$Q = G \cdot c \cdot \Delta t \qquad \Delta t = t_2 - t_1$$
$$= 300 \cdot 0{,}093 \cdot 300 \qquad \Delta t = 320 - 20 = 300°C$$
$$Q = 8370 \text{ cal} = 8{,}37 \text{ kcal}$$

IV. Wärme als Molekularbewegung

Der englische **Botaniker Brouwn** beobachtete 1827, daß sich sehr kleine Teilchen fester Körper in einer Flüssigkeit bewegen, und zwar um so schneller, je kleiner die Teilchen sind. Die kleinsten Teilchen eines Stoffes sind die Moleküle. Daher ist festzustellen, daß sich diese Moleküle dauernd bewegen (**Molekularbewegung**). Jedoch unterscheiden sich die Molekularbewegungen fester, flüssiger und gasförmiger Körper wesentlich voneinander.

Die Wärme kann auch als Bewegungsenergie der Moleküle (**Energie der Molekularbewegung**) aufgefaßt werden. Da die Moleküle fester Körper — bedingt durch die herrschenden Kohäsionskräfte*) — ihren Platz jedoch nicht verändern können, schwingen sie um eine Gleichgewichtslage hin und her. Wird dem festen Körper **Wärme zugeführt,** erhalten die Moleküle eine **größere Bewegungsenergie,** sie schwingen daher weiter aus ihrer Gleichgewichtslage heraus, das **Gefüge** des Körpers **wird** dadurch **gelockert,** und **der Körper dehnt sich aus.**

Wird dem festen Körper immer mehr Wärme zugeführt, so wird die **Bewegungsenergie der Moleküle schließlich so groß,** daß die Moleküle **nicht mehr im Gleichgewicht** bleiben. Die Kohäsionskräfte, die bis jetzt die Moleküle in ihrer Gleichgewichtslage hielten, reichen nicht mehr aus, das feste Gefüge des Körpers aufrechtzuerhalten: **Der feste Körper wird flüssig.** Die Kohäsionskräfte sind gegenüber der Energie der Molekularbewegung nur noch in geringem Umfang wirksam; die Kohäsionskräfte erhalten der Flüssigkeit zwar noch ein bestimmtes Volumen, aber keine feste Gestalt mehr.

Bei weiterem **Temperaturanstieg** nimmt die Bewegungsenergie der Moleküle weiter zu. Die Geschwindigkeit der Moleküle ist unterschiedlich. **Sehr schnelle Moleküle durchstoßen die Flüssigkeitsoberfläche und entweichen nach außen: Die Flüssigkeit verdampft.** Die Dichte der Körper wird während der Wärmezufuhr immer kleiner, die Kohäsionskräfte sind kaum noch wirksam, daher bleibt dem Körper auch ein bestimmtes Volumen nicht mehr erhalten: **Der flüssige Körper wird gasförmig.**

V. Ausdehnung der Körper beim Erwärmen

- **Alle Körper dehnen sich aus, wenn sie erwärmt werden, und ziehen sich zusammen, wenn sie sich abkühlen.** Das Maß der Ausdehnung ist **abhängig** von der **Art des Stoffes** und von seinem **Aggregatzustand.**

*) Kohäsion — die Kraft, die die Moleküle eines Körpers zusammenhält; sie ist bei festen Körpern groß, bei flüssigen gering und bei Gasen kaum vorhanden.

Je nach der Form der Körper macht sich die **Volumenänderung** beim Erwärmen oder Abkühlen in einer Änderung der **Längen-, Flächen- oder Raumausdehnung** bemerkbar. In den folgenden Abschnitten soll die Volumenänderung der Körper in ihren drei Aggregatzuständen untersucht werden.

Die Ausdehnung fester Körper infolge Temperaturänderung ist im Vergleich zu flüssigen und gasförmigen Körpern gering. Die einzelnen Stoffe verhalten sich dabei jedoch verschieden. Der **Längenzuwachs,** den ein **Stab** eines bestimmten Stoffes von **1 m Länge** beim Erwärmen **von 0° C auf 1° C** erfährt, ist die **Längenausdehnungszahl** α oder der **Ausdehnungskoëffizient** α des Stoffes:

Ein Stab von 1 m Länge verlängert sich beim Erwärmen um 1° C um α m. Beträgt die Stablänge l m, dehnt sich der Stab beim Erwärmen um 1° C aus um

$$\Delta l = l \cdot \alpha.$$

Wird der Stab von der Temperatur t_1 auf die Temperatur t_2 erwärmt, beträgt also der Temperaturunterschied

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

ist die **Gesamtausdehnung:**

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t$$
$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

Innerhalb eines bestimmten Temperaturbereiches ist die **Ausdehnung eines Stabes** beim Erwärmen von 0° C ausgehend auf eine bestimmte Temperatur t_2 **der Temperaturzunahme proportional:**

Beim Abkühlen ist die Temperaturänderung Δt negativ einzusetzen. Der Stab verkürzt sich dann gegenüber der Ausgangslänge l:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad / \quad t_1 < t_2$$
$$\Delta t = -(t_1 - t_2)$$
Δt ist negativ

Beim Abkühlen, d. h. bei negativer Temperaturänderung, **ist die Länge l, des Stabes kleiner als die Ausgangslänge l.**

Die Verlängerung oder Verkürzung infolge Temperaturänderung ist oft recht beträchtlich und darf nicht vernachlässigt werden. Freileitungen hängen z. B. im Sommer stark durch, im Winter dagegen können sie infolge der Verkürzung so straff gespannt sein, daß sie u. U. reißen. Auch bei Brücken, Eisenbahnschienen, Pendeluhren usw. muß die Dehnung durch Erwärmen beachtet werden. Sind Geräte aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzt, ist darauf zu achten, daß durch die verschiedenen Ausdehnungskoëffizienten keine Spannungen entstehen, die den Körper zerstören könnten.

fernmeldelehrling.de

In nachfolgender Tabelle sind die Längenausdehnungszahlen α für einige Stoffe zusammengestellt:

Längenausdehnungszahlen einiger Stoffe:

Stoff	α je °C
Hartgummi	0,000080
Aluminium	0,000024
Bronze	0,000018
Kupfer	0,000017
Zement	0,000014
Eisen, Stahl	0,000011
Platin	0,000009
Glas	0,000006
Holz	0,000003
Porzellan	0,000003

Beim Erwärmen dehnt sich ein fester Körper nicht nur in seiner Länge aus, sondern auch in seiner Breite und Höhe. **Die Fläche und das Volumen werden größer.**

Beispiele:

1) Eine Kupferleitung hat bei $t_1 = 10°$ C eine Länge $l = 500$ m. Wie groß ist die Längenausdehnung Δl bei $t_{21} = 30°$ C und bei $t_{22} = -20°$ C?

Lösung:

α für Kupfer $= 0{,}000017$

$t_{21} = 30°C$

$\Delta t_1 = t_{21} - t_1$
$= 30 - 10$
$\Delta t_1 = 20°C$

$\Delta l_1 = l \cdot \alpha \cdot \Delta t_1$
$= 500 \cdot 0{,}000017 \cdot 20$
$= 0{,}0085 \cdot 20$
$\Delta l = 0{,}17$ m

Die Verlängerung der Leitung beträgt 0,17 m = 17 cm

$t_{22} = -20°C$

$\Delta t_2 = t_{22} - t_1$
$= -20 - 10$
$\Delta t_2 = -30°C$

$\Delta l_2 = l \cdot \alpha \cdot \Delta t_2$
$= 500 \cdot 0{,}000017 \cdot (-30)$
$= 0{,}0085 \cdot (-30)$
$\Delta l = -0{,}255$ m

Die Verkürzung der Leitung beträgt 0,255 m = 25,5 cm

2) Die Erde hat am Äquator einen Umfang von rund 40000 km. Ein um den Erdumfang gelegter Eisenring wird um $\Delta t = 1°C$ erwärmt. Wie weit steht der Ring jetzt von der Erdoberfläche ab?

1. Lösung:

α für Eisen $= 0{,}000011 = 11 \cdot 10^{-6}$
$l = 40 \cdot 10^6$ m $= 40000000$ m
$\Delta t = 1°C$
$l_t = l(1 + \alpha \cdot \Delta t)$
$= 40 \cdot 10^6 (1 + 0{,}000011 \cdot 1)$
$= 40 \cdot 1{,}000011 \cdot 10^6$
$l_t = 40{,}00044 \cdot 10^6 = 40000440$ m

$U = 2\pi r$
$r = \frac{U}{2\pi}$

$r_k = \frac{U}{2\pi} = \frac{40000000}{6{,}28}$
$r_k = 6369426{,}75$ m

$r_w = \frac{U}{2\pi} = \frac{40000440}{6{,}28}$
$r_w = 6369496{,}81$ m

$\Delta r = r_w - r_k$
$= 6369469{,}81 - 6369426{,}75$
$\Delta r = 70{,}06$ m

Der Eisenring steht 70,06 m von der Erdoberfläche ab.

2. Lösung:

$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t$
$= 40 \cdot 10^6 \cdot 11 \cdot 10^{-6} \cdot 1$
$= 40 \cdot 11 \cdot 10^{6-6}$
$= 40 \cdot 11$
$\Delta l = 440$ m

Die Stoffkunde

Die Stoffkunde (Chemie) hat vor allem die Aufgabe,

1. **zusammengesetzte** Stoffe in andere Stoffe zu zerlegen und so die Zusammensetzung der Stoffe zu erforschen (Analyse),
2. neue Stoffe aus **zwei** oder **mehreren anderen** Stoffen aufzubauen (Synthese).

I. Chemische Grundstoffe

Alle vorkommenden Stoffe sind entweder **Grundstoffe** (Elemente) oder sie sind aus den verschiedenen Grundstoffen nach bestimmten Gesetzen zusammengesetzt.

fernmeldelehrling.de

Die Grundstoffe, von denen es etwa 100 gibt, lassen sich nicht in einfachere Stoffe zerlegen. Sämtliche Elemente haben ein international geltendes chemisches Zeichen, das von lateinischen oder griechischen Namen abgeleitet wurde, z. B.

Deutscher Name	Lat. od. griech. Name	Chem. Zeichen
Sauerstoff	Oxygenium	O
Wasserstoff	Hydrogenium	H
Stickstoff	Nitrogenium	N
Kohlenstoff	Carboneum	C
Schwefel	Sulfur	S
Chlor	Chlorum	Cl
Kalium	Kalium	K
Natrium	Natrium	Na
Kalzium	Calcium	Ca
Aluminium	Aluminium	Al
Eisen	Ferrum	Fe
Blei	Plumbum	Pb
Silber	Argentum	Ag
Zinn	Stannum	Sn
Kupfer	Cuprum	Cu

Man teilt die Grundstoffe in **Metalle** und **Nichtmetalle** ein. Metalle sind gute Wärme- und Elektrizitätsleiter; Nichtmetalle meist schlechte Leiter.

II. Legierungen

Legierungen entstehen, wenn man zwei oder mehrere Metalle **zusammenschmilzt.** Dabei entsteht keine chemische Verbindung, denn die Atome der beteiligten Metalle bestehen als selbständige Bestandteile nebeneinander. Es ergeben sich jedoch auch hier im Vergleich zu den unvermischten Bestandteilen andere physikalische und chemische Eigenschaften, z. B.

a) **Weichlote** (Legierungen aus Zinn und Blei). Schmelzpunkt Zinn 232°, Schmelzpunkt Blei 327°. Der niedrigste Schmelzpunkt dieser Legierung ist 181°. Lötzinn besteht aus 3 Teilen Zinn und 1 Teil Blei

b) **Bronzedraht** (Legierung aus Kupfer und Zinn). Freileitungen

c) **Konstantan** (Legierung aus Kupfer und Nickel). Widerstandsdraht

e) **Woodsches Metall** (Legierung aus Wismut –271°–, Blei –372°–, Kadmium –321°– und Zinn –232°–). Schmelzpunkt bei etwa 60°.

III. Chemische Verbindungen

1. Allgemeines

Bei den **zusammengesetzten** Stoffen **(chemischen Verbindungen)** werden die chemischen Zeichen der Elemente, aus denen diese Verbindungen bestehen, nebeneinandergesetzt. Dabei schreibt man die Anzahl der Atome der einzelnen Elemente etwas tiefer als die Zeichen der Elemente. An der so entstandenen chemischen Formel kann man also erkennen, aus welchen und wieviel Atomen der einzelnen Grundstoffe ein Molekül dieser chemischen Verbindung zusammengesetzt ist.

Beispiele:

a) **Wasser** hat die Formel H_2O, d. h. ein Molekül Wasser besteht aus zwei Atomen Wassertoff und einem Atom Sauerstoff.

b) **Kochsalz** hat die Formel NaCl, d. h. ein Molekül Kochsalz besteht aus einem Atom Natrium und einem Atom Chlor.

c) **Schwefelsäure** hat die Formel H_2SO_4, d. h. ein Molekül Schwefelsäure besteht aus zwei Atomen Wasserstoff, einem Atom Schwefel und vier Atomen Sauer-Sauerstoff.

Merke:

> Ein Molekül ist das **kleinste** Teilchen einer chemischen Verbindung.
> Ein Atom ist das **kleinste** Teilchen eines Elementes.

Damit aus zwei oder mehreren Stoffen eine neue chemische Verbindung entsteht, müssen die Atome in den Molekülen durch äußere physikalische Einwirkung gelockert werden (hohe Temperatur, Licht, elektrischer Strom usw.). Die neue chemische Verbindung ist stets ein völlig neuer Stoff mit anderen physikalischen und chemischen Eigenschaften. Die Umwandlung der Stoffe wird **chemischer Prozeß** genannt.

2. Chemischer Prozeß

Ein chemischer Prozeß (chemische Umsetzung, Reaktion) kann durch eine Gleichung dargestellt werden, z. B. bedeutet die Gleichung

$$HCl + NaOH = NaCl + H_2O$$

(andere Schreibweise: $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$),

daß Salzsäure (HCl) und Natronlauge (NaOH) durch einen chemischen Prozeß in Kochsalz (NaCl) und Wasser (H_2O) verwandelt werden. Die vor der Reaktion vorhandenen Grundstoffe oder chemischen Verbindungen werden stets auf die linke Seite der Gleichung gesetzt. Auf der rechten Seite erscheinen die neu entstandenen Grundstoffe und Verbindungen.

fernmeldelehrling.de

3. Wasser

Wasser ist eine der wichtigsten chemischen Verbindungen. Durch elektrischen Strom kann man Wasser in zwei gasförmige Elemente, **Wasserstoff** und **Sauerstoff,** zerlegen (Elektrolyse).

Mischt man umgekehrt die beiden Gase miteinander, so entsteht ein explosives Gasgemisch (Knallgas), das bei Entzündung Temperaturen von über 2000° erzeugt.

Wasserstoff – H_2 – wird zum autogenen Schneiden, Schweißen und Löten verwendet; dgl. u. a. Azetylen – C_2H_2 – (Flammtemperatur bis 3100°) und Propan – C_3H_8 – (Flammtemperatur bis 2750°).

Sauerstoff hat die Eigenschaft, sich mit fast allen Elementen zu verbinden. Diesen Vorgang nennt man **Oxydation.** Jeder Verbrennungsvorgang ist eine Oxydation, bei der ggf. eine Licht- und Wärmeentwicklung wahrgenommen wird. Je mehr Sauerstoff einem brennenden Stoff zugeführt wird, desto besser brennt er (Blasebalg beim Schmiedefeuer).

Verbrennungsvorgang:

$$C + O_2 = CO_2 \text{ (Kohlendioxyd)}$$

Bei zu geringer Luftzufuhr (Sauerstoffzufuhr) entsteht:

$2C + O_2 = 2CO$ (giftiges, farb- und geruchloses Kohlenoxydgas. Vorsicht bei schlecht ziehenden Öfen und offenen Koksfeuern, die z. B. zur Bauaustrocknung verwendet werden.)

Andere (langsame) Oxydationsvorgänge:

a) **Atmen von Mensch und Tier.**

Unsere Nahrungsmittel bestehen außer Sauerstoff vor allem aus Kohlenstoff und Wasserstoff. Da der in den Nahrungsmitteln enthaltende Sauerstoff nicht zur vollen Oxydation von C und H genügt, müssen wir noch zusätzlich Sauerstoff (Luft) einatmen.

Dabei geht im Körper folgender chemischer Prozeß vor sich:

C	+	O_2	=	CO_2		
Kohlenstoff		Sauerstoff		Kohlendioxyd	(wird ausgeatmet)	
H_2	+	O	=	H_2O		
Wasserstoff		Sauerstoff		Wasser	(wird durch die Nieren ausgeschieden)	

Dieser langsame „Verbrennungsvorgang" sorgt dafür, daß eine Körpertemperatur von 37° erreicht wird. Unsere Nahrungsmittel sind also „Brennstoffe"; deshalb werden sie auch nach Kalorien bewertet.

b) **Rosten des Eisens**

c) **Oxydation anderer Metalle (nur Oberfläche)**

Die Verbindungen, die bei der Oxydation entstehen, nennt man Oxyde.

4. Säuren

Säuren sind ätzende Flüssigkeiten. Das Vorhandensein von Säuren kann man durch Lackmusfarbstoff feststellen. Blauer Lackmusfarbstoff wird durch Säuren **rot** gefärbt.

Alle Säuren enthalten Wasserstoff, z. B.

Salzsäure – HCl –. Salzsäure wird u. a. zum Reinigen verwandt.

Schwefelsäure – H_2SO_4 –. Schwefelsäure wird u. a. zum Füllen von Akkumulatoren verwandt.

Salpetersäure – HNO_3 –. Salpetersäure wird vor allem zum Trennen von Metallen (Scheidewasser zum Trennen von Gold und Silber) und zur Herstellung von Farbstoffen verwandt.

5. Laugen

Laugen (Basen) sind ebenfalls ätzende Flüssigkeiten. Roter Lackmusfarbstoff wird durch Laugen **blau** gefärbt.

Laugen kann man an der OH-Gruppe erkennen, z. B.

Natronlauge – NaOH –. Fette werden durch Natronlauge chemisch aufgelöst. Natronlauge entsteht z. B. auch beim Waschen mit Seife. Natronlauge wird bei der Seifenherstellung verwendet.

6. Salze

Säuren und Laugen zeigen entgegengesetztes Verhalten. Bestimmte Mengen von Laugen und Säuren neutralisieren sich; d. h. sie zerstören sich gegenseitig. Gießt man Säuren und Laugen zusammen, so entsteht ein meist neutral reagierendes Salz, wobei Wasser frei wird, z. B.

HCl	+	NaOH	=	NaCl	+	H_2O
Salzsäure		Natronlauge		Kochsalz		Wasser

Neben dem Kochsalz gibt es in der Chemie noch viele andere Salze, z. B.

$CuSO_4$ (Kupfersulfat — Kupfervitriol)
$CaSO_4$ (Kalziumsulfat — Gips)
Na_2CO_3 (Natriumkarbonat — Soda)

fernmeldelehrling.de

Wiederholungsfragen zu den Grundgesetzen der Physik und zur Stoffkunde

1. Wie heißt der physikalisch kleinste Teil eines Körpers?
2. Was verstehen wir unter Kohäsion?
3. Was sind die kleinsten Teile eines Grundstoffes oder Elementes?
4. Welche Zustandsformen oder Agregatzustände gibt es?
5. Wodurch kann der Aggregatzustand eines Körpers geändert werden?
6. Welche Wirkungen kann eine Kraft verursachen?
7. Was verstehen wir unter Schwerkraft?
8. Welcher Unterschied besteht zwischen Masse und Gewicht?
9. Welche Bedeutung hat das Kräfteparallelogramm?
10. Wann stehen mehrere Kräfte im Gleichgewicht?
11. Wann wird auf einen Körper ein Drehmoment ausgeübt?
12. Wodurch wird die Größe des Drehmoments ausgeübt?
13. Welche Gleichgewichtsarten gibt es?
14. Was verstehen wir unter Trägheit und Beharrungsvermögen?
15. Wie ermittelt man die Geschwindigkeit eines Körpers?
16. Wie wird die Beschleunigung eines Körpers ermittelt?
17. Was verstehen wir unter Zentripetal- oder Zentralkraft?
18. Wie wird die mechanische Arbeit ermittelt?
19. Was versteht man unter mechanischer Leistung und wie wird sie ermittelt?
20. Welches Verhältnis gibt der Wirkungsgrad an?
21. Welche Grundformen kennt man bei den einfachen Maschinen?
22. Wie heißt die Gleichgewichtsbedingung für den Hebel?
23. Weshalb wird eine Rolle verwendet?
24. Wie groß muß die aufgewendete Kraft bei der festen und bei der losen Rolle sein?
25. Wie groß muß die aufgewendete Kraft bei einem Flaschenzug sein?
26. Was verstehen wir unter dem Übersetzungsverhältnis?
27. Welchen Frequenzbereich kann das menschliche Ohr wahrnehmen?
28. Mit welchen Meßgeräten kann die Temperatur festgestellt werden und worauf ist ihre Wirkung zurückzuführen?
29. Was versteht man unter einer Legierung?
30. Woraus besteht eine chemische Verbindung?

fernmeldelehrling.de

Band B 4 — Die Fachkunde

Die Wechselstromlehre (Dauermagnetismus; Elektromagnetismus; Fremdinduktion; Selbstinduktion; Bewegung durch Induktion; Entstehung des Wechselstromes; Spannungserzeuger; Wechselstromwiderstände; Wechselstromleistung; Mehrphasenwechselstrom; Schaltung von Wechselstromwiderständen; Resonanz; Vorgänge auf elektrischen Leitungen)

Band B 5 — Die Fachkunde

Elektrische Meßgeräte und Meßschaltungen

Band C 1 — Die handwerkliche Ausbildung

Werkstoffe der Fernmeldetechnik und ihre Bearbeitung; Werkzeuge und Werkzeugmaschinen (Eisen und Stahl, Kupfer, Zinn, Zink, Blei, Aluminium, Edelmetalle, u. a.; Werkstoffprüfung; Oberflächenschutz der Metalle; Nichtmetallische Werkstoffe; Isolierstoffe; Kunststoffe; Baustoffe; Messen und Anreißen; spanabhebende und spanlose Verformung; Verbindungsarten; Wärmebehandlung; Bohren, Senken, Reiben, Drehen, Fräsen)

Band C 2 — Die handwerkliche Ausbildung

Der oberirdische Linienbau — Planung und Bau oberirdischer Anschluß- und Fernlinien — Schlauchdrahtleitungen und Luftkabel

Band C 3 — Die handwerkliche Ausbildung

Der unterirdische Linienbau — Gestaltung der Fernmeldenetze — Die Fernmeldekabel — Aufgaben und Aufbau der Bauteile im Anschlußnetz

Band C 4 — Die handwerkliche Ausbildung

Aufbau und Wirkungsweise der Fernsprechapparate und Zusatzeinrichtungen

Band C 5 — Die handwerkliche Ausbildung

Grundzüge der Wählvermittlungstechnik (Bauelemente und ihre Verwendung; Zeichnungen, Pläne und ihre Erklärung; Gliederung und Aufbau der Ortswählvermittlungen und Systemmerkmale; Vorfeldeinrichtungen; Stromversorgung und Erdungsanlagen; Stromlauf der Wählsysteme 50 und 55; Signale; Prüfgeräte; Fernwählvermittlungsstellen)

— Weiteres siehe 2. und 4. Umschlagseite —

fernmeldelehrling.de

Band C 6 — Die handwerkliche Ausbildung

Nebenstellenanlagen (Zweck der Nebenstellenanlagen; Rechtsbestimmungen; Sprechstellen; Leitungen und Fernsprechapparate; Ausführung der Anlagen, Baustufen; Stromversorgung; Schaltungsaufbau (kleine Nebenstellenanlagen, Reihenanlagen und kleine Schrankanlagen); Grundaufbau der mittleren und großen Wählernebenstellenanlagen)

Band C 7 — Die handwerkliche Ausbildung

Der Sprechstellenbau (Bauauftrag; Einrichtungs- und Änderungsgebühren; Teilnehmereinrichtungen; Fernmeldebauzeug; Bauausführung)

Umfang je Band etwa 140 Seiten

Deutsch und Rechnen

Wichtig zur Vorbereitung
auf Eignungsfeststellungen und Prüfungen

Deutsch

Rechtschreiblehre — Wortlehre — Satzlehre — Zeichensetzung — Stil- und Aufsatzkunde
Umfang 120 Seiten **Preis je Band 2,50 DM**

Rechenlehre

Rechnen — Raumlehre — Algebra
Übungs- und Prüfungsaufgaben — Lösungsheft
Umfang 160 Seiten **Preis 3,20 DM**

— Weiteres siehe 2. und 3. Umschlagseite —

Sämtliche Lehrwerke können bestellt werden bei

Deutsche Postgewerkschaft Verlag GmbH.

6 Frankfurt — Savignystraße 29