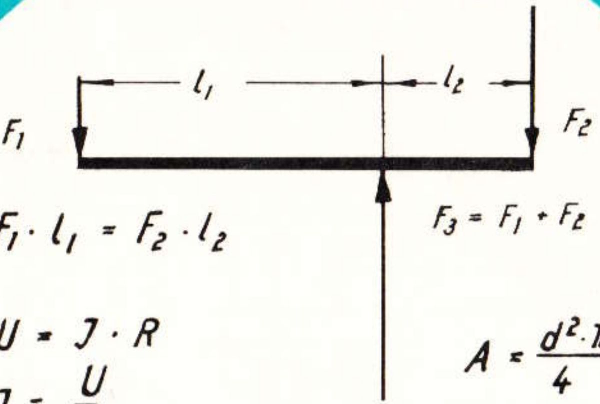
fernmeldelehrling.de

Handbuch der Fernmeldetechnik

— Buchreihe AFt —



$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

$F_3 = F_1 + F_2$

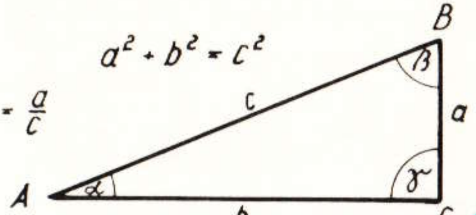
$U = J \cdot R$

$J = \frac{U}{R}$

$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$



Band B 1

Grundkenntnisse der Physik und Mathematik

fernmeldelehrling.de

Handbuch der Fernmeldetechnik *)

— Buchreihe AFt —

16 **wichtige Lehr- und Lernwerke für den FLehrl; auch für den Handwerker F und den Fernmeldehandwerker zur Vorbereitung auf die Grundlehrgänge Ft 1 und 2 gut geeignet!**

Band A 1 — **Allgemeine Berufskunde**
Weg und Ziel der Ausbildung — Lehrvertrag — Fernmeldehandwerkerprüfung — Tarifvertrag — Gesetze und Verordnungen des Fermeldewesens

Band A 2 — **Allgemeine Berufskunde**
Allgemeines über den Staatsaufbau — Aufgaben und Gliederung der DBP — Sozialeinrichtungen bei der DBP — Musterausarbeitungen und Musterthemen

Band B 1 — **Grundkenntnisse der Physik und Mathematik**
Erklärung der Grundgrößen der Physik — Buchstabenrechnen — Lösen von Gleichungen — Umstellen von Formeln

Band B 2 — **Fachzeichnen in der Fernmeldetechnik**
Technisches Zeichnen — Stromlaufzeichnen — Planunterlagen und Zeichnen in der Linientechnik

Band B 3 — **Die Gleichstromlehre**
Wesen der Elektrizität — Größen, Einheiten und Gesetze im Gleichstromkreis — Wirkungen des elektrischen Stromes — Arten der Spannungserzeugung — Elektrisches Feld — Kondensator

Band B 4 (2 Teile) — **Die Wechselstromlehre**
Dauermagnetismus — Elektromagnetismus — Fremdinduktion — Selbstinduktion — Entstehung des Wechselstromes — Wechselstromwiderstände — Vorgänge auf elektrischen Leitungen — Elektronenröhren — Halbleiterschaltungen — Transistoren

Band B 6 (2 Teile) — **Beispiele und Aufgaben aus der Fernmeldetechnik**
Übungsbeispiele und Aufgabensammlung aus der Physik und der Gleich- und Wechselstromlehre — Berechnen elektrischer Größen in Schaltungen der Fernmeldetechnik

— Weitere Lehrbücher siehe 3. und 4. Umschlagseite —

*) Frühere Bezeichnung „Handbuch für den Fernmeldehandwerker der DBP"

HANDBUCH der FERNMELDETECHNIK

— Buchreihe AFt —

Bücherei der Oberpostdirektion München
Gruppe: III Aa
Nr. 113 a

BAND B 1

Grundkenntnisse der Physik und Mathematik

Erklärung der Grundgrößen der Physik; Buchstabenrechnen; Lösen von Gleichungen; Umstellen von Formeln

3., verbesserte und erweiterte Auflage

Verlag: Deutsche Postgewerkschaft-Verlag GmbH
6 Frankfurt — Savignystraße 29

fernmeldelehrling.de

Vorwort

Die sechzehn Bände des **„Handbuchs der Fernmeldetechnik — Buchreihe AFt —"** sollen

1. **den Fernmeldelehrlingen während der Lehrzeit ein ständiger Begleiter sein und ihnen eine umfassende und gute Prüfungsvorbereitung ermöglichen,**
2. **den Fernmeldearbeitern bei der Vorbereitung auf die Prüfung nach dem Tarifvertrag, § 10, behilflich sein,**
3. **den Handwerkern aus artverwandten Berufen aufzeigen, welches Fachwissen erforderlich ist, um genausoviel zu wissen wie die Lehrlinge am Ende ihrer Lehrzeit,**
4. **den Fernmeldehandwerkern die Möglichkeit geben, ihr Wissen aufzufrischen und es auf den neuesten Stand der Fernmeldetechnik zu bringen und**
5. **eine ausreichende Vorbereitung auf den Lehrstoff der dienstlichen Grundlehrgänge gewährleisten.**

In der Fernmeldehandwerkerprüfung sowie in den Grundlehrgängen Ft 1 und 2 müssen neben den praktischen Fertigkeiten auch die theoretischen Fachkenntnisse über die Fernmeldetechnik vorhanden sein. Das gleiche gilt hinsichtlich der Kenntnisse in dem wichtigen Prüfungsfach „Allgemeine Berufskunde" sowie in bezug auf die Grundkenntnisse über die für das Fernmeldewesen wichtigen Gesetze und Verordnungen wie FAG, TWG und FeO. Einer der Bände allein kann dem Leser dieses umfangreiche Wissen nicht vermitteln; alle sechzehn Bände zusammen (vgl. hierzu die Angaben auf der 2. und 3. Umschlagseite) enthalten jedoch das Fachwissen, das sich der Leser im Interesse des Prüfungserfolges und seines weiteren Aufstiegs aneignen muß. In dem „Handbuch der Fernmeldetechnik" ist nur der unbedingt notwendige Lehrstoff in einfachster Form behandelt worden. Die Verfasser erheben nicht den Anspruch, daß die Bände alle Vorschriften und technischen Einzelheiten sowie das in der Praxis selten oder gar nicht Vorkommende enthalten. Ihnen ging es vielmehr darum, eine

Fibel **für den Fernmeldelehrling,**
für den Fernmeldearbeiter,
für den Handwerker aus artverwandten Berufen und
für den Fernmeldehandwerker

zu schaffen, die der gestellten Aufgabe ohne unnötigen Ballast im Interesse der Leser gerecht wird.

Stand: Frühjahr 1968

Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

INHALTSVERZEICHNIS

fernmeldelehrling.de

Seite

Seite

fernmeldelehrling.de

Einführung in die Mathematik

Die bei der Deutschen Bundespost hochentwickelte und weitverbreitete Elektro- und Fernmeldetechnik verlangt heute von jedem Fernmeldehandwerker gründliche theoretische Fachkenntnisse.

In dem vorliegenden Band „B 1“ wird versucht, dem Fernmeldehandwerker die erforderlichen mathematischen und physikalischen Grundbegriffe zu vermitteln. Jedes technische Wissen wird beherrscht durch „Maß“ und „Zahl“. Die mathematischen Grundkenntnisse sollen deshalb besonders ausführlich, aber mit Rücksicht auf die Vorkenntnisse der FHandw in einfacher Form dargestellt werden.

Aus der Zielsetzung ergibt sich, daß die „Buchstabenrechnung“ und „die Lehre von den Gleichungen“ einen besonders großen Raum einnehmen, weil für das Verständnis der technischen Vorgänge die Behandlung von algebraischen Formeln unerläßlich ist.

Alle Gebiete sind ohne unnötigen Ballast nur so weit behandelt worden, wie sie für das Verständnis und für die Berechnung fachlicher Vorgänge für einen Fernmeldehandwerker unbedingt erforderlich sind.

1. Rechnen mit bestimmten Zahlen

1.1. Allgemeines

Die Lehre von den Zahlen und ihren Beziehungen zueinander heißt **Arithmetik** (griech. arithmos = Zahl).

Die Rechenlehre umfaßt das Rechnen

mit bestimmten Zahlen,

die durch die Reihe der natürlichen Zahlen gegeben sind (1, 2, 3 usw.) und

mit unbestimmten Zahlen,

die auch „**allgemeine**“ Zahlen genannt werden. Als unbestimmte Zahlen verwendet man kleine und große **Buchstaben**, z. B. a, b, c, x, y, z, R, U, V usw.

Ein besonderes Anwendungsgebiet des Buchstabenrechnens ist die **Algebra.** Unter Algebra versteht man das Rechnen mit **Gleichungen.**

fernmeldelehrling.de

Bestimmte und unbestimmte Zahlen können mit **positiven** oder **negativen** Vorzeichen versehen sein. Man nennt sie dann

„relative Zahlen", z. B. (-2); $(+a)$; $(-b)$ usw.

Die Erläuterung der relativen Zahlen erfolgt später mit Hilfe der **„Zahlengeraden"**.

Der Wert einer Zahl wird bezeichnet als

„absoluter Wert".

Beispielsweise ist der absolute Wert der Zahl 12 größer als der von 11.

Man unterscheidet 3 Stufen der Rechenarten:

Die **I. Stufe** umfaßt die Addition und Subtraktion (Strichrechnung).

Die **II. Stufe** umfaßt die Multiplikation und Division (Punktrechnung).

Die **III. Stufe** umfaßt die Potenz- und Wurzelrechnung.

Die Rechenarten der I. und II. Stufe nennt man auch die **4 Grundrechnungsarten.**

1.2. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen

Die **Rechenzeichen** der Addition und Subtraktion bestehen aus **Strichen**, daher auch die landläufige Bezeichnung **„Strichrechnung"**.

1.2.1. Addition (Zusammenzählen)

Das **Rechenzeichen** der Addition ist $+$ **(plus).**

Das **Gleichheitszeichen** $(=)$ verbindet eine Rechenaufgabe miteinander.

Die Zahlen, die addiert werden sollen, heißen **Summanden** (auch Posten).

Das Ergebnis der Addition heißt **Summe.**

Die **Reihenfolge** der Summanden ist **beliebig.**

Die Aufgabe $25 + 37 = 62$ ist zu lesen: 25 plus 37 gleich 62.

25	+	37	=	62
Summand		Summand		Summe

1.2.2. Subtraktion (Abziehen)

Das **Rechenzeichen** der Subtraktion ist $-$ **(minus).**

Die Zahl, von der subtrahiert wird, heißt **Minuend;**

die Zahl, die subtrahiert wird, heißt **Subtrahend.**

Das Ergebnis der Subtraktion ist die **Differenz.**

Die Aufgabe $45 - 15 = 30$ ist also zu lesen: 45 minus 15 gleich 30.

45	−	15	=	30
Minuend		Subtrahend		Differenz

1.2.3. Multiplikation ganzer Zahlen (Malnehmen)

Das **Rechenzeichen** der Multiplikation ist $\cdot$ **(mal).**

Die Zahlen, die multipliziert werden, heißen **Faktoren.**

Das Ergebnis der Multiplikation wird **Produkt** genannt.

Die **Reihenfolge** der Faktoren ist **beliebig.**

25	·	3	=	75
Faktor		Faktor		Produkt
(Multiplikant)		(Multiplikator)		(Produkt)

1.2.4. Division ganzer Zahlen (Teilen)

Das **Rechenzeichen** der Division ist : **(durch)** oder ein **Bruchstrich.**

Die Zahl, die dividiert wird, heißt **Dividend;**

die Zahl, durch die dividiert wird, **Divisor.**

Das Ergebnis der Division heißt **Quotient.**

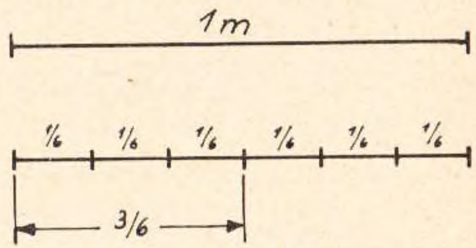
42	:	6	=	7
Dividend		Divisor		Quotient

oder mit Bruchstrich: $\frac{42}{6} = 7$

1.3. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen

1.3.1. Allgemeines über die gewöhnliche Bruchrechnung

Ein Bruch entsteht, wenn man **ein Ganzes** (1) in eine **Anzahl gleicher** Teile teilt und einen oder mehrere davon nimmt.



(Abb. 1)

fernmeldelehrling.de

$$\frac{3}{6} \quad \left(\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}\right)$$

Die Zahl, die angibt **(nennt)**, in wieviel gleiche Teile das Ganze geteilt worden ist, heißt **Nenner.**

Die Zahl, die besagt, wieviel von diesen Teilen genommen **(gezählt)** werden sollen, heißt **Zähler.**

Der Zähler steht **über,** der Nenner **unter** dem Bruchstrich.

Man unterscheidet:

a) **echte Brüche:** $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; der **Zähler** ist **kleiner** als der **Nenner**

b) **unechte Brüche:** $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; der **Zähler** ist **größer** als der **Nenner**

c) **gemischte Zahlen:** $2\frac{2}{3}$; $3\frac{4}{5}$; **Ganze** und **Brüche**

1.3.2. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, heißen Primzahlen.

Beispiele: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Alle übrigen Zahlen sind **zusammengesetzte Zahlen**; sie lassen sich nämlich als Produkt aus mehreren Primzahlen **zusammensetzen.**

Beispiele: $6 = 2 \cdot 3$; $9 = 3 \cdot 3$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Übungsaufgabe:

Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 100 auf und unterstreichen Sie die Primzahlen.

1.3.3. Teilbarkeit

Eine Zahl ist ohne Rest teilbar durch

- **2** : wenn am **Ende** eine **2, 4, 6, 8** oder **0** steht
- **3** : wenn ihre **Quersumme** durch **3** teilbar ist
- **4** : wenn die **beiden letzten Ziffern** durch **4** teilbar sind
- **5** : wenn am **Ende** eine **5** oder **0** steht
- **6** : wenn sie durch **2** und **3** teilbar ist
- **8** : wenn die **letzten drei Ziffern** durch **8** teilbar sind
- **9** : wenn ihre **Quersumme** durch **9** teilbar ist
- **10** : wenn am **Ende** eine **0** steht
- **25** : wenn die **letzten beiden Ziffern** durch **25** teilbar sind

1.3.4. Der größte gemeinsame Teiler (g. g. T.)

Für das **Kürzen** der Brüche sucht man den größten gemeinsamen Teiler **(g. g. T.).**

Von den Zahlen **40, 60** und **80** findet man den **g. g. T.,** wenn man sie in ihre **Primfaktoren** zerlegt und die **gemeinsam** vorkommenden Primfaktoren miteinander multipliziert.

$$\left.\begin{array}{l} 40 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{5} \\ 60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{5} \\ 80 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \textbf{g. g. T.} \\ \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 5 = 20} \end{array}$$

1.3.5. Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.)

Bei der Addition von Brüchen wird für das Aufsuchen des **Hauptnenners** das k. g. V. gebraucht.

Aufsuchen des k. g. V. durch Kopfrechnen:

In der folgenden Darstellung sind die **gemeinsamen Vielfache** von **8** und **12** unterstrichen:

Vielfache von **8** sind:	16	$\underline{\mathbf{24}}$	32	40	$\underline{\mathbf{48}}$	56	64	$\underline{\mathbf{72}}$
Vielfache von **12** sind:		$\underline{\mathbf{24}}$	36		$\underline{\mathbf{48}}$	60		$\underline{\mathbf{72}}$

Von den unterstrichenen gemeinsamen Vielfachen ist **24** das **kleinste gemeinsame Vielfache,** abgekürzt **k. g. V.** Es wurde durch Probieren gefunden.

Schriftliches Aufsuchen des k. g. V.:

Will man z. B. von mehreren Zahlen 6, 3, 4, 12, 18, 70, 5, 28 und 25 das **k. g. V.** aufsuchen, so ist folgendes zu beachten:

a) Die Zahlen, die in anderen enthalten sind, scheiden aus. 6, 3, 4, 5 sind also in der nachfolgenden Zahlenaufstellung gestrichen.

b) Die übrigen Zahlen werden in **Primfaktoren** zerlegt (Abb. 2).

c) Nach der Zerlegung der Zahlen wird festgestellt, welche **verschiedenen Primfaktoren** vorkommen (hier sind es 2, 3, 5 und 7).

d) Die nach c) festgestellten Primzahlen bleiben nur in der Zeile stehen, wo sie am häufigsten vorkommen. Die 3 kommt in der Zeile „18" am häufigsten vor und wird deshalb in der Zeile „12" gestrichen. Wenn die 2 in der Zeile „12" und „28" je zweimal vorkommt, so darf sie nur in einer Zeile stehenbleiben, vielleicht in der Zeile „12".

e) Aus dem Produkt der stehengebliebenen Primzahlen findet man das k. g. V.

fernmeldelehrling.de

Zahlen	Primfaktoren
$\cancel{6}$	
$\cancel{3}$	
$\cancel{4}$	
12	$2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}$
18	$\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3$
70	$\cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot 7$
$\cancel{5}$	
28	$\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7}$
25	$5 \cdot 5$

k.g.V. $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{6300}$

(Abb. 2)

Im nächsten Abschnitt wird die Ermittlung des k. g. V. beim Suchen des **Hauptnenners** für **ungleichnamige Brüche** eine wertvolle Hilfe sein.

Übungsaufgaben:

Das k.g.V. ist zu bestimmen

a) 4, 5, 9, 8, 12,

b) 5, 6, 8, 9, 15, 25,

c) 12, 16, 36, 60, 54

1.3.6. Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche:

> **Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.**

Beispiele:

a) $\frac{3}{12} + \frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

c) $2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} = 5\frac{2}{3}$

d) $3\frac{1}{6} + 1\frac{5}{6} + 2\frac{4}{6} = 6\frac{10}{6} = 6\frac{5}{3} = 7\frac{2}{3}$

Merke:

Das Ergebnis wird stets gekürzt, z.B. $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

> **Kürzen heißt, Zähler und Nenner durch den größten gemeinsamen Teiler dividieren. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.**

Unechte Brüche verwandelt man in gemischte Zahlen, z.B. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Gemischte Zahlen werden addiert, indem man die Ganzen und die Brüche für sich addiert , z. B. $2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{4} = 5\frac{3}{4}$

Übungsaufgaben:

$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$; $\frac{12}{8} - \frac{7}{8} =$; $1 - \frac{2}{5} =$

$\frac{11}{12} - \frac{3}{12} + \frac{4}{12} =$; $17 - \frac{9}{11} =$; $32 - 17\frac{3}{4} =$

a) Ein Schüler bezahlte zwei Rechnungen über $5\frac{2}{5}$ DM und $7\frac{4}{5}$ DM. Wieviel DM mußte er zurückbringen, wenn ihm sein Vater 20 DM mitgegeben hatte?

b) Bestimmen Sie die Summe aller **echten** Brüche:
1) deren Zähler gerade und deren Nenner 15 ist,
2) deren Zähler größer als 30 und deren Nenner 40 ist,
3) deren Zähler eine Primzahl und deren Nenner 50 ist.

c) Zu welchen Zahlen muß man $28\frac{3}{5}$ addieren, um 30, 100, $127\frac{2}{5}$ und $199\frac{4}{5}$ zu erhalten?

Ungleichnamige Brüche:

> **Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Brüche zunächst gleichnamig macht und dann die Zähler addiert oder subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.**

Beispiel: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = ?$

Die **ungleichnamigen** Brüche $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$ sind **gleichnamig** zu machen. Hierzu muß man den **Hauptnenner,** in dem alle vorhandenen Nenner als Teiler enthalten sind, aufsuchen. Der Hauptnenner ist aber nichts anderes als das kleinste gemeinsame Vielfache **(k.g.V.)** der einzelnen Nenner.

fernmeldelehrling.de

Vielfache von **2** sind: 2 4 6 8 10 **12**
Vielfache von **3** sind: 3 6 9 **12**
Vielfache von **4** sind: 4 8 **12**

Das k.g.V. zu 2, 3 und 4 ist also „12".

Die ungleichnamigen Brüche $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ können jetzt in **gleichnamige** Brüche mit dem Hauptnenner **„12"** durch Erweiterung umgewandelt werden.

Merke:

> **Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert. Der Wert des Bruches ändert sich dadurch nicht.**

Für die erforderliche Erweiterung der vorstehenden Brüche (auf den Hauptnenner „12") muß der Bruch $\frac{1}{2}$ im Nenner mit „6" multipliziert werden, weil $2 \cdot 6 = 12$ ergibt. Gleichzeitig muß aber auch der Zähler mit derselben Zahl ($\cdot$ 6) multipliziert werden, damit der Wert des Bruches sich nicht ändert. Die anderen Brüche werden ebenfalls erweitert:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12} \quad \text{also} \quad \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$$

Folgende ungleichnamige Brüche sind zu addieren:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{18} + \frac{11}{16} + \frac{13}{24} + \frac{5}{9} + \frac{7}{32} = ?$$

Aufsuchen des Hauptnenners:	Primfaktoren
~~4~~	
18	$\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3$
~~16~~	
24	$\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}$
~~9~~	
32	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Hauptnenner $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{288}$

(Abb. 3)

Die **ungleichnamigen** Brüche müssen so erweitert werden, daß sie **gleichnamige** Brüche mit dem Hauptnenner **„288"** ergeben.

Merke:

> Die **Erweiterungszahl** findet man, indem man den Hauptnenner durch den Nenner des zu erweiternden Bruches teilt.

Für den ersten Bruch „$\frac{3}{4}$" ergibt sich demnach die Erweiterungszahl aus $\frac{288}{4} = 72$. Für „$\frac{7}{18}$" ergibt sich die Erweiterungszahl aus $\frac{288}{18} = 16$ usw.

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{18} + \frac{11}{16} + \frac{13}{24} + \frac{5}{9} + \frac{7}{32} =$$

$$\frac{3 \cdot 72}{4 \cdot 72} + \frac{7 \cdot 16}{18 \cdot 16} + \frac{11 \cdot 18}{16 \cdot 18} + \frac{13 \cdot 12}{24 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 32}{9 \cdot 32} + \frac{7 \cdot 9}{32 \cdot 9} =$$

$$\frac{216}{288} + \frac{112}{288} + \frac{198}{288} + \frac{156}{288} + \frac{160}{288} + \frac{63}{288} = \frac{905}{288} = 3\frac{41}{288}$$

Merke:

Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiert werden, so verwandelt man vorher einen Einer der ganzen Zahl in einen gleichnamigen Bruch.

z. B. $5 - \frac{1}{2} = 4\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Eine gemischte Zahl wird von einer anderen gemischten Zahl subtrahiert, indem man erst die Ganzen und dann den Bruch subtrahiert.

z. B. a) $5 - 2\frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

b) $9\frac{5}{12} - 2\frac{7}{12} = 7\frac{5}{12} - \frac{7}{12} = 6\frac{17}{12} - \frac{7}{12} = 6\frac{10}{12} = 6\frac{5}{6}$

Bei schwierigen Aufgaben ist folgende Lösungsform übersichtlich:

a) $9\frac{7}{12} + 6\frac{15}{16} + 5\frac{3}{4} + 3\frac{5}{8} + 2\frac{13}{18} = ?$

H.N. 144	
$9\frac{7}{12}$	84
$+6\frac{15}{16}$	135
$+5\frac{3}{4}$	108
$+3\frac{5}{8}$	90
$+2\frac{13}{18}$	104
25	$\frac{521}{144} = 28\frac{89}{144}$

(Abb. 4)

Aufsuchen des H.N. (k.g.V.)

12	$\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}$
16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$\cancel{4}$	
$\cancel{6}$	
18	$\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3$

H.N. $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$

(Abb. 5)

b) $4\frac{37}{120} - 3\frac{99}{100} = ?$

H.N = 600	
$4.\frac{37}{120}$	$\cancel{185}$ 785
$-3\frac{99}{100}$	594
	$\frac{191}{600}$

120	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{5}$
100	$\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot 5$

H.N. $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
$= 600$

(Abb. 6)

Ist der **Zähler** des gleichnamig gemachten **Minuendbruches** (185) zu klein, so wird ein **Einer** der Ganzen in einen gleichnamigen Bruch verwandelt;

man ersetzt den zu kleinen Zähler (185) des Minuenden durch den um ein Ganzes $\left(\frac{600}{600}\right)$ vermehrten Zähler (185 + 600 = 785). Durch einen **Punkt** neben dem Einer (4.) wird angedeutet, daß dieser um 1 vermindert wurde.

Übungsaufgaben:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} =$; $\frac{15}{16} - \frac{3}{20} =$

$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{5}{18} =$; $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9} =$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{10} =$; $\frac{7}{9} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} =$; $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} - \frac{7}{20} =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} =$; $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$; $1\frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

$9\frac{5}{8} + 2\frac{13}{16} =$; $20\frac{1}{3} + 2\frac{3}{4} =$; $5\frac{1}{6} - 2\frac{3}{8} =$

$15\frac{5}{7} + 10\frac{1}{2} =$; $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} =$; $5\frac{1}{30} - 2\frac{7}{15} =$

$\frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} =$; $\frac{5}{6} + \frac{11}{15} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10} =$

$\frac{7}{12} + \frac{3}{5} - \frac{8}{15} + \frac{1}{4} =$; $\frac{25}{36} - \frac{1}{8} - \frac{5}{24} - \frac{2}{9} =$

$48\frac{9}{10} + 7\frac{19}{24} + 50\frac{3}{4} + 35\frac{5}{6} =$; $39\frac{37}{60} + 5\frac{11}{15} + 83\frac{13}{20} + 27\frac{23}{45} =$

a) Meine Schwester ist 17 Jahre 8 Monate alt, ich bin $2\frac{5}{6}$ Jahre älter. Wie alt bin ich?

b) Unser Vater wollte $\frac{3}{5}$ Sack Mehl kaufen. Wir baten aber so lange, bis er $\frac{3}{4}$ Sack nahm. Denn so gab es 6 kg mehr Mehl zum Kuchenbacken. Wieviel kg wog der volle Sack?

c) Wieviel Schüler sind in der Klasse, wenn 6 Schüler, d. h. $\frac{1}{8}$ der Klasse, das Sportabzeichen erworben haben?

d) Ein Zug, der $1\frac{3}{4}$ Stunden Verspätung hatte, traf um 17.15 Uhr am Zielort ein. Wann hätte er planmäßig eintreffen müssen?

1.3.7. Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl

> **Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit ihr multipliziert.**

fernmeldelehrling.de

fernmeldelehrling.de

z. B. $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ oder $\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$

Da das **Kürzen** die Rechnung vereinfacht, kürzt man immer schon das unausgerechnete Produkt.

Beispiele:

a) $\frac{17}{36} \cdot 24 = \frac{17 \cdot \overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$

b) $\frac{47}{306} \cdot 459 = \frac{47 \cdot \overset{3}{\overset{\cancel{51}}{\cancel{459}}}}{\underset{2}{\underset{\cancel{34}}{\cancel{306}}}} = \frac{141}{2} = 70\frac{1}{2}$

c)

$$73\frac{95}{121} \cdot 99 = 73 \cdot 99 + \frac{95 \cdot \overset{9}{\cancel{99}}}{\underset{11}{\cancel{121}}} = 7227 + \frac{855}{11} = 7227 + 77\frac{8}{11} = 7304\frac{8}{11}$$

Übungsaufgaben:

$\frac{6}{7} \cdot 9 =$; $\frac{7}{8} \cdot 9 =$; $\frac{7}{11} \cdot 8 =$; $\frac{5}{12} \cdot 7 =$; $\frac{8}{9} \cdot 8 =$

$\frac{5}{9} \cdot 13 =$; $\frac{7}{13} \cdot 12 =$; $\frac{2}{5} \cdot 14 =$; $\frac{5}{14} \cdot 15 =$; $\frac{16}{17} \cdot 7 =$

$\frac{11}{12} \cdot 24 =$; $\frac{9}{16} \cdot 12 =$; $\frac{17}{36} \cdot 24 =$; $\frac{25}{72} \cdot 24 =$; $\frac{5}{12} \cdot 20 =$

$13 \cdot \frac{11}{7} =$; $19 \cdot \frac{7}{15} =$; $11 \cdot \frac{89}{121} =$; $16 \cdot \frac{25}{37} =$; $16 \cdot \frac{20}{27} =$

$1\frac{7}{12} \cdot 4 =$; $2\frac{3}{8} \cdot 6 =$; $3\frac{4}{9} \cdot 6 =$; $4\frac{5}{6} \cdot 4 =$; $10\frac{1}{2} \cdot 10 =$

$16 \cdot 4\frac{3}{8} =$; $8 \cdot 9\frac{11}{16} =$; $7 \cdot 8\frac{13}{14} =$; $6 \cdot 5\frac{13}{15} =$; $4 \cdot 9\frac{7}{10} =$

1.3.8. Multiplikation zweier Brüche

> **Man multipliziert zwei Brüche miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.**

Gemischte Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man sie **erst** zu unechten Brüchen macht und dann ebenfalls Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Vor der Ausführung der Multiplikation ist **stets zu kürzen,** z. B.

a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$ b) $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{2 \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{3} \cdot 5} = \frac{4}{5}$

c) $1\frac{11}{64} \cdot \frac{56}{375} = \frac{\overset{1}{\cancel{75}} \cdot \overset{7}{\cancel{56}}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot \underset{5}{\cancel{375}}} = \frac{7}{40}$ d) $6\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 20$

Hat man **mehr** als zwei Brüche oder gemischte Zahlen zu multiplizieren, so setzt man alles auf **einen Bruchstrich** und **kürzt** erst einmal, z. B.

$$3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{34} \cdot \frac{10}{111} = \frac{\cancel{17} \cdot \overset{1}{\cancel{37}} \cdot \overset{1}{\overset{\cancel{2}}{\cancel{10}}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{34}}} \cdot \underset{3}{\cancel{111}}} = \frac{1}{3}$$

Übungsaufgaben:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} =$; $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} =$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{12}{13} =$; $\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{17} =$

$\frac{3}{20} \cdot \frac{7}{11} =$; $\frac{6}{11} \cdot \frac{113}{253} =$; $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} =$; $\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{9} =$

$1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} =$; $2\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{22} =$; $3\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} =$; $17\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} =$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} =$

$1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} =$; $2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} =$; $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{13}{15} \cdot \frac{5}{7} =$

$2\frac{3}{4} \cdot 5\frac{6}{7} \cdot 8\frac{9}{10} =$; $6\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{75} \cdot 4\frac{1}{2} =$; $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} =$

1.3.9. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

> **Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert oder**
> **den ersten Bruch mit dem reziproken (umgekehrten) Wert der ganzen Zahl multipliziert,**

Der **reziproke Wert** der ganzen Zahl „4" ist $\frac{1}{4}$.

Vor dem Ausmultiplizieren ist zu kürzen, falls es möglich ist.

a) $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$ b) $\frac{14}{15} : 7 = \frac{2}{15}$

fernmeldelehrling.de

c) $\frac{1}{3} : 4 = \mathbf{\frac{1}{12}}$ d) $\frac{3}{5} : 2 = \mathbf{\frac{3}{10}}$

e) $\frac{15}{8} : 6 = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{8 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \mathbf{\frac{5}{16}}$ f) $\frac{35}{36} : 10 = \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{36 \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \mathbf{\frac{7}{72}}$

Ersetzt man in den vorstehenden Aufgaben das Rechenzeichen (:) durch einen Bruchstrich, so lauten die Aufgaben:

$$\frac{\frac{3}{4}}{3} = ? \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{14}{15}}{7} = ?$$

Dabei entstehen sog. Doppelbrüche. Der Hauptbruchstrich ist besonders zu kennzeichnen und muß in Höhe des Gleichheitszeichens stehen.

Um die Doppelbruchstriche zu vermeiden, verwendet man unter Berücksichtigung der Bruchregel **einen** gemeinsamen Bruchstrich, z. B.

$$\frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}; \qquad \frac{\frac{14}{15}}{7} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \cdot 1}{15 \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{2}{15}$$

Merke:

Bei gemischten Zahlen sind erst die Ganzen und dann die Brüche zu dividieren.

z. B. $4\frac{1}{8} : 2 = 2 + \frac{1}{8} : 2 = 2 + \frac{1}{16} = \mathbf{2\frac{1}{16}}$

Sind die Ganzen zu **klein**, oder bleibt bei der Division der Ganzen ein Rest, so bringt man sie auf den **Nenner** des Bruches und dividiert den **unechten Bruch.**

z. B. a) $3\frac{2}{3} : 4 = \frac{11}{3} : 4 = \frac{11 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{11}{12}$

b) $25\frac{1}{2} : 17 = \frac{51}{2} : 17 = \frac{51}{2 \cdot 17} = \frac{3}{2} = \mathbf{1\frac{1}{2}}$

Übungsaufgaben:

$\frac{2}{3} : 2 =$; $\frac{6}{7} : 3 =$; $\frac{8}{9} : 4 =$; $\frac{3}{5} : 2 =$; $\frac{2}{3} : 3 =$

$\frac{6}{7} : 4 =$; $\frac{12}{13} : 9 =$; $\frac{4}{15} : 12 =$; $\frac{5}{13} : 15 =$; $\frac{12}{19} : 8 =$

$\frac{21}{25} : 7 =$; $\frac{39}{70} : 52 =$; $\frac{7}{18} : 19 =$; $\frac{256}{363} : 32 =$; $\frac{17}{33} : 15 =$

$6\frac{2}{3} : 2 =$; $24\frac{8}{11} : 4 =$; $35\frac{14}{15} : 7 =$; $27\frac{2}{3} : 9 =$

$\frac{1}{3} : 10 =$; $6\frac{2}{3} : 5 =$; $7\frac{1}{2} : 5 =$; $51\frac{1}{3} : 2 =$

$15\frac{3}{4} : 7 =$; $11\frac{12}{13} : 14 =$; $29\frac{2}{5} : 9 =$; $36\frac{2}{3} : 45 =$

$\left(5\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}\right) : 4 =$; $\left(11\frac{1}{30} - 10\frac{1}{2}\right) : 12 =$; $\left(174\frac{2}{3} - 148\frac{65}{69}\right) : 25 =$

1.3.10. Division zweier Brüche

Man dividiert durch einen Bruch (Divisor), indem man mit dem reziproken (umgekehrten) Wert multipliziert.

Gemischte Zahlen werden vor dem Dividieren in unechte Brüche verwandelt.

z. B. a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \mathbf{\frac{14}{15}}$

b) $3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = \mathbf{3\frac{3}{4}}$

c) $\frac{1}{7} : \frac{3}{14} = \frac{1}{\underset{}{\cancel{7}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{3} = \frac{2}{3}$ d) $3\frac{1}{5} : 1\frac{7}{25} = \frac{16}{5} : \frac{32}{25} = \frac{\cancel{16} \cdot \overset{5}{\cancel{25}}}{\cancel{5} \cdot \underset{2}{\cancel{32}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

1.3.11. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch

Man dividiert eine ganze Zahl durch einen Bruch, indem man ebenfalls mit dem reziproken Wert des Bruches multipliziert.

z. B. a) $6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ b) $12 : \frac{4}{5} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15$

Übungsaufgaben:

$\frac{6}{7} : \frac{2}{7} =$; $\frac{4}{5} : \frac{2}{5} =$; $1 : \frac{1}{5} =$

$\frac{75}{98} : \frac{25}{98} =$; $3\frac{1}{2} : \frac{1}{2} =$; $7\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2} =$

$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} =$; $\frac{1}{5} : \frac{2}{3} =$; $\frac{3}{7} : \frac{2}{3} =$; $\frac{4}{5} : \frac{1}{2} =$

$\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} =$; $\frac{4}{5} : 1\frac{1}{3} =$; $\frac{7}{8} : 2\frac{1}{3} =$

fernmeldelehrling.de

$4 : \frac{4}{7} =$; $8 : 5\frac{1}{3} =$; $10 : 7\frac{1}{2} =$

$112\frac{1}{2} : 6\frac{2}{3} =$; $6\frac{2}{9} : 112\frac{1}{2} =$

1.4. Die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche sind Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 usw. Links vom Komma stehen die Ganzen, rechts die Dezimalstellen.

Echte Dezimalbrüche haben keine Ganzen ($0{,}4 = \frac{4}{10}$), **unechte** Dezimalbrüche bestehen aus Ganzen und einem echten Dezimalbruch, z. B.

a) $1{,}6 = 1\frac{6}{10} = 1 + 0{,}6$

b) $\frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1}$ c) $1\frac{7}{10} = \mathbf{1{,}7}$ d) $\frac{12}{100} = \mathbf{0{,}12}$

e) $8\frac{3}{100} = \mathbf{8{,}03}$ f) $12\frac{50}{1000} = \mathbf{12{,}050}$

Bei einem Dezimalbruch können **beliebig** viele **Nullen** angehängt oder fortgelassen werden.

$0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200 = \ldots$ oder $0{,}800 = 0{,}80 = 0{,}8$

Dezimalbrüche rundet man auf eine bestimmte Stellenzahl ab, indem man die übrigen Dezimalstellen fortläßt. Ist die erste fortfallende **Ziffer** kleiner als **5**, so läßt man den Rest ohne weiteres fort; ist sie gleich **5** oder **größer**, so wird die letzte stehenbleibende Ziffer um 1 erhöht.

Folgende Dezimalbrüche sind erst auf **4**, dann auf **2** Stellen abzurunden. Die Abrundung wird durch das Zeichen ≈ angedeutet (rund):

a) $0{,}370695 \approx 0{,}3707 \approx 0{,}37$
b) $0{,}254832 \approx 0{,}2548 \approx 0{,}25$
c) $2{,}148553 \approx 2{,}1486 \approx 2{,}15$

1.4.1. Addition von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche addiert man, indem man sie so untereinander schreibt, daß Komma unter Komma steht.

0,358	oder dafür	0,3580
+ 0,7		+ 0,7000
+ 81,5267		+ 81,5267
+ 0,004		+ 0,0040
= 82,5887		= 82,5887

Es ist immer darauf zu achten, daß **Einer** zu **Einern**, Zehntel zu Zehnteln, Hundertstel zu Hundertsteln usw. addiert werden.

1.4.2. Subtraktion von Dezimalbrüchen

Bei der Subtraktion von Dezimalbrüchen ist ebenfalls **Komma** unter **Komma** zu setzen.

Beispiele:

a)	b)	c)
10,14	0,40	125,3714
− 7,28	− 0,36	− 74,2906
= 2,86	= 0,04	= 51,0808

1.4.3. Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer ganzen Zahl

Ein Dezimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt streicht man von rechts nach links so viel Dezimalstellen ab wie der Dezimalbruch hat.

Beispiele:

a) $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ (eine Stelle)
b) $0{,}07 \cdot 1 = 0{,}07$ (zwei Stellen)
c) $0{,}008 \cdot 5 = 0{,}040$ (drei Stellen)

Zuerst ist also stets die entsprechende Anzahl Dezimalstellen abzustreichen, dann können die überflüssigen Nullen am Ende fortgelassen werden.

Ein Dezimalbruch wird mit **10, 100, 1000** usw. multipliziert, indem man das Komma ein, zwei, drei beziehungsweise mehr Stellen nach **rechts** rückt.

Beispiele:

a) $0{,}152 \cdot 10 = 1{,}52$ (Komma um **1** Stelle nach rechts)
b) $0{,}152 \cdot 100 = 15{,}2$ (Komma um **2** Stellen nach rechts)
c) $3{,}256 \cdot 1000 = 3256$ (Komma um **3** Stellen nach rechts)

1.4.4. Multiplikation zweier Dezimalbrüche

Dezimalbrüche werden ohne Rücksicht auf das Komma multipliziert. Im Produkt streicht man von rechts nach links so viel Dezimalstellen ab wie die Faktoren zusammen besitzen.

Beispiele:

a) $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ b) $0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}006$
c) $0{,}1 \cdot 0{,}004 = 0{,}0004$ d) $0{,}12 \cdot 0{,}12 = 0{,}0144$
e) $0{,}002 \cdot 0{,}19 = 0{,}00038$ f) $0{,}123 \cdot 0{,}9 = 0{,}1107$

fernmeldelehrling.de

1.4.5. Division eines Dezimalbruches durch eine ganze Zahl

Eine ganze Zahl wird durch einen Dezimalbruch dividiert, als wenn er eine ganze Zahl wäre. Man setzt im Quotienten das Komma, sobald es im Dividenden überschritten wird.

z. B. 31,452 : 3 = 10,484
3
14
12
25
24
12
12

In diesem Beispiel wird wie folgt gerechnet:

3 : 3 = 1, dann 1 : 3 = 0, Rest 1. Nun überschreiten wir das Komma im Dividenden und haben deshalb im Quotienten hinter 10 das Komma zu setzen. Dann wird weiter dividiert 14 : 3 = 4, Rest 2, 25 : 3 = 8, Rest 1, 12 : 4 = 4.

0,2750 : 18 = 0,0152 ≈ 0,015
18
95
90
50
36

Geht die Division nicht auf, so hängt man an den Dezimalbruch so viele Nullen an, bis die Rechnung aufgeht oder bis im Quotienten die verlangte Stellenzahl erreicht ist.

Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000 usw. dividiert, indem man das Komma um so viele Stellen nach links rückt, wie die 10, 100, 1000 usw. Nullen besitzt.

Beispiele:

a) $0{,}7 : 10 = \frac{7}{10} : 10 = \frac{7}{100} = 0{,}07$ (Komma um eine Stelle nach links)

b) $0{,}7 : 100 = \frac{7}{10} : 100 = \frac{7}{1000} = 0{,}007$ (Komma um zwei Stellen n. links)

1.4.6. Division zweier Dezimalbrüche

Man dividiert zwei Dezimalbrüche, indem man zuerst in beiden das Komma um so viele Stellen nach rechts rückt, wie der Divisor besitzt. Dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl.

Beispiele:

a) 0,34 : 2,5
oder 3,4 : 25 = 0,136
25
90
75
150
150

b) 0,00123 : 0,19
oder 0,123 : 19 = 0,00647 ≈ 0,0065
114
90
76
140
133

Übungsaufgaben:

0,29 + 125,2 + 0,6067 + 2,35 + 10,05678 + 167,3044 =
279,5584 − 199,46752 =

1,75 · 327 = ;	0,6274 · 319 = ;	0,000748 · 48 =
7,44 · 1,96 = ;	1,622 · 0,625 = ;	94,6 · 1,75 =
0,0364 : 26 = ;	27,306 : 36 = ;	0,009408 : 98 =
10,894 : 0,13 = ;	25,873 : 9,4 =	

1.4.7. Endliche und unendliche Dezimalbrüche

Jeder Bruch ist eine unausgeführte Division ($\frac{3}{4} = 3 : 4$). Führt man die Division aus, so entsteht ein Dezimalbruch.

Es gibt Brüche, die nach einer bestimmten Stellenzahl **enden** ($\frac{1}{8} = 0{,}125$). Diese heißen daher **endliche Dezimalbrüche.**

Bei anderen Brüchen kann die Rechnung **nie zu Ende** geführt werden ($\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$). Sie heißen **unendliche Dezimalbrüche.**

Dabei kehren immer gewisse Ziffern oder Ziffernfolgen regelmäßig wieder; man bezeichnet diese Ziffern oder Zifferngruppen als die **„Periode"** des unendlichen Dezimalbruches.

Es gibt periodische Dezimalbrüche mit **einstelliger** ($\frac{1}{3}$), **zweistelliger** ($\frac{7}{11}$), **dreistelliger** usw. Periode.

Man braucht stets nur so weit zu rechnen, bis die **Periode** erkannt wird. Die Periode wird nur einmal hingeschrieben und durch einen darübergesetzten **Strich** sowie **drei Punkte** angedeutet.

$\frac{1}{3} = 0{,}3\ldots \qquad \frac{7}{11} = 0{,}63\ldots$

Brüche, bei denen keine anderen als die **Primfaktoren 2** und **5** im Nenner vorkommen, ergeben stets **endliche** Dezimalbrüche.

Alle übrigen Brüche ergeben **unendliche periodische** Dezimalbrüche.

fernmeldelehrling.de

Übungsaufgaben:

Folgende Brüche sind in Dezimalbrüche umzuwandeln:

$\frac{3}{4} = \;;\quad \frac{17}{20} = \;;\quad \frac{118}{125} = \;;\quad 2\frac{2}{5} = \;;\quad 9\frac{7}{8} = \;;\quad 7\frac{49}{50} = \;;\quad 12\frac{13}{1000} =$

$6\frac{1}{3} = \;;\quad 23\frac{2}{5} = \;;\quad 49\frac{2}{9} = \;;\quad 56\frac{5}{6} = \;;\quad 17\frac{1}{6} = \;;\quad 3\frac{3}{40} = \;;\quad 7\frac{9}{125} =$

1.4.8. Addition und Subtraktion von Brüchen und Dezimalbrüchen

Im allgemeinen kann man **Dezimalbrüche leichter addieren** und **subtrahieren** als gewöhnliche Brüche, weil für die Dezimalbrüche der Hauptnenner nicht erst gesucht zu werden braucht.

Beispiel:

$$2\frac{1}{5} + 0{,}375 + 4\frac{3}{4} + 3{,}5$$

a) Umwandlung in Dezimalbrüche:

$$2{,}2 + 0{,}375 + 4{,}75 + 3{,}5 = \mathbf{10{,}825}$$

b) Umwandlung in gewöhnliche Brüche:

$$2\frac{1}{5} + \frac{3}{8} + 4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2} = 9\frac{8}{40} + \frac{15}{40} + \frac{30}{40} + \frac{20}{40} = \mathbf{10\frac{33}{40}}$$

1.4.9. Multiplikation und Division beider Bruchₐrten

Im allgemeinen kann man **gewöhnliche Brüche leichter multiplizieren** und **dividieren** als Dezimalbrüche.

Beispiel:

$$0{,}38 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{0{,}38 \cdot 3}{4} = \mathbf{0{,}285} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{19}{\cancel{38}} \cdot 3}{100 \cdot \underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{\mathbf{57}}{\mathbf{200}}$$

Übungsaufgaben:

$\frac{3}{4} + 0{,}625 = \;;\quad 0{,}8 + \frac{2}{5} + 0{,}75 = \;;\quad 1{,}48 + 7\frac{1}{2} + 5{,}9 =$

$0{,}048 \cdot 1\frac{3}{8} = \;;\quad 0{,}45 \cdot \frac{7}{9} = \;;\quad \frac{3}{7} \cdot 0{,}1 = \;;\quad 1\frac{1}{7} \cdot 0{,}7 = \;;\quad 7\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 =$

$4\frac{4}{5} + 0{,}4 = \;;\quad 10 - 3\frac{3}{4} = \;;\quad 1\frac{1}{2} + 2{,}5 = \;;\quad 0{,}5 \cdot 1\frac{3}{5} =$

1.4.10. Bruchausdrücke mit Dezimalbrüchen im Zähler und Nenner

Sehr oft kommen Ausdrücke vor, die Dezimalbrüche im Zähler und im Nenner enthalten:

$$\frac{4{,}73 \cdot 10}{0{,}01 \cdot 9}$$

Damit die Dezimalbrüche wegfallen, wird der Ausdruck mit **100 erweitert**, d. h. Zähler und Nenner werden mit 100 multipliziert. Hierdurch wird das **Komma** der Dezimalbrüche im Nenner und im Zähler um **zwei Stellen** nach **rechts** gerückt, damit es wegfällt.

$$\frac{\overset{473}{\cancel{4{,}73}} \cdot 10}{\underset{1}{\cancel{0{,}01}} \cdot 9} = \frac{4730}{9} = 525{,}\bar{5} \ldots \approx 525{,}56$$

Übungsaufgaben:

$\frac{21{,}06 \cdot 0{,}8}{26 \cdot 0{,}0009} = \;;\quad \frac{992{,}1 \cdot \frac{2}{3}}{100\frac{2}{3}} =$

$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \;;\quad \frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{15}} = \;;\quad \frac{6\frac{3}{4}}{9} = \;;\quad \frac{12}{4\frac{4}{5}} =$

$\frac{3 - \frac{2}{5}}{8} = \;;\quad \frac{9}{4 - 1\frac{3}{5}} = \;;\quad \frac{1 + \frac{5}{9}}{21} =$

$\frac{23{,}75 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7\frac{1}{2}}{100} = \;;\quad \frac{7 \cdot 0{,}6 + \frac{2}{9} \cdot 3{,}6}{3\frac{1}{6} \cdot 0{,}27 - 1{,}24 \cdot \frac{1}{8}} =$

$\frac{4\frac{4}{5} \cdot 2{,}5 + 3\frac{3}{4} \cdot 0{,}8}{4\frac{4}{5} \cdot 2{,}5 - 3\frac{3}{4} \cdot 0{,}8} = \;;\quad \frac{4\frac{4}{5} \cdot 2{,}5 - 3{,}75 \cdot \frac{4}{5}}{4{,}8 \cdot 2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} \cdot 0{,}8} =$

1.5. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 1.

1. Welches sind die vier Grundrechnungsarten? 2. Wie bezeichnet man in der Aufgabe 12 + 5 = 17 die einzelnen Zahlen? 3. Wie bezeichnet man in der Aufgabe 25 − 5 = 20 die einzelnen Zahlen? 4. Wie bezeichnet man in der Aufgabe 5 · 6 = 30 die einzelnen Zahlen? 5. Kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren an? 6. Wie bezeichnet man in der Aufgabe 48 : 8 = 6 die einzelnen Zahlen? 7. Kommt es auf die Reihenfolge der Summanden an? 8. Wie heißen die Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind? 9. Wie läßt sich der größte gemeinsame Teiler finden? 10. Wie kürzt man einen Bruch? 11. Wann ist ein Bruch echt, wann unecht? 12. Wie addiert oder subtrahiert man gleichnamige Brüche? 13. Wie addiert

fernmeldelehrling.de

oder subtrahiert man ungleichnamige Brüche? 14. Wie multipliziert man einen Bruch mit einer ganzen Zahl? 15. Wie dividiert man einen Bruch durch eine ganze Zahl? 16. Was versteht man unter dem reziproken Wert eines Bruches? 17. Was versteht man beim Dezimalbruch unter einer Periode? 18. Wie multipliziert man zwei Dezimalbrüche miteinander? 19. Wie multipliziert man einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1000? 20. Wie dividiert man zwei Dezimalbrüche durcheinander?

2. Die Buchstabenrechnung

2.1. Allgemeines

Eine Vereinfachung von Rechenaufgaben besteht in der Anwendung von Formeln. Besonders in der Technik wird hiervon häufig Gebrauch gemacht. Bekannt ist z. B. für das Ohmsche Gesetz die Formel

$$J = \frac{U}{R}$$

Setzt man für die einzelnen Buchstaben bestimmte Zahlen ein, so wird die Formel zu einer einfachen bekannten Rechenaufgabe mit **bestimmten Zahlen.** Da aber in den Formeln **Buchstaben** verwendet werden, ist eine gewisse Fertigkeit in der Anwendung von Buchstaben als Zahlen unumgänglich. Diese Möglichkeit bietet die Rechenlehre durch die Anwendung von **Buchstaben** als **unbestimmte** oder allgemeine Zahlenzeichen.

Gewöhnlich rechnen wir nur mit **bestimmten Zahlen,** } 1, 2, 3, 4, 5, 6 usw.

man kann aber auch genauso mit **unbestimmten** oder allgemeinen **Zahlen** (Buchstaben) rechnen. } $a, b, c, d, \ldots x, y, z, R, U, V$ usw.

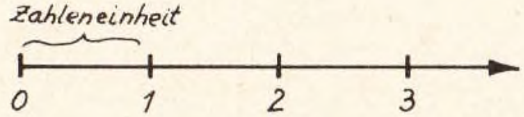
Beim Rechnen mit **unbestimmten** oder allgemeinen **Zahlen** (Buchstaben) kann für einen Buchstaben (**a**) jede beliebige Zahl, z. B. 2 oder 6,5 festgelegt werden. **Innerhalb einer Aufgabe muß jedoch der ausgewählte Buchstabe stets denselben Zahlenwert beibehalten** (z. B. $a = 2$).

Beispiel:

$$a + b + a + c = ?$$
für $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$
$$2 + 3 + 2 + 4 = 11$$

Für das Rechnen mit **unbestimmten** (allgemeinen) **Zahlen** gelten die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit **bestimmten Zahlen.**

Die Aufeinanderfolge der Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. wird als eine **Zahlenreihe** bezeichnet. Sie entsteht durch das wiederholte Hinzufügen der Zahleneinheit „1". Bildlich kann man die **Zahlenreihe** durch eine Reihe von Punkten darstellen, die man auf einem Strahl, dem **Zahlenstrahl**, vom Anfangspunkt 0 an in gleichen Abständen abträgt.



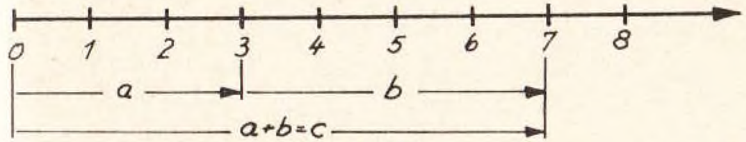
(Abb. 7)

Bei der Bildung von Summen entstehen in den folgenden Beispielen keine Schwierigkeiten:

Beispiel:

3 + 4 = 7

oder a + b = c



(Abb. 8)

Auf dem Zahlenstrahl werden die Summanden von links nach rechts aneinandergefügt (Abb. 8).

Die Zahlen a und b sind die **Summanden** und c ist hieraus die **Summe.**

Beispiel:

a + b + c = ?

Folgende Werte sind einzusetzen:

1) $a = 2,\quad b = 3,\quad c = 4$
2) $a = 15,\ b = 20,\ c = 30$
3) $a = 2{,}5,\ b = 4{,}5,\ c = 6$

Lösung:

1) $a + b + c = ?$ $2 + 3 + 4 = 9$

2) $a + b + c = ?$ $15 + 20 + 30 = 65$

3) $a + b + c = ?$ $2{,}5 + 4{,}5 + 6 = 13$

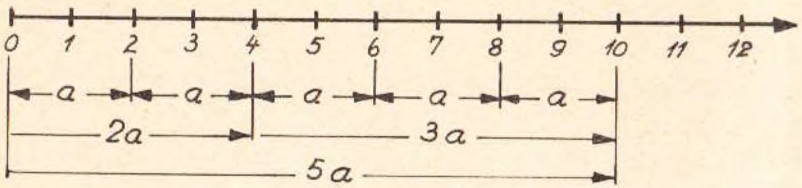
Wir erkennen aus diesem Beispiel, daß jeder Buchstabe in **verschiedenen** Rechnungen eine ganz beliebige Größe darstellen kann. Innerhalb der **gleichen** Rechnung muß der Wert stets der **gleiche** sein.

fernmeldelehrling.de

Merke:

1. **Eine Summe gleicher Summanden**
   wie $a + a + a$ oder $b + b + b + b$
   schreibt man abkürzend:
   $a + a + a = 3 \cdot a$ oder $b + b + b + b = 4 \cdot b$
2. Die **Ziffer** (3 bzw. 4) bei einem Buchstaben nennt man **Beizahl** oder **Koeffizient.** Das Malzeichen (den Punkt) zwischen **Ziffer** und **Buchstaben** $3 \cdot a = 3a$ kann man weglassen.
3. **Gleichbenannte** allgemeine Zahlen mit verschiedenen Beizahlen werden addiert, indem man die Beizahlen addiert.
   z. B. **2a + 3a = 5a**
   für $a = 2$ ergibt sich:
   $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5 \cdot 2$

Bildliche Darstellung:



(Abb. 9)

Auf dem Zahlenstrahl werden die Summanden von links nach **rechts aneinandergefügt.**

4. **Gleichbenannte** Summanden **in Bruchform** müssen vor dem Addieren **gleichnamig** gemacht werden.

z. B. $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}c + \frac{2}{5}a + \frac{1}{2}c = \frac{1}{3}a + \frac{2}{5}a + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}c$

$= \frac{5}{15}a + \frac{6}{15}a + \frac{1}{4}c + \frac{2}{4}c$

$= \frac{11}{15}a + \frac{3}{4}c$

oder $1\frac{1}{2}z + 5\frac{2}{3}y + 3\frac{1}{6}z + 4\frac{2}{9}y = 1\frac{3}{6}z + 3\frac{1}{6}z + 5\frac{6}{9}y + 4\frac{2}{9}y$

$= 4\frac{4}{6}z + 9\frac{8}{9}y$

$= 4\frac{2}{3}z + 9\frac{8}{9}y$

Übungsaufgaben:

$4a + 7a + a + 8a + 5a =$; $15a + 32b + 8b + 16a =$

$12x + 8y + 16x + 15y + 10y =$

$3x + 4y + 3a + 2x + 4a + 10y =$

$4x + \frac{4}{6}y + \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}y =$; $2\frac{1}{4}b + 2\frac{1}{8}c + 2\frac{3}{4}b + 3\frac{3}{8}c + 1\frac{1}{4}c =$

Setzen Sie in den folgenden Aufgaben für $a = 2$, $b = 3$ und $x = \frac{1}{2}$ ein:

$6b + 4a + 3x =$; $1{,}2a + 4{,}2x + 2{,}5b =$; $1\frac{1}{3}b + 3\frac{1}{6}a + 2\frac{1}{4}x =$

Bei der Bildung von Differenzen kommt man sehr bald an einen kritischen Punkt.

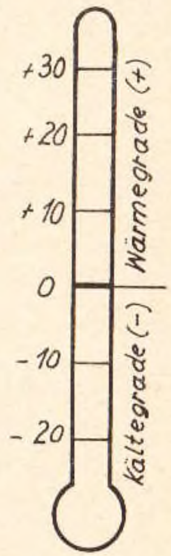
z. B. $4 - 4 = ?$ oder sogar $4 - 5 = ?$

Die Anwendung von **natürlichen** Zahlen stößt hier auf eine Grenze. Man ist deshalb gezwungen, die sogenannten **„relativen Zahlen"** einzuführen. Der Ausdruck „relativ" heißt „bezüglich". Er besagt, daß diese Zahlen Bezug nehmen auf einen bestimmten **Ausgangspunkt.** Dieser Ausgangspunkt ist die **Null.**

Ein lehrreiches Beispiel ist hierfür das Thermometer, bei dem sich die Quecksilbersäule bei **Temperaturzunahme verlängert** und bei Temperaturabnahme verkürzt. Bei dem Vergleich der augenblicklichen Temperatur mit dem **Gefrierpunkt** (0°), spricht der Volksmund von **Wärme** und **Kälte.**

Gradzahlen (Wärmegrade), die die Temperaturen „über 0" andeuten, gibt man das **Vorzeichen** +, den Gradzahlen „unter 0" im Gegensatz dazu das **Vorzeichen** —.

Solche Zahlen, die nur in bezug auf einen Ausgangspunkt einen bestimmten Sinn haben, heißen relative Zahlen. Im Gegensatz dazu heißen Zahlen, die für sich allein einen bestimmten Wert darstellen, **„absolute Zahlen".**



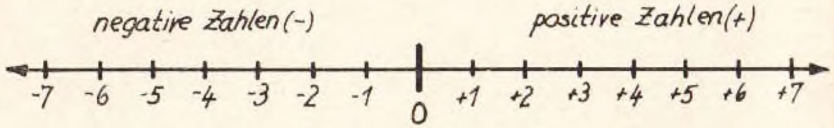
(Abb. 10)

Ähnliche Fälle, bei denen von einem Nullpunkt nach zwei entgegengesetzten Richtungen gezählt wird, liegen vor beim Bestimmen der Höhenlagen **über** und **unter** dem Meeresspiegel oder bei der Betrachtung von **Vermögen und Schulden.**

Schulden und Vermögen sind **entgegengesetzte** Größen, die bestimmt werden nach einem Besitz von 0 DM.

fernmeldelehrling.de

Auch in der reinen Arithmetik haben wir es mit **relativen Zahlen** zu tun. Ist z. B. in einer Subtraktionsaufgabe der Subtrahend **größer** als der Minuend (z. B. in der Aufgabe 5 — 8), so würde auf unserem **Zahlenstrahl** ein Überschreiten der Null nötig sein. So gelangt man zu Zahlen, die jenseits der Null liegen. Man denkt sich die Zahlengerade von Null aus nach links (in gleicher Weise wie nach rechts) verlängert.



(Abb. 11)

Die Zahlen **rechts** von **Null** heißen die **positiven Zahlen**, die Zahlen **links** von **Null** heißen die **negativen Zahlen.** Um die beiden Arten zu unterscheiden, gibt man den **positiven** das **Vorzeichen** + und den **negativen** das **Vorzeichen** —.

Die **positiven** und **negativen** Zahlen heißen **relative Zahlen** (relativ = bezüglich). Die Plus- und Minuszeichen haben von jetzt ab doppelte Bedeutung. Sie sind **Rechenzeichen** und **Vorzeichen.**

Die **Rechenzeichen** + und — werden bei der **Addition** und **Subtraktion** von Zahlen verwendet.

Die **Vorzeichen** + und — deuten an, ob es sich um **positive** oder **negative** Zahlen handelt. Die Vorzeichen schließt man mit ihrer Zahl in eine Klammer ein (—5). Besitzt eine Zahl kein Vorzeichen, so gilt sie als **positiv.**

Durch die Einführung der **negativen** Zahlen ist es möglich, jede **Subtraktion** als eine **Addition** anzusehen, so ist z. B.

$$12 - 6 + 3 - 4 = 12 + (-6) + 3 + (-4)$$

Aus der Subtraktion —6 ist also die Addition + (—6) einer negativen Zahl geworden.

Je weiter eine Zahl in der Zahlengeraden **rechts** steht, desto **größer** ist sie.

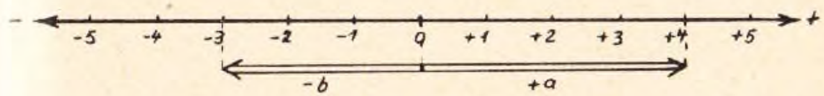
Zum Beispiel (—**1**) ist **größer** als (—**2**); (—**4**) ist **größer** als (—**6**); (+**1**) ist **größer** als (—**1**) usw.

Die Beziehungen „größer als" und „kleiner als" können auch durch Zeichen ausgedrückt werden:

z. B. statt (+5) ist **größer** als (+3) schreibt man
$(+5) > (+3)$,

statt (—1) ist **kleiner** als (+1) schreibt man
$(-1) < (+1)$.

Ähnlich wie **bestimmte** Zahlen kann man auch **unbestimmte** Zahlen (**Buchstaben**) in der Zahlengeraden verwenden und ihre Größen vergleichen:



(Abb. 12)

Zum Verständnis für die Anwendung von bestimmten oder unbestimmten Zahlen, die mit **Vorzeichen** versehen sind, vergleichen wir den Begriff „Vorzeichen" mit einem **Richtungspfeil.** Positive Zahlen erhalten einen Pfeil nach **rechts** (→). Negative Zahlen erhalten einen Pfeil nach **links** (←). Die **Länge** des Pfeils entspricht der **Größe** der Zahl. Mit den Richtungspfeilen können wir uns **Additionen** und **Subtraktionen** von **relativen** Zahlen erklären. Hierüber sollen uns die Beispiele in dem nächsten Abschnitt Auskunft geben.

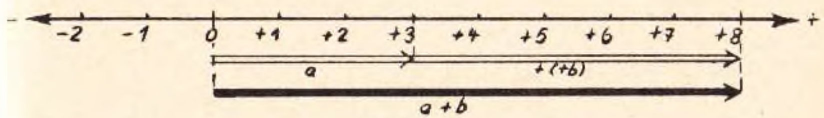
2.2. Addition und Subtraktion von bestimmten und unbestimmten Zahlen, die ein Vorzeichen besitzen (relative Zahlen)

2.2.1. Addition von relativen Zahlen

Bei der **Addition** von **relativen** Zahlen setzen wir einen **Pfeil** an den anderen. Die **Gesamtlänge** des Summenpfeils entspricht der Summe.

Beispiel 1:

$$\mathbf{3 + (+5) = 3 + 5}$$
$$\mathbf{a + (+b) = a + b}$$



(Abb. 13)

Erläuterung zum Beispiel 1:

Wenn zu 3 DM Vermögen noch 5 DM Einnahmen **hinzukommen,** dann wird das Vermögen um diesen Betrag größer (3 + 5 = 8).

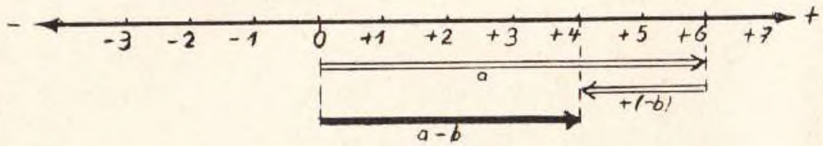
Da es sich in dem vorstehenden Beispiel um die **Addition** von **positiven** Zahlen handelt, werden die Summanden von **0** nach **rechts** aneinandergefügt.

fernmeldelehrling.de

Im folgenden Beispiel ist die **Addition** einer **negativen** Zahl vorgesehen. Der anzusetzende Pfeil $+(-b)$ muß wegen der **negativen** Zahl in **entgegengesetzter Richtung** (nach links) an den Pfeil a angetragen werden.

Beispiel 2:

$6 + (-2) = 6 - 2$
$a + (-b) = a - b$



(Abb. 14)

Erläuterung zum Beispiel 2:

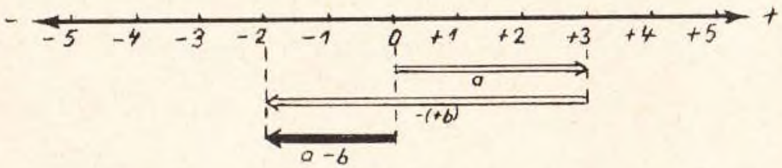
Wenn zu 6 DM Vermögen 2 DM Schulden **hinzukommen**, dann wird das Vermögen um diesen Betrag geringer (6—2=4).

2.2.2. Subtraktion von relativen Zahlen

Bei der **Subtraktion** ist zu beachten, daß grundsätzlich die Subtraktion eine **Umkehrung der Addition** ist. Somit wird bei der **Subtraktion** der Pfeil immer in **entgegengesetzter Richtung** als bei der Addition angetragen.

Beispiel 3:

$3 - (+5) = 3 - 5$
$a - (+b) = a - b$



(Abb. 15)

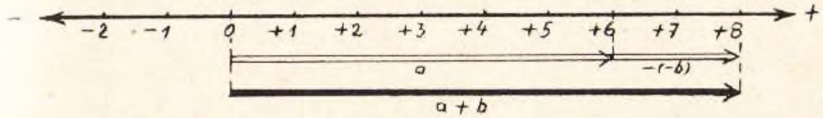
Erläuterung zum Beispiel 3:

Wenn von 3 DM Vermögen 5 DM Guthaben **weggenommen** werden, dann wird das Vermögen um diesen Betrag geringer. In diesem Falle entstehen 2 DM Schulden (3 — 5 = —2).

Die **Subtraktion** einer **negativen** Zahl — **(—2)** ist schon nicht mehr so leicht verständlich. Hierbei ist zu beachten, daß der Pfeil (—2) nicht nach links – wie im Beispiel 2 bei der Addition – sondern infolge der Subtraktion in **entgegengesetzter** Richtung, also in diesem Falle **nach rechts,** angetragen werden muß.

Beispiel 4:

$6 - (-2) = 6 + 2$
$a - (-b) = a + b$



(Abb. 16)

Erläuterung zum Beispiel 4:

Wenn sich das Vermögen aus einem Guthaben und einer Schuld zusammensetzt (z.B. 6=8—2), dann wächst das Vermögen, wenn der Schuldbetrag erlassen wird (6+2=8).

Wir schreiben die 4 Beispiele noch einmal untereinander und betrachten das jeweilige Ergebnis:

1. Beispiel: $a + (+b) = a + b$
2. Beispiel: $a + (-b) = a - b$
3. Beispiel: $a - (+b) = a - b$
4. Beispiel: $a - (-b) = a + b$

Wie aus den vorstehenden Ergebnissen zu ersehen ist, wird bei der Behandlung von Additions- und Subtraktionsaufgaben, in denen **relative Zahlen** vorkommen, zwischen **Rechen-** und **Vorzeichen** kein Unterschied mehr gemacht. Man kann ja mit Hilfe der Vorzeichenregel

a) die Vorzeichen in einer Aufgabe mit den Rechenzeichen vereinigen
z.B. $6 - (+3) = 6 - 3$

b) Rechen- und Vorzeichen miteinander vertauschen
z.B. $6 - (+3) = 6 + (-3)$

c) jede Subtraktionsaufgabe als Additionsaufgabe schreiben und umgekehrt
z.B. $4 - 2 = 4 + (-2)$
$4 + 2 = 4 - (-2)$

Man sieht deshalb bei Aufgaben mit relativen Zahlen von dem Unterschied zwischen **Vor-** und **Rechenzeichen** und von dem Unterschied zwischen **Addition** und **Subtraktion** ab und spricht lediglich von einer **„algebraischen Summe“. Das Glied einer algebraischen Summe besteht aus Zahl und Rechenzeichen.**

Wir merken uns folgende Regel:

> Beim Zusammentreffen **gleicher** Vor- und Rechenzeichen wird **addiert** und bei **ungleichen** Vor- und Rechenzeichen **subtrahiert.**

fernmeldelehrling.de

z.B. $(-80) - (-50) = ?$

In diesem Beispiel sind die **Vor- und Rechenzeichen** $-$ $(-\,..)$ **gleich.** Es wird also **addiert** ($+$ als Rechenzeichen vor der Zahl 50).

$$-80 + 50 = -30$$

Hierzu folgendes Beispiel als Erläuterung:

Horst hat sich von Rolf 80 Pf geborgt. Für eine Gefälligkeit erläßt Rolf ihm 50 Pf von seinen Schulden. Es bleiben für Horst noch 30 Pf Schulden.

(-80)	$-$	(-50)	$=$	(-30)
80 Pf Schulden	$-$	50 Pf Schulden	$=$	30 Pf Schulden

Merke:

Ganz allgemein ergibt sich für die Addition und Subtraktion von relativen Zahlen folgende Vorzeichenregel:

Rechenzeichen	und **Vorzeichen**	ergibt **Rechenzeichen**
$+$	$(+)$	$+$
$+$	$(-)$	$-$
$-$	$(+)$	$-$
$-$	$(-)$	$+$

Übungsaufgaben:

$(+5) + (+13) =$	$(+48{,}92) - (+83{,}76) =$
$(-17) + (-13) =$	$(-38{,}05) - (-59{,}25) =$
$(+63) + (-149) =$	$\left(-18\frac{1}{6}\right) + \left(+65\frac{2}{3}\right) =$
$(-25) + (+17) =$	$\left(-9\frac{1}{2}\right) - \left(-13\frac{3}{4}\right) =$
$\left(+3\frac{1}{2}\right) + \left(5\frac{1}{2}\right) =$	$(-32{,}64) + (+48{,}59) =$
$\left(+52\frac{1}{2}\right) - \left(+38\frac{1}{4}\right) =$	$(-14) - (-23) =$

2.2.3. Die algebraische Summe; das Rechnen mit Klammern

Man findet in der Rechenlehre häufig Aufgaben, in denen Summen oder Differenzen durch **Klammern** zusammengefaßt worden sind,

z.B. a) $10 + (8+6) = 24$ c) $10 + (8-6) = 12$
b) $10 - (8+6) = -4$ d) $10 - (8-6) = 8$

Bei der Lösung solcher Aufgaben ist man bemüht, zunächst die Klammern aufzulösen. Würde man sie einfach weglassen, so sind in den Fällen a) und c) die Ergebnisse trotzdem richtig. Hingegen erhalten wir in den Fällen b) und d), wo vor der Klammer ein Minuszeichen steht

falsche Ergebnisse, wenn wir die Rechenzeichen **innerhalb** der Klammern nicht umdrehen, d.h. **plus** zu **minus** und **minus** zu **plus** werden lassen.

Wir erkennen daraus die wichtige Regel für das **Auflösen von Klammern:**

Klammerregel:

> Steht **vor** einer in Klammern gesetzten algebraischen Summe ein Minuszeichen, so bleibt beim **Auflösen** (Weglassen) der Klammern das Ergebnis richtig, wenn die Rechenzeichen **innerhalb** der Klammern **umgekehrt** werden.

Wenden wir diese Klammerregel auf das Buchstabenrechnen an, so kann man schreiben:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Neben den **runden** Klammern kennt die Rechenlehre noch die übergeordneten **eckigen** Klammern, z.B.

$$6a + [(5a + 4b) - (3a + 2b)]$$

Man löst zuerst die untergeordneten **runden** Klammern auf und läßt die eckigen stehen:

$$6a + [5a + 4b - 3a - 2b],$$

dann löst man die **eckigen** Klammern auf (natürlich unter Beachtung der Klammerregel):

$$6a + 5a + 4b - 3a - 2b = 8a + 2b$$

Wir ergänzen die **Klammerregel** wie folgt:

Merke:

Ist eine algebraische Summe in **eckige** und **runde** Klammern gesetzt, so löst man zuerst die **runden** und dann die **eckigen** Klammern auf.

z.B. $10a - [6a - (5c + 6a - 4b) - 15b] =$
$10a - [6a - 5c - 6a + 4b - 15b] =$
$10a - 6a + 5c + 6a - 4b + 15b = 10a + 5c + 11b$

Beispiel:

$$(4x - 5y + 6z) + (8x + 5y - 6z) - (-10x - 9y + 7z) = ?$$

Vor der 2. Klammer steht ein $+$ Zeichen, vor der 3. Klammer ein $-$ Zeichen. Wir können die 2. Klammer ohne weiteres weglassen, die Vorzeichen ändern sich nicht. Bei der 3. Klammer aber fällt das $-$ Zeichen vor der Klammer weg, alle Vorzeichen in der Klammer werden umgekehrt.

fernmeldelehrling.de

$$4x - 5y + 6z + 8x + 5y - 6z + 10x + 9y - 7z =$$

Nun ordnen wir:

$$\underbrace{4x + 8x + 10x}_{22x} \underbrace{- 5y + 5y}_{0} + 9y + \underbrace{6z - 6z}_{0} - 7z =$$

$$22x + 9y - 7z =$$

Nun ist wohl klargeworden, daß die Buchstabenrechnung eine bedeutende Arbeitsersparnis darstellt, vor allem viele Rechenfehler ausschaltet, weil wir ja erst zuletzt die Zahlen einsetzen. Das gilt besonders bei recht komplizierten Werten für x, y, z usw., vielleicht mit Dezimalbrüchen oder gewöhnlichen Brüchen.

Übungsaufgaben:

$(a + b - c) - (d + b - c) =$

$(a + b) - (b + c) - (a - b - c) =$

$(a + b) - (a - c + b) =$

$(x + y) + [(x - y) - (x + y - z)] =$

$(x - z + y) - [(y + x) - (y - z)] =$

$2\frac{1}{4}y + (-3\frac{1}{2}y) - (-\frac{1}{4}y) + y =$

$116a - (100a - 30b) =$

$65m - (17m + 12m) =$

$(65a - 36b - 15c) - (52a + 7c - 40b) =$

$(24a + 37b - 19c) - [(43a + 29b) - (32a + 11b - 21c)] =$

$104x - [(64y + 20z) + (52x - 65z)] - (17z - 76y) =$

$[112x - (45y - 53z)] - [(81x - 64y) - 21z] =$

2.2.4. Addition und Subtraktion von Brüchen

Wir wenden nunmehr die **Bruchregeln** auf das **Buchstabenrechnen** an:

a) **Gleichnamige Brüche** werden bekanntlich addiert oder subtrahiert, indem man die **Zähler** addiert oder subtrahiert. Der **Nenner** bleibt unverändert.

z. B. $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+c+d}{b} + 1$

...he werden addiert oder subtrahiert, indem man ...hnamig macht und dann die **Zähler** addiert oder ...emeinsamen **Nenner** beibehält.

Bei ... . Wir
mern ... h nicht.
Fällen a) ... Vorzeichen
in den Fälle...

...n **Hauptnenner**. Dieser heißt bce. Dann heißen ...rüche:

$$\frac{a \cdot ce}{b \cdot ce} + \frac{b \cdot be}{c \cdot be} + \frac{d \cdot bc}{e \cdot bc} =$$

$$\frac{ace}{bce} + \frac{b^2e}{bce} + \frac{bcd}{bce} =$$ (mit alphabetisch geordneten Buchstaben)

Bei der Addition und Subtraktion von Brüchen mit **gleichem** Nenner kann man die Zähler auf einem durchgehenden Bruchstrich unterbringen.

Also: $\dfrac{ace + b^2e + bcd}{bce}$

Übungsaufgaben:

$\frac{a}{2} - \frac{b}{3} =$; $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} =$; $\frac{c}{2} - \frac{c}{3} =$; $1\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}a =$; $\frac{5a}{7} + \frac{b}{7} =$

$\frac{7b}{4} - \frac{3b}{4} =$; $\frac{3x}{5} - \frac{4x}{15} =$; $\frac{8n}{9} - \frac{7n}{18} =$; $\frac{2a}{3} + \frac{a}{3} =$

$\frac{9m}{5} - \frac{4m}{5} =$; $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} =$; $\frac{2a}{x} - \frac{a}{x} =$; $\frac{x}{10} - \frac{y}{10} + \frac{z}{10} =$

$\frac{4a}{9} + \frac{8a}{9} - \frac{10a}{9} =$; $\frac{3a}{4} + \frac{5a}{4} - \frac{7a}{4} =$; $\frac{8x}{15} - \frac{7x}{15} + \frac{11x}{15} + \frac{4x}{15} =$

$\frac{x}{n} + \frac{y}{n} - \frac{z}{n} =$; $\frac{8a}{5} + \frac{2a}{5} - \frac{7a}{5} =$; $\frac{11m}{3a} - \frac{9m}{3a} + \frac{4m}{3a} =$

$\frac{14a}{9x} + \frac{8b}{9x} - \frac{11a}{9x} - \frac{11b}{9x} =$; $\frac{3}{an} - \frac{5}{bn} =$; $\frac{4a}{5b} - \frac{3a}{4b} =$

$\frac{2b}{5y} + \frac{7b}{20y} =$; $\frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} =$; $\frac{x + y}{m} + \frac{x - y}{m} =$

$\frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} =$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} =$; $\frac{5ax}{6by} - \frac{3ax}{8by} - \frac{7ax}{16by} =$

$\frac{3x}{4y} - \frac{5x}{9y} - \frac{2x}{3y} + \frac{7x}{12y} =$; $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} - \frac{a}{3} + \frac{5b}{6} =$

$\frac{x}{7} - \frac{y}{9} - \frac{x}{56} - \frac{y}{72} =$; $\frac{6x}{7} - \frac{3y}{5} + \frac{13x}{42} - \frac{7y}{30} =$; $\frac{5x}{6} + \frac{4x}{9} - \frac{2x}{5} =$

$\frac{11a}{12} - \frac{3a}{8} + \frac{2a}{5} =$; $\frac{2a}{3} - \frac{3b}{5} - \frac{a}{6} + \frac{b}{10} =$

$\frac{a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{a}{20} + \frac{b}{30} =$; $\frac{m}{ax} + \frac{n}{bx} =$; $\frac{x}{n} + \frac{x}{3n} =$; $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} =$

$\frac{4x}{n} + \frac{3x}{5n} =$; $\frac{8a}{x} - \frac{5b}{y} =$; $\frac{a}{5x} - \frac{b}{10x} =$; $\frac{a}{2b} - \frac{a}{3b} =$

$\frac{2a}{5x} - \frac{3a}{8x} =$; $\frac{8b}{3a} - \frac{5b}{2a} =$; $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} =$; $\frac{x}{y} + \frac{2x}{3y} + 1 =$

$\frac{13a - 9b}{4x} + \frac{4a - 5b}{3x} =$; $\frac{2a - 5b}{3} + \frac{a + 2b}{3} =$

fernmeldelehrling.de

$$\frac{9a+3b}{a+b} - \frac{a+2b}{a+b} = ; \quad \frac{7a-8b}{5} - \frac{2a-3b}{5} = ; \quad \frac{9a}{n} - \frac{7a}{n} + \frac{5a}{n} =$$

$$\frac{8x}{a} - \frac{5x}{a} + \frac{6x}{a} = ; \quad \frac{4x+5y}{x-y} - \frac{3x+4y}{x-y} = ; \quad 3n - \frac{x}{2y} =$$

$$\frac{5a+b}{3} - a = ; \quad \frac{3a+5b}{4b} - 2 = ; \quad \frac{a-b}{2} + b =$$

$$\frac{x+y}{2y} - 1 = ; \quad \frac{a-b}{2x} - \frac{a+b}{5x} = ; \quad \frac{2x}{3y} - \frac{4x-5y}{6y} =$$

$$\frac{a-2b}{2y} + \frac{a+3b}{6y} = ; \quad \frac{2x-3a}{3x} - \frac{x-2a}{2x} =$$

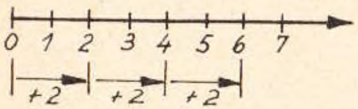
$$\frac{x+3y}{4y} - \frac{x+2y}{6y} = ; \quad \frac{3a+7x}{9x} - \frac{4a+9x}{12x} = ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} =$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = ; \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5}{z} =$$

2.3. Die Multiplikation

Die aus drei **gleichen** Summanden bestehende Summe $2 + 2 + 2$ kann man abgekürzt $3 \cdot 2$ schreiben. Der eine Faktor gibt an, wievielmal der andere als Summand gesetzt werden soll. **Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition gleicher Summanden.** Auch hier kann die Zahlengerade zur bildlichen Darstellung benutzt werden.

a) Die Strecke $(+2)$ soll dreimal **addiert** werden:

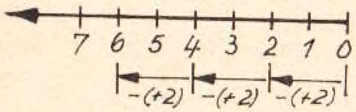


$$(+2) + (+2) + (+2) = +6$$
$$+2 + 2 + 2 = +6$$
oder
$$+3 \cdot (+2) = +6$$

(Abb. 17)

Wenn ein **Guthaben** dreimal hinzugefügt wird, dann wächst das Vermögen. (Die Pfeile nach rechts antragen.)

b) Die Strecke $(+2)$ soll dreimal **subtrahiert** werden:

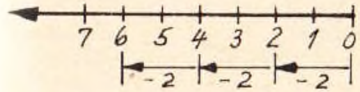


$$-(+2) - (+2) - (+2) = -6$$
$$-2 - 2 - 2 = -6$$
oder
$$-3 \cdot (+2) = -6$$

(Abb. 18)

(Denn ein bestimmter **Geldbetrag** dreimal abgezogen wird, dann entstehen Schulden. Wie Pfeile nach links antragen.)

c) Die Strecke (-2) soll dreimal **addiert** werden:

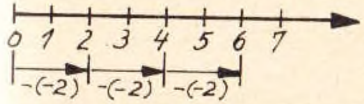


$$(-2) + (-2) + (-2) = -6$$
$$-2 - 2 - 2 = -6$$
oder
$$+3 \cdot (-2) = -6$$

(Abb. 19)

Wenn ein **Schuldbetrag** dreimal hinzugefügt wird, dann wachsen die Schulden. (Die Pfeile nach links antragen).

d) Die Strecke (-2) soll dreimal **subtrahiert** werden:



$$-(-2) - (-2) - (-2) = +6$$
$$+2 + 2 + 2 = +6$$
oder
$$-3 \cdot (-2) = +6$$

(Abb. 20)

Wenn ein **Schuldbetrag** dreimal abgezogen wird, dann wächst das Vermögen. (Die Pfeile nach rechts antragen.)

2.3.1. Vorzeichenregel bei der Multiplikation

Wir schreiben die 4 Beispiele noch einmal untereinander und betrachten das jeweilige Ergebnis:

a) $+3 \cdot (+2) = +6$
b) $-3 \cdot (+2) = -6$
c) $+3 \cdot (-2) = -6$
d) $-3 \cdot (-2) = +6$

Aus den vorstehenden Ergebnissen ergibt sich folgende **Vorzeichenregel:**

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, das Produkt zweier Zahlen mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

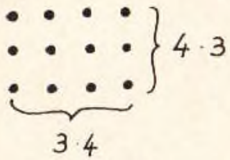
+	·	+	=	+
+	·	−	=	−
−	·	+	=	−
−	·	−	=	+

Merke:

In einem Produkt dürfen die Faktoren miteinander vertauscht werden.

Es ist $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

fernmeldelehrling.de



(Abb. 21)

Bildlich kann man das Produkt $3 \cdot 4$ durch Punkte darstellen, die man in 4 Reihen mit je 3 Punkten zu einem Rechteck anordnet. Diese Punktanordnung stellt sich von der kurzen Rechteckseite betrachtet in 3 Reihen zu 4 Punkten dar.

Allgemein gilt: $\underline{a \cdot b = b \cdot a}$

Bei einem Produkt von mehreren Faktoren ist die Reihenfolge für das Ergebnis gleichgültig, z. B.

$$3 \cdot 6 \cdot 8 = 8 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 8 \cdot 3$$

oder $$a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b = b \cdot c \cdot a$$

Das Multiplikationszeichen ist der Punkt. Er kann vor allgemeinen Zahlen und vor oder nach einer Klammer fehlen ($5a$ bedeutet $5 \cdot a$; abc bedeutet $a \cdot b \cdot c$; $3\,(m + n)$ bedeutet $3 \cdot (m + n)$).

2.3.2. Multiplikation von Klammerausdrücken

a) Wenn die Zahl 235 mit 3 multipliziert werden soll ($235 \cdot 3 = 705$), dann kann man die Zahl 235 in die Summe $200 + 30 + 5$ zerlegen und jeden Summanden mit 3 multiplizieren.

$$(200 + 30 + 5) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 705$$

b) Bei der gleichen Aufgabe kann man aber auch die Zahl 235 als Differenz von $250 - 15$ betrachten.

$$(250 - 15) \cdot 3 = 250 \cdot 3 - 15 \cdot 3 = 750 - 45 = 705$$

Wir merken uns:

Zu a) Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man jeden Summanden einzeln multipliziert und die Teilprodukte addiert.

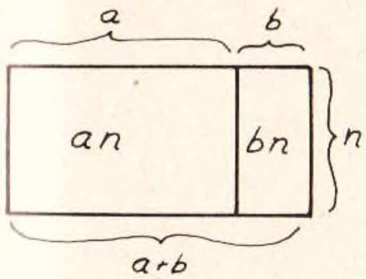
z.B. $(a + b)\,n = an + bn$

Zu b) Man multipliziert eine Differenz mit einer Zahl, indem man den Minuenden und den Subtrahenden einzeln multipliziert und vom ersten Teilprodukt das zweite subtrahiert.

z.B. $(a - b)\,n = an - bn$

Eine Veranschaulichung ist in den beiden Rechtecken gegeben, dessen Seiten die Maßzahlen a, b und n enthalten.

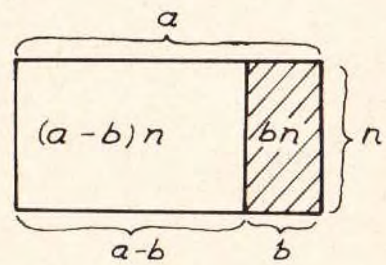
a)



(Abb. 22)

$(a + b)\,n = an + bn$

b)



(Abb. 22a)

$(a - b)\,n = an - bn$

Multiplikation von zwei Klammerausdrücken:

Wenn 36 mit 23 multipliziert werden soll, dann kann man dafür z. B. auch zwei Summen miteinander multiplizieren.

$$(30 + 6) \cdot (20 + 3)$$

Die Klammer $(30 + 6)$ ist $20 + 3$ **mal** als Summand zu setzen. Das geschieht, indem man $(30 + 6)$ **zuerst** mit 20 und **dann** mit 3 multipliziert und die Produkte **addiert**.

$$\begin{aligned}(30 + 6) \cdot (20 + 3) &= (30 + 6) \cdot 20 + (30 + 6) \cdot 3 \\ &= 30 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 30 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \\ &= 828\end{aligned}$$

oder $$\begin{aligned}(a + b)\,(c + d) &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Merke:

Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Dabei ist immer auf das Vorzeichen der Glieder zu achten.

Übungsbeispiele:

$$4\,(a + b) = 4a + 4b$$
$$7\,(a + b + c) = 7a + 7b + 7c$$
$$5\,(c - d + e) = 5c - 5d + 5e$$
$$6\,(3a + 2b) = 18a + 12b$$
$$11\,(5x - 2y + 3z) = 55x - 22y + 33z$$

Jeder Teil in der Klammer ist mit dem Faktor vor (oder hinter) der Klammer zu multiplizieren. Um sich von der Richtigkeit einer Aufgabe zu überzeugen, kann man für die Buchstaben a, b, c usw. einen bestimmten Wert einsetzen und dann zur Probe nachrechnen, ob alles stimmt. So setzen wir vielleicht im ersten Beispiel für $a = 6$ und $b = 4$. Nun prüfen wir, ob das gleiche Resultat herauskommt:

fernmeldelehrling.de

$$4\,(a + b) = 4a + 4b$$
$$4\,(6 + 4) = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 4$$
$$4\,(10) = 24 + 16$$
$$40 = 40$$

Statt mit einer bestimmten Zahl vor der Klammer, kann man auch mit einer allgemeinen Zahl, d. h. mit einem Buchstaben multiplizieren:

z. B.

$$n\,(a + b) = na + nb$$
$$2m\,(a + b + c) = 2ma + 2mb + 2mc$$
$$x\,(c - d + e) = xc - xd + xe$$
$$y\,(3a + 2b) = 3ay + 2by$$
$$2a\,(5x - 2y + 3z) = 10ax - 4ay + 6az$$

Es ist immer darauf zu achten, daß jedes einzelne Glied in der Klammer bei der Multiplikation berücksichtigt wird. Steht jedoch keine Klammer, so ist nur die Zahl mit **dem** Faktor zu multiplizieren, bei dem er steht.

Unterscheiden Sie:

$$(a + b + 18)\;12 = 12a + 12b + 12 \cdot 18$$
$$a + b + 18 \cdot 12 = a + b + 18 \cdot 12$$
$$(a + b + 18)\;c = ac + bc + 18c$$
$$a + b + 18c = a + b + 18c$$

Bei der Multiplikation von zwei Summen muß bekanntlich jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert werden.

z. B. $(a + 4)\;(b + c)$

Wir müssen also den Buchstaben a der ersten Klammer mit b und c der zweiten und die Zahl 4 ebenfalls mit b und c der zweiten Klammer multiplizieren.

$$(a + 4)\;(b + c) = ab + ac + 4b + 4c$$

Beispiele:

$$(a + b)\;(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(5a + 2b)\;(6 - x) = 5a \cdot 6 - 5ax + 2b \cdot 6 - 2bx$$
$$= 30a - 5ax + 12b - 2bx$$

Die Richtigkeit dieser Rechnung soll mit folgendem Beispiel noch deutlicher gemacht werden:

Bekanntlich ist $6 \cdot 8 = 48$

Die beiden Faktoren 6 und 8 sollen durch Klammerausdrücke ersetzt werden:

z. B. $(4 + 2)\;\;(10 - 2) = 4 \cdot 10 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2$
$$= 40 - 8 + 20 - 4$$
$$= 48$$

oder $(9 - 3)\;\;(10 - 2) = 9 \cdot 10 - 9 \cdot 2 - 3 \cdot 10 + 3 \cdot 2$
$$= 90 - 18 - 30 + 6$$
$$= 48$$

Erfahrungsgemäß macht das Multiplizieren mit negativem (—) Vorzeichen dem Anfänger einige Schwierigkeiten.

Man denke stets an die Vorzeichenregel:

+	·	+	=	+
—	·	+	=	—
+	·	—	=	—
—	·	—	=	+

Beispiele:

$$(a - b)\;\;(c - d) = ac - ad - bc + bd$$
$$(-a + b)\;\;(c - d) = -ac + ad + bc - bd$$
$$(-a + b)\;\;(-c + d) = ac - ad - bc + bd$$
$$(-a - b)\;\;(c + d) = -ac - ad - bc - bd$$
$$(-a - b)\;\;(-c - d) = ac + ad + bc + bd$$

Nun noch einige größere Aufgaben mit Klammern:

$$m + n\,(p + r - v) - a\,(b - c) = m + np + nr - nv - ab + ac$$

Die Klammer fällt; jede Größe in der Klammer wird mit dem Faktor vor (oder hinter) der Klammer multipliziert, also $+n \cdot +p$, $+n \cdot +r$, $+n \cdot -v$ usw. Weiter ist bekanntlich zu beachten, daß bei — vor der Klammer alle Vorzeichen umzukehren sind, sobald die Klammer weggelassen wird.

Beispiel:

$$(3a - b + c)\,d - (4a + 2b - c)\,f + (8a + 5b - 6c)\,d + 40ad - 30cd =$$
$$3ad - bd + cd - (4af + 2bf - cf) + 8ad + 5bd - 6cd + 40ad - 30cd =$$
$$3ad - bd + cd - 4af - 2bf + cf + 8ad + 5bd - 6cd + 40ad - 30cd =$$
$$3ad + 8ad + 40ad - bd + 5bd + cd - 6cd - 30cd - 4af - 2bf + cf =$$
$$51ad + 4bd - 35cd - 4af - 2bf + cf$$

Man kann zuerst die Klammern mit dem — Vorzeichen stehenlassen und zunächst die Multiplikation ausführen; oder man kann auch (wie im nächsten Beispiel gezeigt) gleich multiplizieren und gleichzeitig beim Niederschreiben alle Vorzeichen umkehren.

$$a\,(m - n + p) - b\,(n - m + p) + c\,(m + n - p) =$$
$$am - an + ap - bn + bm - bp + cm + cn - cp$$

fernmeldelehrling.de

Übungsaufgaben:

$(+4) \cdot (+17) =$; $(-9) \cdot (+6) =$; $(+18) \cdot (-5) =$

$(-12) \cdot (-10) =$; $(+a) \cdot (+b) =$; $(-m) \cdot (+n) =$

$(+c) \cdot (-d) =$; $(-x) \cdot (-y) =$; $(+8x) \cdot (-7) =$; $(-9) \cdot (6b) =$

$(-4a) \cdot 6 =$; $(a - b + c) \cdot 5 =$; $5 \cdot (4x + 5) =$

$7 \cdot (2a - 3b + 8) =$; $4b \cdot (m - 3n + 6s) =$

$(-5x - 10y + 3z) \cdot (-5) =$

$3 \cdot (a + b) + 5 \cdot (a - b) - 6 \cdot (a + b) - (a - 7b) =$

$(x + 7) \cdot (x + 4) =$; $(x - 7) \cdot (x + 4) =$

$(3a + 2b) \cdot (m + n) =$; $(4x + 5) \cdot (2m + 1) =$

$(5a + 7b) \cdot (2a + 3b) =$; $(a + b) \cdot (a + b) =$

$(a - b) \cdot (a - b) =$; $(a + b) \cdot (a - b) =$; $(x + 7) \cdot (x - 4) =$

$(3a + 2b) \cdot (m - n) =$; $(4x - 5) \cdot (2m + 1) =$

$(5a - 7b) \cdot (2a + 3b) =$; $(ax - 7) \cdot (5x - 4) =$

$(3a + 5b) \cdot (7c + 8d) =$; $(11m - 12n) \cdot (15p + 7q) =$

$(9a - 5b) \cdot (5a + 7b) =$; $(12a + 14b) \cdot (9a - 5b) =$

$(3x + 5y) \cdot (15x - 25y) =$; $(8m - 11n) \cdot (16m + 22n) =$

$(x + 7) \cdot (x + 4) =$; $(x - 7) \cdot (x - 4) =$; $(6x + 1) \cdot (y + 1) =$

$(3x - 4) \cdot (2x + 5) =$; $(6{,}25a + 1{,}3b) \cdot (4a - 5b) =$

$(8x - 1{,}7) \cdot (2{,}5x - 6) =$; $(21x - 17y) \cdot (23u + 15v) =$

$(17p - 23q) \cdot (14r - 8a) =$; $(17a + 8b) \cdot (15a + 3b) =$

$(25a - 11b) \cdot (13a - 6b) =$; $(36p - 15q) \cdot (43p - 12q) =$

$(25p + 24q) \cdot (44p + 75q) =$

$(6a + 3b - 5c)\ 7x - [(5a - 4b + 5c) \cdot 2x] =$

2.3.3. Ausklammern gemeinsamer Faktoren

Vielfach ist zur Lösung algebraischer Aufgaben bzw. zur Umstellung von Formeln das Herausziehen von gemeinsamen Faktoren aus Klammerausdrücken vorteilhaft anzuwenden. Man nennt diesen Rechenvorgang **„Ausklammern"**.

Wählen wir ein einfaches Beispiel:

$$(8) + (6) = 14.$$

Wir können die Summanden jetzt wie folgt zerlegen:

$$(2 \cdot 4) + (2 \cdot 3) = 14$$

und stellen dabei fest, daß in jedem Klammerausdruck der Faktor „2" enthalten ist. Diesen **gemeinsamen Faktor** können wir **ausklammern**, d.h. vor die Klammer ziehen:

$$2 \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 7 = 14.$$

Der gleiche Rechnungsgang läßt sich bei den allgemeinen Zahlen anwenden. Beim Ausdruck

$$(a \cdot b) + (a \cdot c)$$

ist „a" der gemeinsame Faktor, den wir ausklammern können:

$$a \cdot (b + c).$$

Wenden wir zur Probe die Regel für das Multiplizieren von Klammerausdrücken an, so ergibt sich wieder:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Merke:

Enthalten die einzelnen Glieder eines mehrgliedrigen Ausdruckes einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen Faktor vor die Klammer ziehen.

In einer Aufgabe mit vielen Gliedern brauchen nicht sämtliche Glieder ein und denselben gemeinsamen Faktor zu haben. Es können auch nur einige Glieder je einen **gemeinsamen** Faktor haben.

Beispiel:

$$(2) + (8) + (9) + (3) = 22$$

Zerlegen wir die einzelnen Glieder in Faktoren, so ergibt sich:

$$(2 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 1) = 22$$

Wir erkennen, daß die beiden ersten Glieder den gemeinsamen Faktor „2", das dritte und vierte Glied den gemeinsamen Faktor „3" enthalten.

Somit können wir diese Faktoren ausklammern:

$$2 \cdot (1 + 4) + 3 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$$

Auf allgemeine Zahlen angewendet:

$$ax + bx + yz + wz = x \cdot (a + b) + z \cdot (y + w).$$

Hinweis:

Bei Anwendung des Ausklammer-Vorganges sollte möglichst der **größte gemeinsame Faktor** ausgeklammert werden.

Lösungsgang:

Zuerst ordnen, dann ausklammern!

Beispiel:

$4an - 3bc + 8ax + 6by =$

$4an + 8ax + 3bc + 6by =$ (ordnen!)

$4a\ (n + 2x) + 3b\ (c + 2y)$ (ausklammern!)

Übungsaufgaben:

$8 \cdot 3 + 8 \cdot 7 - 8 \cdot 5 =$; $7a + 7b =$; $7x + 7 =$

$12a^2 - 9ab =$; $8ax + 20x^2 =$

fernmeldelehrling.de

Bei der Lösung der Aufgabe

$$ax - 2a - bx + 2b = a\,(x - 2) - b\,(x - 2)$$

ergibt sich, daß im Ergebnis wieder ein gemeinsamer Faktor „$(x - 2)$“ enthalten ist, den man ebenfalls ausklammern kann.

Also:

$$a\,(x - 2) - b\,(x - 2) = (a - b) \cdot (x - 2)$$

Beispiele:

a) $18a - ma + 18c - mc =$

$18a + 18c - ma - mc =$ (ordnen!)

$18\,(a + c) - m\,(a + c) =$ (ausklammern!)

$(18 - m) \cdot (a + c)$ (nochmals ausklammern!)

b) $8ax - 10bx - 20ay + 25by + 12az - 15bz =$

$8ax - 20ay + 12az - 10bx + 25by - 15bz =$ (ordnen!)

$4a \cdot (2x - 5y + 3z) - 5b \cdot (2x - 5y + 3z) =$ (ausklammern!)

$(4a - 5b) \cdot (2x - 5y + 3z)$ (nochmals ausklammern!)

Übungsaufgaben:

$(a - b) \cdot (3x - 2y) + (a - b) \cdot (4x - 7y) =$

$12uv - 15uw - 24v^2 + 30vw =$

$36uv - 63v^2 - 32u + 56v =$

$48ac + 12ad + 56bc + 14bd =$

$24xy - 8y + 3x - 1 =$

$6x^2 - 8xy + 12xz - 9x + 12y - 18z =$

2.3.4. Multiplikation von Brüchen

Wir wenden die bekannten Bruchregeln beim Buchstabenrechnen an:

Beispiele:

$\frac{a}{b} \cdot 5 = \frac{5a}{b}$; $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n}$

$\frac{a}{b} \cdot 8b = 8a$; $\frac{x}{yz} \cdot 2z = \frac{2x}{y}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$; $\frac{am}{nb} \cdot \frac{dc}{m} = \frac{adc}{nb}$

Übungsaufgaben:

$\frac{3x}{5ym} \cdot 20m =$; $3m \cdot \frac{7m}{6n} =$; $4ab \cdot \frac{5x}{16by} =$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} =$

$\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{a} =$; $\frac{3a}{8b} \cdot \frac{4b}{9a} =$; $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{15a}{4b} =$; $\frac{18m}{7n} \cdot \frac{7m}{36n} =$

$\frac{x}{s} - \frac{y}{t} \cdot m =$; $\frac{2x}{9y} \cdot \frac{3y}{7x} =$; $\frac{2a}{3} \cdot \frac{4b}{5} \cdot \frac{7c}{8} =$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot (x + y) =$; $\frac{3}{4}a \cdot \frac{4}{5}b \cdot \frac{5}{6}c =$; $\frac{p + q}{z} \cdot \frac{x}{y} =$

$\frac{x}{9} - \frac{y}{6} \cdot 18 =$; $\frac{3a - 5}{4} \cdot \frac{2m}{7} =$; $\frac{5x - 3}{4} \cdot \frac{3x + 7}{5} =$

$\left(\frac{x}{s} - \frac{y}{t}\right) \cdot m =$; $\frac{4x - 1}{7} \cdot \frac{4x + 1}{5} =$; $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a + b) =$

$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot (a - b) =$; $(a - b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) =$

$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{y}\right) =$; $\frac{2a - 7b + 3c}{n} \cdot 9 =$

$\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c\right) \cdot (-6) =$; $\left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{6}c\right) \cdot (+12x) =$

$\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) =$; $(ax + bx + c) \cdot \frac{1}{x} =$

2.4. Die Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

Die Regeln ergeben sich unmittelbar durch Umkehrung der Sätze über die Multiplikation.

Das **Rechenzeichen** bei der **Division** ist der **Doppelpunkt :**. Es ist aber auch üblich, die Division in **Bruchform** darzustellen; das gilt besonders bei allgemeinen Zahlen.

$$20 : 5 = 4 \quad \text{oder} \quad \frac{20}{5} = 4 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = c$$

Dividend und **Divisor** (Zähler und Nenner) darf man **nicht** vertauschen, sonst erhält man den **Kehrwert (reziproken Wert)** des Bruches.

Bei der Division relativer Zahlen gilt hinsichtlich der Vorzeichen dasselbe wie bei der Multiplikation.

+	:	+	=	+
+	:	−	=	−
−	:	+	=	−
−	:	−	=	+

$(+a) : (+b) = +\,(a : b)$

$(+a) : (-b) = -\,(a : b)$

$(-a) : (+b) = -\,(a : b)$

$(-a) : (-b) = +\,(a : b)$

fernmeldelehrling.de

2.4.1. Division von Brüchen

Wir erinnern uns an folgende Regel aus der Bruchrechnung:

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den **Nenner** mit der Zahl multipliziert (oder mit dem reziproken Wert multipliziert).

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Übungsaufgaben:

$$\frac{8a}{b} : 12 = \,; \quad \frac{4a}{b} : (-a) = \,; \quad \frac{12ab}{5c} : 4a = \,; \quad \frac{35u^2v^2}{8w} : 7uv =$$

$$\frac{ma + mb}{x - y} : (a + b) = \,; \quad \frac{\frac{7x}{8a} + \frac{4y}{5b}}{35xy} =$$

Eine **ganze Zahl** oder ein **Bruch** wird **durch** einen Bruch (Divisor) dividiert, indem man mit seinem **reziproken** Wert multipliziert.

z. B. a) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1}$ oder $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$

b) $2 : \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3}$ oder $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$

Übungsaufgaben:

$$2a : \frac{1}{3} = \,; \quad 4x : \frac{2}{3} = \,; \quad 4a : \frac{3m}{3n} = \,; \quad \frac{a}{x} : \frac{b}{x} = \,; \quad \frac{4a}{5b} : \frac{8a}{3x} =$$

$$\frac{21ab}{4m^2} : \frac{7a}{m} = \,; \quad \frac{x + y}{x} - \frac{x - y}{x} = \,; \quad \frac{3a}{5b} : \frac{5a}{4b} \cdot \frac{5b}{8a} =$$

2.4.2. Division einer mehrgliedrigen Größe durch eine Zahl

Wenn die Zahl 192 durch 3 dividiert werden soll, dann kann man die Zahl 192 in die Summe 150 + 30 + 12 zerlegen und jeden Summanden durch 3 dividieren.

$$\frac{150 + 30 + 12}{3} = \frac{150}{3} + \frac{30}{3} + \frac{12}{3} = 50 + 10 + 4 = 64$$

Allgemein ist demzufolge:

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

Merke:

Eine **mehrgliedrige** Größe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied durch die Zahl **dividiert** und die Quotienten **addiert.**

Wenn man diesen Rechenvorgang rückwärts betrachtet, dann erkennt man:

Gleichnamige Brüche werden vereinigt, indem man die Zähler auf einem gemeinsamen Bruchstrich addiert oder subtrahiert und unter dem Bruchstrich den gemeinsamen Nenner angibt.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a - b + c}{d}$$

Ungleichnamige Brüche können nicht ohne weiteres vereinigt werden. Man muß sie **gleichnamig** machen, d. h. sie so erweitern, daß sie den gleichen Nenner erhalten.

z. B. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4 + 3}{3 \cdot 2} = \frac{7}{6}$

oder $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + cb}{bd}$

2.5. Rangfolge der Punkt- und Strichrechnung

> **Kommen in einer Aufgabe Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten ohne Klammer vor, so müssen stets Produkte und Quotienten zuerst ausgerechnet werden. Punktrechnung geht vor Strichrechnung.**

Beispiele:

a) $4 + \underbrace{12 \cdot 2} - \underbrace{6 : 2} =$

$4 + 24 - 3 = 25$

b) $10a^2 - \underbrace{4a \cdot 2a} + \underbrace{4a : a} =$

$10a^2 - 8a^2 + 4 = 2a^2 + 4$

Soll eine andere Reihenfolge vorgeschrieben werden, dann sind **Klammern** zu setzen. Innerhalb der **Klammern** gelten die allgemeinen Rechenregeln.

Beispiel:

$4\,(4 + \underbrace{8 \cdot 2}) - 20 - \underbrace{24 : 4} =$

$4\,(4 + 16) - 20 - 6 =$

$4 \cdot 20 - 20 - 6 =$

$80 - 20 - 6 = 54$

fernmeldelehrling.de

Bei einer Aufgabe $\frac{a}{b} = ?$ ist das Ergebnis unbestimmt. Sein Wert wird erst nach dem Einsetzen von a und b bestimmt. Denken wir uns für $a = 4$ und $b = 2$, dann ist

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{2} = 2$$

Sind Zähler und Nenner **gleich**, so ergibt sich stets 1, auch wenn in der Buchstabenrechnung keine bestimmte Zahl vorkommt.

z. B. $\frac{a}{a} = \frac{4}{4} = 1$ oder $\frac{b}{b} = 1$ usw.

Ebenso ist auch: $\frac{a + b}{a + b} = 1$ oder $\frac{x + y}{x + y} = 1$

Nur darf man es nicht verwechseln mit:

$$a + \underline{b : a} + b = \textbf{nicht 1}$$

Wir haben gehört, daß Punktrechnung (:) vor Strichrechnung (+) geht. Bei diesem Beispiel muß also erst die Division $b : a$ ausgeführt werden, dann erst die Additionen. Mit der Verwendung eines Bruchstriches wird dieser Fehler ausgeschlossen.

$$a + \frac{b}{a} + b$$

Anders ist es, wenn $a + b$ in Klammern gesetzt wird, dann heißt es:

$$(a + b) : (a + b) = \frac{a + b}{a + b} = 1$$

Setzen wir den Ausdruck $a + b$ auf einen Bruchstrich oder als Nenner darunter, so ist keine Klammer notwendig. **Der Bruchstrich ersetzt die Klammer.**

Machen wir die Probe, ob das stimmt. Setzen wir in dem folgenden Beispiel für $a = 5$ und für $b = 6$ ein; es muß immer dasselbe herauskommen.

$$\begin{aligned} 24a - (48a + 56b) : 8 &= 24 \cdot 5 - (48 \cdot 5 + 56 \cdot 6) : 8 \\ &= 120 - (240 + 336) : 8 \\ &= 120 - 576 : 8 \\ &= 120 - 72 \\ &= 48 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 24a - \frac{(6a + 7b)\cancel{8}}{\cancel{8}} &= 24 \cdot 5 - (6 \cdot 5 + 7 \cdot 6) \\ &= 120 - (30 + 42) \\ &= 120 - 72 \\ &= 48 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 18a - 7b &= 18 \cdot 5 - 7 \cdot 6 \\ &= 90 - 42 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Immer dasselbe Ergebnis, also stimmt es!

Beispiel 1:

$$14m + [(3m - 2n)\,x - 3\,(5m + 7n)\,x] : x =$$

Die Teilung durch x bezieht sich nur auf den Ausdruck in der eckigen Klammer. Da jedes Glied die Zahl x enthält, so können wir durch x kürzen. Wir ziehen also x heraus. Vorher müssen jedoch die runden Klammern aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 14m + [3mx - 2nx - 15mx - 21nx] : x &= \\ 14m + [-12mx - 23nx] : x &= \\ 14m + x\,[-12m - 23n] : x &= \\ 14m + \frac{x\,[-12m - 23n]}{x} &= \\ 14m + [-12m - 23n] &= \\ 14m - 12m - 23n &= \\ 2m - 23n & \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\frac{12ab - 15bc + 8bd}{4b}$$

Hier ist $4b$ nicht in allen Gliedern des Zählers (Dividenden) enthalten, aber b ist überall vorhanden, also ziehen wir b heraus und erhalten:

$$\frac{b\,(12a - 15c + 8d)}{4b} = \frac{12a - 15c + 8d}{4}$$

Beispiel 3:

$$24a - (48a + 56b) : 8$$

Hier bezieht sich das : 8 nicht auf den ganzen Ausdruck, so verlockend auch $24a$ aussieht. Wenn das gemeint wäre, so müßte der ganze Ausdruck in Klammern stehen, wie im folgenden Beispiel:

Beispiel 4:

$$[24a - (48a + 56b)] : 8$$

Nach der Rangordnung der Rechenzeichen muß in dem Beispiel 3 die Division nur mit dem in Klammern gesetzten Ausdruck $(48a + 56b) : 8$ durchgeführt werden.

Es gibt noch zwei weitere Möglichkeiten:

Beispiel 5:

$$(24a - 48a + 56b) : 8$$

Beispiel 6:

$$(24a - 48a) + 56b : 8$$

Auch beim Beispiel 5 erstreckt sich die Division : 8 auf den ganzen Ausdruck; es ergibt sich aber doch ein anderes Resultat als in dem Beispiel 4.

Beim Beispiel 6 dagegen ist nur $56b$ durch 8 zu teilen.

Nun zurück zum Beispiel 3:

Da wir nur den Klammerausdruck $(48a + 56b)$ durch 8 teilen müssen, versuchen wir aus diesen beiden Zahlen die 8 herauszuziehen, also so:

fernmeldelehrling.de

$$24a - 8\,(6a + 7b) : 8 = 24a - \frac{8\,(6a + 7b)}{8}$$
$$= 24a - (6a + 7b)$$

Diese Aufgabe läßt sich noch weiter rechnen:

$$24a - (6a + 7b) = 24a - 6a - 7b = 18a - 7b$$

Beachten Sie:

Sind Zähler und Nenner gleich, so ergibt sich hieraus der Wert 1. Es muß aber ganz genau darauf geachtet werden, ob beide Ausdrücke vollständig übereinstimmen.

z. B. $2ab : 2ab = \frac{2ab}{2ab} = 1$

oder $2ba : 2ab =$ dasselbe, also auch 1

aber $2ab : (2a + b) = \frac{2ab}{2a + b} =$ nicht 1

Bei der letzten Aufgabe ist der Quotient nicht 1. Denn $2ab$ ist etwas anderes als $2a + b$. Denken wir uns Werte eingesetzt, z. B. $a = 6$, $b = 8$:

$$\frac{2ab}{2ab} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{96}{96} = 1$$

aber $$\frac{2ab}{2a + b} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 6 + 8} = \frac{96}{20} = 4{,}8$$

Es ist immer zu versuchen, die Zahlen und Buchstaben zu kürzen.

z. B. a) $\frac{12acxy}{12axy} = \frac{c}{1} = c$ b) $\frac{cd}{c} = d$ c) $\frac{4c}{5c} = \frac{4}{5}$

d) $\frac{4d}{5c} = \frac{4d}{5c}$ (nichts zu kürzen) e) $\frac{20c}{5c} = 4$

Enthält der Zähler in allen Teilen die gleiche Größe wie der Nenner, so zieht man diese heraus und kürzt, indem man sie oben und unten wegläßt.

z. B. $$\frac{12ab - 16bc + 8bd}{4b} = \frac{4b\,(3a - 4c + 2d)}{4b} = 3a - 4c + 2d$$

Da bei dem vorstehenden Bruch sowohl oben wie unten $4b$ enthalten ist, ziehen wir oben $4b$ aus allen Gliedern heraus und kürzen.

2.6. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 2.

1. Was sind bestimmte Zahlen? 2. Was sind allgemeine Zahlen? 3. Was ist eine Beizahl? 4. Wann darf man das Malzeichen weglassen? 5. Was sind relative Zahlen? 6. Wie werden relative Zahlen addiert und subtrahiert? 7. Was ist zu beachten, wenn ein + Zeichen vor der Klammer steht? 8. Was ist zu beachten, wenn ein − Zeichen vor der Klammer steht? 9. Welche Vorzeichenregeln muß man beim Multiplizieren beachten? 10. Was ist zu beachten, wenn kleine Klammern von großen eingeschlossen sind? 11. Wie wird eine Zahl mit einer Summe multipliziert? 12. Wie werden Summen miteinander multipliziert? 13. Wann kann man Faktoren ausklammern? 14. Welche Vorzeichenregeln muß man beim Dividieren beachten? 15. Kann man eine Summe durch eine Zahl dividieren?

3. Die Potenzrechnung

Wie das Multiplizieren eine Abkürzung des Addierens **gleicher Summanden** ist (z. B. $a + a + a = 3 \cdot a$), so ist das **Potenzieren** eine Abkürzung des Multiplizierens gleicher Faktoren.

z. B. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

oder $$\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{Faktoren}} = \underbrace{a^3}_{\text{Potenz}}$$

3 — Exponent (Hochzahl)
a — Basis (Grundzahl)

Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren.

Den sich wiederholenden Faktor (a) nennt man die Basis (Grundzahl) der Potenz.

Die Zahl, welche die Anzahl der Faktoren bestimmt (^{3}), heißt Exponent (Hochzahl) der Potenz.

Das Ergebnis heißt Potenzwert.

Das Rechnungszeichen des Potenzierens besteht darin, daß man den Exponenten als kleiner geschriebene Zahl rechts oben neben die Basis setzt (a^3).

$a \cdot a = a^2$ ist die zweite Potenz von a,
gelesen: „a **hoch 2**" oder „a **Quadrat**"

$a \cdot a \cdot a = a^3$ ist die dritte Potenz von a,
gelesen: „a **hoch 3**"

$a \cdot a \cdot a \ldots n$ **mal** $= a^n$ ist die n-te Potenz von a,
gelesen: „a **hoch** n" oder „a **zur** n**-ten Potenz**"

$a = a^1$ Die Zahl a selbst kann man als die erste Potenz von a auffassen und a^1 schreiben.

Der **Potenz-Exponent** gibt also auf **einfache, kurze** Weise eine Rechenoperation an, die sonst nur zeit- und raumraubend darzustellen wäre.

Beispiel:

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$
$$12^2 = 12 \cdot 12 = 144$$
$$12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$$

Ist ein gewöhnlicher Bruch zu potenzieren, so müssen **Zähler und Nenner** potenziert werden.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$$

fernmeldelehrling.de

$$\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{343}{512}$$

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^2 = 2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 8}{3 \cdot 3} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

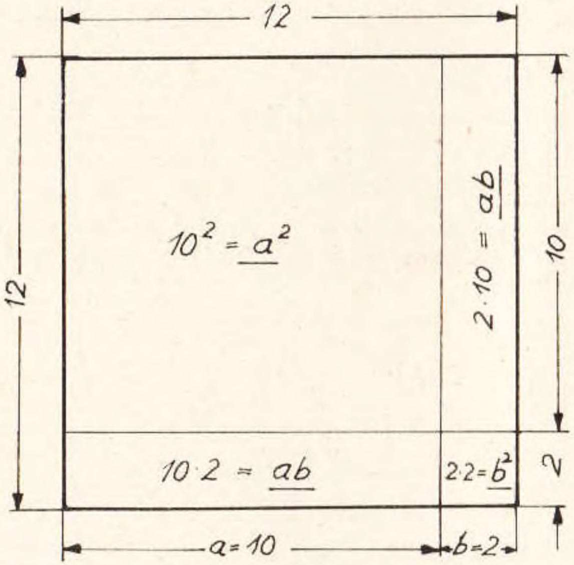
Das **Quadrieren** wollen wir im Hinblick auf das nächste Kapitel (Radizieren) besonders eingehend behandeln. Eine einstellige Zahl zu quadrieren (3^2, 4^2, 9^2 usw.) ist eine einfache Sache. Das **Quadrieren** einer **zweistelligen** Zahl, z. B. $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$, soll im Hinblick auf das nächste Kapitel (Radizieren) durch eine bildliche Darstellung veranschaulicht werden.

$12 \cdot 12 =$

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 &= 100 \\ 10 \cdot 2 &= 20 \\ 2 \cdot 10 &= 20 \\ 2 \cdot 2 &= 4 \\ \hline & 144 \end{aligned}$$

oder mit Buchstaben:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10 &= a^2 \\ \left.\begin{aligned} 10 \cdot 2 &= ab \\ 2 \cdot 10 &= ba \end{aligned}\right\} & 2\,ab \\ 2 \cdot 2 &= b^2 \\ \hline a^2 + 2\,ab + b^2 \end{aligned}$$



(Abb. 23)

dafür kann man schreiben:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

Das Quadarat von 12 oder $12^2 = 144$ besteht demnach aus vier Rechenoperationen.

(1)	a^2	$= 10 \cdot 10$	(Quadrat der Zehner)
(2)	ab	$= 10 \cdot 2$	(Produkt aus Einer und Zehner)
(3)	ba	$= 2 \cdot 10$	(Produkt aus Einer und Zehner)
(4)	b^2	$= 2 \cdot 2$	(Quadrat der Einer)

$$a^2 + 2ab + b^2 = 144$$

Diese Überlegung ist außerordentlich **wichtig.** Jedes Quadrat einer zweistelligen Zahl besteht aus dem Quadrat der Zehner (a^2), dem Quadrat der Einer (b^2) und zweimal aus dem Produkt der Zehner und Einer ($2ab$). Beim Radizieren kommen wir hierauf zurück.

3.1. Addition und Subtraktion von Potenzen

Potenzen können **nur** addiert oder subtrahiert werden, wenn sie **dieselben Basen und dieselben Exponenten haben.**

Beispiel:

$$4a^3 + 6a^3 + 9a^3 - 5a^3 - 14a^3 + 7a^3 = 7a^3$$

Hier sind alle Basen und alle Exponenten gleich, nämlich alle a^3.

Um die Addition auszuführen, brauchen wir nur die Faktoren 4, 6, 9 usw. zu addieren beziehungsweise zu subtrahieren.

Ebenso: $3b^2 + 2b^2 - b^2 + 4b^2 - 6b^2 = 2b^2$

Wie steht es nun aber mit der Aufgabe:

$$4a^3 + 6a^2 + 9a^4 - 5a^5 = ?$$

In der vorstehenden Aufgabe sind die **Basen gleich** (a), die **Exponenten** sind aber **verschieden** (a^3, a^2 usw.).

Diese Rechnung ist **nicht weiter ausführbar.**

Wir merken uns:

Potenzen werden addiert beziehungsweise subtrahiert, indem die Faktoren addiert oder subtrahiert werden. Die Basen und Exponenten müssen jedoch gleich sein und bleiben im Ergebnis unverändert.

3.2. Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit **gleicher Basis** werden **multipliziert,** indem man ihre **Exponenten addiert** und die Grundzahl beibehält. Der Exponent muß nicht gleich sein.

Beispiel:

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{4+3+2} = a^9$$

Um diese Rechenoperation deutlich zu machen, setze man in der vorstehenden Aufgabe für a den Wert 10 ein.

$$\begin{aligned} a^4 &= 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \\ a^3 &= 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \\ a^2 &= 10^2 = 10 \cdot 10 = 100 \end{aligned}$$

fernmeldelehrling.de

Wir erhalten 10000, 1000 und 100. Diese Zahlen müssen nun **multipliziert** werden, also

$$10000 \cdot 1000 \cdot 100 = 1000000000$$

Wir kommen aber auch zum gleichen Ergebnis, wenn wir die Basis (10) beibehalten und die einzelnen Exponenten addieren.

$$10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = \mathbf{10^{4+3+2}} = \mathbf{10^9}$$

$$10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000000$$

Ebenso: $4a^2 \cdot 6a^3 \cdot 9a^4 \cdot 5a^3 = ?$

$$4a^2 = 4 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$$

$$6a^3 = 6 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6000$$

$$9a^4 = 9 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$$

$$5a^3 = 5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5000$$

Die Einzelergebnisse müssen multipliziert werden:

$$400 \cdot 6000 \cdot 90000 \cdot 5000 = 1080000000000000$$

Wir kommen zum gleichen Ergebnis, wenn wir die Aufgabe wie folgt anfassen:

$$4a^2 \cdot 6a^3 \cdot 9a^4 \cdot 5a^3 = 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5a^{2+3+4+3} = 1080a^{12}$$

$$1080a^{12} = 1080000000000000$$

Beispiele:

a) $3a^2b^7 \cdot 5a^3b^2 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^7 \cdot b^2$
$= 15a^{2+3}b^{7+2}$
$= 15a^5b^9$

b) $(2ab)^3 = 2^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2a^3 \cdot b^3$
$= 8a^3b^3$

3.3. Division von Potenzen

Das Dividieren ist, wie wir wissen, eine **Umkehrung** des Multiplizierens. Wie wir beim Multiplizieren der Potenzen ihre Exponenten **addiert** haben, so müssen wir beim **Dividieren** von Potenzen deren **Exponenten subtrahieren.**

Beispiel:

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$$

Wir machen auch jetzt wieder die Probe, indem wir für $a = 10$ einsetzen.

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{1000000}{100} = 10000$$

oder einfacher:

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4 = 10^4 = 10000$$

Stehen in der Aufgabe noch **Faktoren** dabei, so werden die Faktoren **vorher dividiert.**

z.B. $\frac{10x^4}{5x^3} = 2x^{4-3} = 2x$

oder $\frac{15y^5}{5y^2} = 3y^{5-2} = 3y^3$

Ein **Bruch** wird **potenziert,** indem man **Zähler** und **Nenner potenziert.**

z.B. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$

oder $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

Wenn bei einem Bruch der **Exponent** des **Nenners größer** als der des Zählers ist, so kann die Lösung auf 2 Arten gefunden werden:

z.B. $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$

Andererseits ist $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$

Demnach ist $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung:

Wird eine Potenz vom **Zähler** in den **Nenner** oder vom Nenner in den Zähler gebracht, so muß man das **Vorzeichen** des **Exponenten umkehren.**

z.B. $\frac{a^{-2} \cdot b^3}{a^{-3} \cdot b^2} = a^{-2} \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^{-2} = a^{-2+3} \cdot b^{3-2} = ab$

Allgemein ist nach den gelernten Potenzregeln:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Andererseits ist $\frac{a^m}{a^m} = 1$

Demnach ist $a^0 = 1$

Hieraus ergibt sich:

Jede Potenz mit dem Exponenten Null hat den Wert 1.

fernmeldelehrling.de

$a^0 = 1$
$b^0 = 1$
$x^0 = 1$
usw.

3.4. Potenzen von Summen und Differenzen

Eine **Summe** oder **Differenz** wird potenziert, indem man die Potenz in ein **Produkt** verwandelt und die entstehenden Klammern ausrechnet.

$(2 + 4)^2 = 6^2 = 36$

oder $(2 + 4)^2 = (2 + 4) \cdot (2 + 4) = 4 + 8 + 8 + 16 = 36$

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Einen Zahlenausdruck mit zwei Gliedern in einer Klammer nennt man ein **Binom.**

3.5. Potenzen von Produkten

Ein **Produkt** wird **potenziert,** indem man **jeden Faktor** potenziert.

$(2 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 64$

oder $(2 \cdot 4)^2 = 8^2 = 64$

$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

3.6. Potenzen von Potenzen

Eine **Potenz** wird **potenziert,** indem man die **Exponenten multipliziert** und die Basis beibehält.

z.B. $(2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$(a^2)^2 = a^{2 \cdot 2} = a^4$

$(a^2 \cdot b^3)^3 = a^{2 \cdot 3}\, b^{3 \cdot 3} = a^6\, b^9$

3.7. Das Rechnen mit Zehnerpotenzen

Bei **unübersichtlichen großen oder kleinen** Zahlen ist es häufig zweckmäßig, die Zahl als **Zehnerpotenz** darzustellen.

Beispiele:

a) $5\,255\,500 = 5{,}2555 \cdot 10^6$
$= 52{,}555 \cdot 10^5$
$= 525{,}55 \cdot 10^4$
$= 5255{,}5 \cdot 10^3$
$= 52555 \cdot 10^2$

b) $0{,}000550 = 550 \cdot 10^{-6}$
$= 55{,}0 \cdot 10^{-5}$
$= 5{,}5 \cdot 10^{-4}$

Bei einer Multiplikation mit einer **Zehnerpotenz** wird das Komma um **so viele Stellen** nach **rechts** (bei positivem Exponent) beziehungsweise nach **links** (bei negativem Exponenten) **verschoben,** wie der **Exponent angibt.**

Die folgende Aufstellung gibt eine Übersicht über die gebräuchlichsten Zehnerpotenzen:

Zehnerpotenz	Zahl	Zahlwort	Bezeichnung der Maßeinheit	
10^{12}	1 000 000 000 000	Billion	Tera	T
10^9	1 000 000 000	Milliarde	Giga	G
10^6	1 000 000	Million	Mega	M
10^3	1 000	Tausend	Kilo	k
10^2	100	Hundert	Hekto	h
10^1	10	Zehn	Deka	D
10^0	1	Eins		
10^{-1}	0,1	ein Zehntel	Dezi	d
10^{-2}	0,01	ein Hundertstel	Zenti	c
10^{-3}	0,001	ein Tausendstel	Milli	m
10^{-6}	0,000 001	ein Millionstel	Mikro	μ
10^{-9}	0,000 000 001	ein Milliardstel	Nano	n
10^{-12}	0,000 000 000 001	ein Billionstel	Pico	p

fernmeldelehrling.de

z.B. $1\,\mathrm{K\Omega} = 1\,000\,\Omega = 10^3\,\Omega$

$1\,\mathrm{M\Omega} = 1\,000\,000\,\Omega = 10^6\,\Omega$

$$1\,\mu\mathrm{F} = \frac{1}{1\,000\,000}\,\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$$

$$1\,\mathrm{mA} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{A} = 10^{-3}\,\mathrm{A}$$

Umwandeln von Zahlen in Zehnerpotenzen und Rechnen mit Zehnerpotenzen:

Beispiel:

$$\frac{0{,}05 \cdot 1\,200\,000}{0{,}00002 \cdot 15\,000\,000} =$$

Wenn wir diese Aufgabe ausrechnen wollen, ohne unsere Potenzregeln zu benutzen, könnten leicht Rechenfehler entstehen, zum anderen wäre sie auch nicht ganz einfach zu lösen.

Beim Rechnen mit unübersichtlich großen oder kleinen Zahlen ist es daher oft von Vorteil, die Zahl in ein Produkt einer übersichtlichen, geringstelligen Zahl mit einer Zehnerpotenz zu zerlegen. Die Zehnerpotenzen lassen sich dann leicht zusammenfassen oder fallen durch Kürzen ganz weg.

$$\frac{0{,}05 \cdot 1\,200\,000}{0{,}00002 \cdot 15\,000\,000} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 10^6}$$

$$= \frac{5 \cdot 12 \cdot 10^3}{2 \cdot 15 \cdot 10^1} = 2 \cdot 10^{3-1} = \underline{\underline{200}}$$

Beispiele aus der Elektrotechnik:

1. Verwandle $130\,\mathrm{V}$ in mV

$1\,\mathrm{V} = 10^3\,\mathrm{mV}$
$130\,\mathrm{V} = 130 \cdot 10^3\,\mathrm{mV}$
$130\,\mathrm{V} = 130\,000\,\mathrm{mV}$

2. Verwandle $0{,}5\,\mu\mathrm{F}$ in F

$1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$
$0{,}5\,\mu\mathrm{F} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$
$0{,}5\,\mu\mathrm{F} = 0{,}0000005\,\mathrm{F}$

3. Berechne U, wenn

$J = 6\,\mathrm{mA} = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$
$R = 12\,\mathrm{k\Omega} = 12 \cdot 10^3\,\Omega$
$U = I \cdot R$
$U = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^3$
$U = 6 \cdot 12 \cdot 10^{3-3}$
$U = 72\,\mathrm{V}$

4. Berechne I, wenn

$U = 0{,}6\,\mathrm{kV} = 6 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$
$R = 1{,}5\,\mathrm{M\Omega} = 1{,}5 \cdot 10^6\,\Omega$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{6 \cdot 10^2}{1{,}5 \quad 10^6}$$

$I = 4 \cdot 10^{2-6}$
$I = 4 \cdot 10^{-4}$
$I = 0{,}0004\,\mathrm{A}$
$I = 0{,}4\,\mathrm{mA}$

5. Berechne R, wenn

$U = 60\,\mathrm{V}$
$I = 50\,\mathrm{mA} = 50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{60}{50 \cdot 10^{-3}}$$

$R = 1{,}2 \cdot 10^3$
$R = 1200\,\Omega$

Übungsaufgaben:

a) für das Umwandeln von Zahlen in Produkte mit Zehnerpotenzen:

$118\,000\,000 = 1{,}18 \cdot 10^{\cdots}$, oder $118 \cdot 10^{\cdots}$,
$11\,000 = 11 \cdot 10^{\cdots}$, oder $0{,}11 \cdot 10^{\cdots}$,
$230\,000 = 2{,}3 \cdot 10^{\cdots}$, oder $0{,}230 \cdot 10^{\cdots}$,
$12\,000\,000 = 12 \cdot 10^{\cdots}$, oder $1{,}2 \cdot 10^{\cdots}$,
$0{,}00000125 = 1{,}25 \cdot 10^{\cdots}$, oder $125 \cdot 10^{\cdots}$,
$0{,}125 = 125 \cdot 10^{\cdots}$, oder $1{,}25 \cdot 10^{\cdots}$,
$0{,}000120 = 120 \cdot 10^{\cdots}$, oder $1{,}2 \cdot 10^{\cdots}$,

b) für das Rechnen mit großen Zahlen unter Zuhilfenahme von Zehnerpotenzen:

$$\frac{60\,000 \cdot 0{,}0000125}{1500 \cdot 250 \cdot 0{,}0005} = ; \qquad \frac{3\,330\,000 \cdot 25 \cdot 10^8}{0{,}00000666 \cdot 5 \cdot 10^4} =$$

$$\frac{0{,}0000018 \cdot 1\,500\,000}{0{,}24 \cdot 0{,}00012} = ; \qquad \frac{15 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^6}{12 \cdot 10^{-3} \cdot 75 \cdot 10^{-2}} =$$

$$\frac{65\,000 \cdot 0{,}7500}{0{,}0013 \cdot 1800} =$$

c) Verwandle:

20 kΩ in Ω	2 nF in pF
6 MΩ in kΩ	0,06 m in cm
10 µF in nF	3600 mm in m

3.8. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 3.

1. Was versteht man unter einer Potenz? 2. Wie heißen die einzelnen Glieder einer Potenz? 3. Wann und wie können Potenzen addiert beziehungsweise subtrahiert werden? 4. Wie werden Potenzen mit gleicher Grundzahl multipliziert? 5. Wie werden Potenzen dividiert? 6. Wie wird eine Potenz vom Zähler in den Nenner gebracht? 7. Wie wird eine Summe oder Differenz potenziert? 8. Wie werden Potenzen potenziert? 9. Wie potenziert man einen Bruch? 10. Weshalb verwendet man Zehnerpotenzen?

4. Das Radizieren (Wurzelrechnung)

4.1. Allgemeines

Haben wir die Potenz 4^2, so läßt sich aus der Basis 4 und dem Exponenten ^{2} der Potenzwert $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ berechnen.

fernmeldelehrling.de

Welche Zahl muß aber ins **Quadrat** erhoben werden, um die Zahl **16** zu erhalten?

Die Basis (4) ist also **unbekannt.** Bekannt sind dafür der Potenzwert 16 und der Exponent ². Diese Aufgabe führt uns zur **Wurzelberechnung.**

Das **Wurzelziehen** oder **Radizieren** ist nichts anderes als das Bestimmen der **Basis,** wenn der Potenzwert und der Potenzexponent bekannt sind.

Wir unterscheiden das Ausziehen der **Quadratwurzel,** der **Kubikwurzel usw.** Wie es eine 2., 3., 4. usw. Potenz gibt, so gibt es auch das Ausziehen der 2., 3., 4. usw. Wurzel. Praktisch kommt jedoch nur die 2. und 3. Wurzel, also die Quadrat- und Kubikwurzel in Betracht.

Beispiele:

a) $\sqrt[2]{25} = 5$ Probe: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

b) $\sqrt[3]{125} = 5$ Probe: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Das Zeichen für das Ausziehen der Wurzel ist ein etwas verzerrtes lateinisches r, von Radix = Wurzel. Zum Wurzelziehen wird in die obere Öffnung eine kleine ²,³ usw. gesetzt, um anzugeben, ob die 2. oder 3. Wurzel gemeint ist.

$$\underset{\text{Radikand}}{\overset{\text{Wurzelexponent}}{\sqrt[3]{125}}} = \underset{\text{Wurzelwert}}{5}$$

Bei der Quadratwurzel kann man den Wurzelexponenten ² weglassen.

$\sqrt{64}$ heißt also Quadratwurzel aus $64 = 8$; Probe: $8 \cdot 8 = 64 = 8^2$

oder $\sqrt[3]{64}$ heißt Kubikwurzel aus $64 = 4$; Probe: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = 4^3$

Wir sehen also, daß das **Ausziehen** der **Wurzel** die **Umkehrung** des **Potenzierens** ist. Wie Dividieren die Umkehrung des Multiplizierens und Subtrahieren die Umkehrung des Addierens ist.

Wir haben in dem letzten Kapitel bei der Potenzrechnung das Quadrieren einer zweistelligen Zahl in einer bildlichen Darstellung veranschaulicht. Es wurde hierbei festgestellt, daß die Aufgabe $12^2 = 144$ aus 4 Rechenoperationen besteht, nämlich aus $10^2 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 2^2$ oder $a^2 + 2ab + b^2$.

Darauf gründet sich nun das Ausziehen der Wurzel $\sqrt{144}$. In der Zahl 144 steckt also eine Summe der Glieder $a^2 + 2ab + b^2$, wobei die Werte für a und b zunächst noch unbekannt sind. Will man die Quadratwurzel aus der Zahl ziehen, so muß man die Größen a und b **suchen** und dann die Glieder a^2, $2ab$ und b^2 wieder von der Zahl **abziehen.** Man geht dabei wie folgt vor:

$$\sqrt{1'44}$$

Man teilt die Zahl von rechts nach links in **Gruppen** von je **2 Ziffern** ein; bei Dezimalzahlen vom Komma nach links und rechts.

Die Zahl der Gruppen gibt an, wieviel Stellen das Ergebnis hat.

In dem folgenden Beispiel wollen wir zum besseren Verständnis die Potenz- und Wurzelrechnung gegenüberstellen

Potenzieren: Radizieren:

$$\begin{array}{rcl}
12 \cdot 12 = 144 & & \sqrt{1'44} = \overset{a}{10} + \overset{b}{2} = \overset{ab}{12} \\
\underline{(10 + 2)\,(10 + 2) =} & & \\
10 \cdot 10 = 100 & a \cdot a = a^2 \longrightarrow & \underline{\mathbf{100}} \\
 & & \mathbf{44} : \overset{2a}{20} = \overset{b}{2} \\
\left.\begin{array}{r} 10 \cdot 2 = 20 \\ 2 \cdot 10 = 20 \end{array}\right\} & 2ab \longrightarrow & \underline{\mathbf{40}} \\
 & & \mathbf{4} \\
2 \cdot 2 = 4 & b \cdot b = b^2 \longrightarrow & \mathbf{4}
\end{array}$$

Die Quadratwurzel aus 144 wird also wie folgt errechnet:

a) Die Zahl 144 wird mit einem Wurzelzeichen versehen und von rechts nach links in zwei Gruppen eingeteilt.

b) Da wir bei der Wurzel aus 144 zunächst nur die Zehner bestimmen wollen, so kommen wir auf 10, denn $20 \cdot 20$ wäre bereits 400.

c) Die 10 setzen wir als a in das Ergebnis ein und ziehen $a^2 = 100$ von 144 ab.

d) Den Rest 44 teilen wir durch $2a$ ($a = 10$, $2a = 20$), somit erhalten wir die nächste Stelle des Ergebnisses $b = 2$.

e) Nun ziehen wir $2ab = 40$ von 44 ab; es bleibt ein Rest von 4.

f) Von diesem Rest 4 ziehen wir $b^2 = 4$ ab und es bleibt 0 übrig. Die Quadratwurzel aus 144 ist also 12.

Diese Erklärung ist viel umständlicher als die Rechnung selbst, wenn man sich die folgende vereinfachte Methode einprägt:

Vereinfachte Methode:

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{11|28|96} & = 336 \\
3^2 \longrightarrow & \underline{9} & \quad 2 \cdot 3 \\
 & 2\,2'8 & : 6_3 \\
3 \cdot 63 \longrightarrow & \underline{1\,8\,9} & \quad 2 \cdot 33 \\
 & 3\,9\,9'6 & : 66_6 \\
6 \cdot 666 \longrightarrow & \underline{3\,9\,9\,6} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Erläuterung:

Man zieht aus der ersten Gruppe (11) die Wurzel = 3, zieht dann das Quadrat ($3^2 = 9$) ab, holt die nächsten beiden Ziffern herunter, streicht eine Stelle ab und teilt durch das Doppelte von 3 ($3 + 3 = 6$). Das Ergebnis $22 : 6 = 3$ tritt beim Wurzelwert an die zweite Stelle. Außerdem wird $3 \cdot 63$ von 228 abgezogen. Nun holt man die nächsten beiden Ziffern herunter und verfährt genauso. Also wieder eine Stelle abstreichen und durch das Doppelte von 33 teilen usw.

Überschreitet man beim Rechnen das Komma des Radikanden, so muß man auch beim Wurzelwert ein Komma setzen.

fernmeldelehrling.de

z. B.

```
        √1|39'65|20 = 11,81
      1² → 1
           0 3'9 : 2_1
 1 · 21    → 2 1
             1 8 6'5 : 22_8
 8 · 228   → 1 8 2 4
               4 1 2'0 : 236_1
 1 · 2361  → 2 3 6 1
 Rest          1 7 5 9
```

Wurzellösungen, bei denen ein Rest bleibt, besagen, daß die Wurzel nur angenähert bestimmt worden ist; man nennt solche Wurzeln **irrationale** Wurzeln.

Beispiele:

a)

```
        √27|35|29 = 523
     5² → 25
           2 3'5 : 10_2
 2 · 102 → 2 0 4
             3 1 2'9 : 104_3
 3 · 1043 →  3 1 2 9
```

b)

```
        √12|96 = 36
     3² → 9
          3 9'6 : 6_6
 6 · 66 → 3 9 6
```

c)

```
        √95|25|76 = 976
     9² → 81
          14 2'5 : 18_7
 7 · 187 → 13 0 9
            1 1 6 7'6 : 194_6
 6 · 1946 → 1 1 6 7 6
```

d)

```
        √3|06,25 = 17,5
     1² → 1
          20'6 : 2_7
 7 · 27 → 18 9
           1 7 2'5 : 34_5
 5 · 345 → 1 7 2 5
```

e)

```
        √0,42|64|09 = 0,653
          0
          42
     6² → 36
           6 6'4 : 12_5
 5 · 125 → 6 2 5
             3 9 0'9 : 130_3
 3 · 1303 →  3 9 0 9
```

f)

```
        √2 =
        √2,00|00|00|00 = 1,4142....
     1² → 1
          1 0'0 : 2_4
 4 · 24 → 96
           4 0'0 : 28_1
 1 · 281 → 2 8 1
            1 1 9 0'0 : 282_4
 4 · 2824 → 1 1 2 9 6
               6 0 4 0'0 : 2828_2
 2 · 28282 →   5 6 5 6 4
                 3 8 3 6 usw.
```


Übungsaufgaben:

$\sqrt{5329} =$	$\sqrt{12} =$	$\sqrt{2} =$	$\sqrt{4{,}006} =$
$\sqrt{4147{,}36} =$	$\sqrt{3{,}14} =$	$\sqrt{3} =$	$\sqrt{726{,}18} =$
$\sqrt{0{,}426409} =$	$\sqrt{2{,}5} =$	$\sqrt{3{,}5} =$	$\sqrt{6475} =$
$\sqrt{3249} =$	$\sqrt{9801} =$	$\sqrt{1936} =$	$\sqrt{4264} =$
$\sqrt{9980} =$	$\sqrt{193{,}21} =$	$\sqrt{3956{,}41} =$	$\sqrt{0{,}0025} =$

Die vorstehenden Übungsaufgaben sind zu lösen. Falls sie nicht zu einem klaren Ergebnis führen (aufgehen), sind sie auf 4 aufeinanderfolgende Ziffern zu berechnen. Zu jeder Aufgabe ist die Probe zu machen.

Es sollen 180 Steinplatten (je 8 cm × 10 cm) ausgelegt werden. Wie groß ist die quadratische Fläche, die damit bedeckt werden kann?

4.2. Wichtige Regeln

Nachstehend sind die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Wurzeln zusammengefaßt:

4.2.1. Multiplikation von Wurzeln desselben Grades

Gleichnamige Wurzeln (d. h. Wurzeln mit gleichem Exponenten) werden **multipliziert,** indem man unter dem **Wurzelzeichen multipliziert.**

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{9 \cdot 25} \qquad \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{8 \cdot 125}$$

$$3 \cdot 5 = 15 \qquad 2 \cdot 5 = 10$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{cd}$$

4.2.2. Radizierung eines Produktes

Ein **Produkt** wird **radiziert,** indem man die **Faktoren einzeln radiziert** und die so erhaltenen **Wurzeln multipliziert.**

$$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}$$

$$15 = 3 \cdot 5 \qquad 10 = 2 \cdot 5$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt[3]{cd} = \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{d}$$

4.2.3. Division von Wurzeln desselben Grades

Gleichnamige Wurzeln werden **dividiert,** indem man **unter dem Wurzelzeichen dividiert.**

fernmeldelehrling.de

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{256}{16}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

4.2.4. Radizierung von Brüchen

Ein **Bruch** wird **radiziert,** indem man **Zähler** und **Nenner einzeln radiziert** und die so erhaltenen **Wurzeln dividiert.**

$$\sqrt{\frac{256}{16}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{16}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

4.2.5. Radizierung von Potenzen

Wenn **Potenzen radiziert** werden sollen, dann werden die **Exponenten dividiert.**

$$\sqrt[2]{2^4} = 2^{4:2} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[2]{4^2} = 4^{2:2} = 4$$

$$\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2} = a^2$$

$$\sqrt[3]{a^{15}} = a^{15:3} = a^5$$

4.2.6. Potenzieren von Wurzeln

Eine **Wurzel** wird **potenziert,** indem man **nur** den **Radikanden potenziert.**

$$\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\left(\sqrt[2]{b}\right)^3 = \sqrt[2]{b^3}$$

4.2.7. Radizierung von Wurzeln

Eine **Wurzel** wird **radiziert,** indem der Radikand mit dem **Produkt** der **Wurzelexponenten radiziert** wird.

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Umkehrung:

Ist der Wurzelexponent ein Produkt, dann wird **nacheinander** mit den **einzelnen Wurzelexponenten radiziert.**

$$\sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} \qquad \sqrt[m\cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

4.2.8. Erweitern und Kürzen von Wurzeln

Der **Wert** einer Wurzel ändert sich nicht, wenn man den **Exponenten** der **Wurzel** und den des **Radikanden** mit **derselben** Zahl **multipliziert** (Erweiterung der Wurzel) oder durch **dieselbe** Zahl **dividiert** (Kürzung der Wurzel).

a) Erweiterung:

$$\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2\cdot 2]{4^{3\cdot 2}}$$

$$8 = 8$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m\cdot m}}$$

b) Kürzung:

$$\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[\frac{4}{2}]{4^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[2]{4^3}$$

oder $$\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[\frac{4}{4}]{4^{\frac{6}{4}}} = 4^{\frac{6}{4}}$$

Aus dem vorstehenden Beispiel ist zu erkennen, daß **eine Wurzel in eine Potenz umgewandelt** werden kann. **Der Wurzelexponent erscheint dann bei der Potenz im Nenner des Potenzexponenten.**

$$\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}} \qquad \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

fernmeldelehrling.de

Umgekehrt kann jede Potenz mit einem Bruch als Exponenten auch als Wurzel geschrieben werden. **Der Nenner des Potenzexponenten erscheint dann als Wurzelexponent.**

$$a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5} \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

4.3. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 4.

1. Was bedeutet: Eine Wurzel ziehen? 2. Wie heißen die einzelnen Glieder einer Wurzel? 3. Wie werden gleichnamige Wurzeln multipliziert? 4. Wie wird ein Produkt radiziert? 5. Wie werden gleichnamige Wurzeln dividiert? 6. Wie wird ein Bruch radiziert? 7. Wie wird eine Potenz radiziert? 8. Wie wird eine Wurzel radiziert? 9. Wie kann man Wurzeln erweitern beziehungsweise kürzen? 10. In welchen Ausdruck kann man eine Wurzel umwandeln?

5. Die Lehre von den Gleichungen

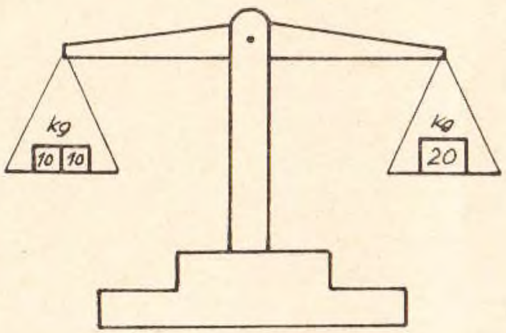
5.1. Allgemeines

Eine Gleichung ist die Verbindung zweier **gleicher** Größen durch das Gleichheitszeichen.

$$10 + 10 = 20$$

Die einfachste Vorstellung von der Gleichung gibt uns eine einfache Waage. Bei einer Waage ist man stets bemüht, sie ins **Gleichgewicht** zu bringen.

Die Waage befindet sich im **Gleichgewicht**, wenn das Gewicht auf der **linken** Seite mit dem Gewicht auf der **rechten** Seite gleich ist.
10 + 10 = 20



(Abb. 24)

Wenn das Gewicht auf der einen Seite der Waage **verändert** wird, so wird das Gleichgewicht **gestört.** Das Gleichgewicht bleibt jedoch **erhalten,** wenn man auf **beiden** Seiten die **gleiche** Veränderung vornimmt.

Beispiel:

Wenn bei der dargestellten Waage auf beiden Seiten 5 kg zugesetzt werden, dann bleibt das **Gleichgewicht** erhalten, weil auf **beiden** Seiten 25 kg vorhanden sind.

Beachten Sie:

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn man auf **beiden** Seiten der Gleichung z. B. wie folgt vorgeht:

	$2 \cdot 10$	$=$	$\mathbf{20}$
1. die **gleiche** Zahl **addiert**	$2 \cdot 10 + \mathbf{5}$	$=$	$20 + \mathbf{5}$
2. die **gleiche** Zahl **subtrahiert**	$2 \cdot 10 - \mathbf{5}$	$=$	$20 - \mathbf{5}$
3. mit der **gleichen** Zahl **multipliziert**	$2 \cdot 10 \cdot \mathbf{5}$	$=$	$20 \cdot \mathbf{5}$
4. durch die **gleiche** Zahl **dividiert**	$2 \cdot 10 : \mathbf{5}$	$=$	$20 : \mathbf{5}$
5. mit der **gleichen** Zahl quadriert	$(2 \cdot 10)^2$	$=$	20^2
6. die **gleiche** Wurzel zieht	$\sqrt{2 \cdot 10}$	$=$	$\sqrt{20}$

Wir erkennen, daß **beide** Seiten der Gleichungen im Ergebnis – trotz der vorgenommenen Änderungen – immer **gleich groß** bleiben. **Wichtig ist,** daß die Gleichungen auf **beiden** Seiten in **gleicher** Weise geändert werden.

In den Gleichungen werden nicht nur **bestimmte** Zahlen ($2 \cdot 10 = 20$), sondern mehr noch die **allgemeinen** Zahlen verwendet.

z. B. $\quad a + b = c + d$

Wenn wir in der vorstehenden Gleichung die Werte für die **linke** und **rechte** Seite der Gleichung kennen und einsetzen, so wird sich herausstellen, daß beide Seiten gleich sind.

z. B. $a = 5; \quad b = 3; \quad c = 2; \quad d = 6$

daraus ergibt sich: $\quad a + b = c + d$

$$\mathbf{5 + 3 = 2 + 6}$$
$$\mathbf{8 = 8}$$

In diesem Beispiel waren alle Werte der Gleichung bekannt oder vorher bestimmt. Uns interessieren aber mehr Gleichungen mit **unbekannten** Werten. Wir sprechen dann **von Gleichungen mit einer oder zwei Unbekannten.** Die Unbekannten werden meistens mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z bezeichnet.

Mit einer Gleichung kann man nur eine Unbekannte (x) finden. Soll man zwei Unbekannte (x und y) finden, so braucht man zwei **verschiedene** Gleichungen. Wir wollen uns aber zunächst mit einfachen Gleichungen mit **einer Unbekannten** befassen.

$$12 = 3x$$

fernmeldelehrling.de

Man trachtet danach, die Unbekannte x allein auf die **linke** Seite zu bekommen. Man kann auch die rechte Seite nehmen, aber es hat sich eingebürgert, die linke zu nehmen, weil wir ja von links nach rechts schreiben; so erhalten wir auf die Frage $x = ?$ die Antwort rechts daneben.

Es ist besonders für den Anfänger ratsam, nur Schritt für Schritt den Wert von x zu ermitteln, die Unbekannte x wird also nur allmählich **allein** auf die linke Seite zu stehen kommen. Sobald das erreicht ist, ist die Gleichung gelöst.

Betrachten wir das Beispiel $12 = 3x$, so vertauschen wir zunächst die beiden Seiten der Gleichung und erhalten $3x = 12$. Wir sehen, daß x noch den Faktor 3 hat; um nun x allein zu bekommen, müssen wir diesen Faktor beseitigen.

In einem anderen Beispiel $3x + 5 = 17$ müssen wir außerdem noch die Größe 5 auf die rechte Seite bringen. Noch andere Veränderungen der Gleichung können nötig sein, aber in jedem Falle geht die Veränderung einer Gleichung auf die Hauptregel zurück:

Eine Gleichung bleibt gleich, wenn man sie auf jeder Seite in gleicher Weise verändert.

Läßt man also **links** eine Größe weg, so muß die gleiche Größe auch **rechts** weggenommen werden. Fügt man links etwas hinzu, so muß das gleiche rechts hinzugefügt werden. Multipliziere ich links, so muß ich rechts ebenfalls multiplizieren, ebenso dividieren, potenzieren und radizieren.

An den folgenden Beispielen wollen wir das Vorstehende erproben:

$$x + 9 = 11$$

Die Unbekannte x soll **allein** stehen; ich muß also $+ 9$ entfernen. Um die 9 wegzuschaffen, **subtrahiere** ich sie, so daß die linke Seite nun heißt

$$x + 9 - 9 = \dots$$

Wir haben aber gehört, daß man die rechte Seite in gleicher Weise verändern muß. Die Gleichung heißt also:

$$x + 9 - \mathbf{9} = 11 - \mathbf{9}$$

Die Größen $+ 9$ und $- \mathbf{9}$ heben sich auf der linken Seite auf, es bleibt also

$$x = 11 - 9$$
$$x = 2$$

Wir können den Rechenvorgang auch im Kopfe ausführen; d.h. wir **denken** uns links $+ 9$ weg, rechts aber schreiben wir $- 9$ hinzu. Es sieht dann so aus, als sei die 9 von **links** nach **rechts** gekommen, jedoch mit **umgekehrtem** Vorzeichen. Diese Überlegung führt schließlich zu der Regel:

> **Eine Größe mit + kommt auf die andere Seite der Gleichung mit − ; ebenso kommt natürlich eine Größe mit − auf die andere Seite mit +.**

z. B.
$$5x - 7 = 18$$
$$5x = 18 + 7$$
$$5x = 25$$

Die Unbekannte „x“ steht aber noch nicht alleine auf der linken Seite. Deshalb müssen jetzt **beide** Seiten durch die **gleiche** Zahl 5 geteilt werden, dann erhalten wir:

$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$$
$$x = 5$$

Wichtig ist, daß bei allen Aufgaben die **Gleichheitszeichen** immer **genau untereinander** geschrieben werden.

Wenn die Unbekannte x in einem **Bruch** enthalten ist, dann beseitigen wir den Bruch, indem wir **beide** Seiten mit der **gleichen** Zahl multiplizieren.

z. B. $\frac{x}{4} = 3$

In diesem Beispiel multiplizieren wir beide Seiten mit $\cdot\ 4$:

$$\frac{x}{4} \cdot \mathbf{4} = 3 \cdot \mathbf{4}$$
$$x = 12$$

Beim Multiplizieren und Dividieren können wir uns folgendes vorstellen: Steht **links** ein Faktor bei der Unbekannten, so dividieren wir die rechte Seite durch ihn.

z. B. $5x = 25$

$$x = \frac{25}{5}$$

Steht **links** ein Divisor bei der Unbekannten, so **multiplizieren** wir die rechte Seite mit ihm.

z. B. $\frac{x}{4} = 3$

$$x = 3 \cdot 4$$

Aus der Multiplikation (·) wird auf der anderen Seite eine Division (:) und umgekehrt.

Beim Potenzieren und Radizieren können wir wie folgt vorgehen:

Haben wir bei der **Unbekannten** eine **Potenz** (x^2), so schaffen wir sie weg, indem wir auf **beiden** Seiten die **Wurzel** ziehen:

z. B.
$$x^2 = 36$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$$
$$x = \sqrt{36}$$
$$x = 6$$

fernmeldelehrling.de

Aus der Potenz wird eine Wurzel auf der anderen Seite

Haben wir bei der Unbekannten eine **Wurzel** ($\sqrt{x}$), so potenzieren wir beide Seiten.

$$\sqrt{x} = 7$$
$$(\sqrt{x})^2 = 7^2$$
$$x = 7^2$$
$$x = 49$$

Aus der Wurzel wird eine Potenz auf der anderen Seite

Aus dem Bisherigen erkennen wir, daß **beide** Seiten der Gleichung in **gleicher Weise** verändert werden, wenn auf der anderen Seite die **entgegengesetzte Operation** durchgeführt wird.

Merke:

aus	$+$	**wird**	$-$	**auf der anderen Seite**
aus	$-$	**wird**	$+$	**auf der anderen Seite**
aus	$\cdot$	**wird**	$:$	**auf der anderen Seite**
aus	$:$	**wird**	$\cdot$	**auf der anderen Seite**
aus	$\sqrt{}$	**wird**	^{2}	**auf der anderen Seite**
aus	^{2}	**wird**	$\sqrt{}$	**auf der anderen Seite**

Gleichungen bleiben auch erhalten, wenn man **beide** Seiten der Gleichung **umkehrt**,

z. B. $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

Umkehrung: $\frac{x}{1} = \frac{2}{1}$

$$x = 2$$

Die Richtigkeit dieser Rechnung ist wie folgt zu beweisen:

Um den Bruch $\frac{1}{x}$ zu beseitigen, multipliziere ich **beide** Seiten mit x, also

$$\frac{1}{x}\, x = \frac{1}{2}\, x$$
$$1 = \frac{1}{2}\, x$$

Um jetzt den Bruch $\frac{1}{2}$ zu beseitigen, multipliziere ich **beide** Seiten mit **2**, also

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x$$
$$2 = x$$
$$\text{oder } x = 2$$

Damit ist die Richtigkeit der Rechnung bei der Umkehrung von Gleichungen bewiesen, weil x in beiden Fällen 2 ergibt.

Nach dieser kurzen Einleitung noch einen kleinen Überblick: Es gibt Gleichungen **ersten** Grades, **zweiten** Grades, **dritten** Grades usw. Bei den Gleichungen ersten Grades kommen nur Größen vor, die in der **ersten** Potenz stehen (x, y, a, b stehen in der ersten Potenz); diese Gleichungen sind für uns die weitaus wichtigsten. Bei den Gleichungen **zweiten** Grades kommen die Unbekannten in der **zweiten** Potenz, also im Quadrat vor (x^2, y^2, a^2 usw.). Bei den Gleichungen dritten Grades kommen die Unbekannten in der **dritten** Potenz, also im Kubus vor (x^3, y^3, a^3 usw.). Die Gleichungen zweiten Grades kommen für uns weniger, die dritten Grades überhaupt nicht in Betracht. Wir wollen uns deshalb auf die Gleichungen ersten Grades mit **einer** und mit **zwei** Unbekannten beschränken.

5.2. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

Die **Unbekannte** wird in der Regel kurz mit dem kleinen lateinischen Buchstaben x bezeichnet. Die zur Lösung bekannten Größen können entweder bestimmte Zahlen oder Buchstaben (allgemeine Zahlen) sein. Als Buchstaben nimmt man die des kleinen lateinischen Alphabets, und zwar beginnt man mit a, b, c usw.

	Bestimmte Zahlen:	Allgemeine Zahlen:
1.	$x + 9 = 11$ $x = 11 - 9$ $x = 2$	$x + a = b$ $x = b - a$
2.	$x - 9 = 11$ $x = 11 + 9$ $x = 20$	$x - a = b$ $x = b + a$
3.	$x \cdot 9 = 11$ $x = \frac{11}{9}$ $x = 1\frac{2}{9}$	$x \cdot a = b$ $x = \frac{b}{a}$

4. $\frac{x}{9} = 11$ $\qquad\qquad$ $\frac{x}{a} = b$

$x = 11 \cdot 9$ $\qquad\qquad$ $x = b \cdot a$

$x = 99$ $\qquad\qquad$ $x = a\,b$

5. $x^2 = 11$ $\qquad\qquad$ $x^2 = b$

$x = \sqrt{11}$ $\qquad\qquad$ $x = \sqrt{b}$

$x = 3,\ldots$

6. $\sqrt{x} = 11$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{x} = b$

$x = 11^2$ $\qquad\qquad$ $x = b^2$

$x = 121$

7. $5x + 11x = 48$ $\qquad\qquad$ $ax + bx = c$

$16x = 48$ $\qquad\qquad$ $x\,(a + b) = c$

$x = \frac{48}{16}$ $\qquad\qquad$ $x = \frac{c}{a + b}$

$x = 3$

8. $12y - 7y = 95$ $\qquad\qquad$ $ay - by = c$

$5y = 95$ $\qquad\qquad$ $y\,(a - b) = c$

$y = 19$ $\qquad\qquad$ $y = \frac{c}{a - b}$

9.
$$\begin{aligned} 5{,}75x - 124 + 2x &= 5{,}125x - 61 \\ 5{,}75x - 5{,}125x + 2x &= -61 + 124 \\ 2{,}625x &= 63 \\ x &= \frac{63}{2{,}625} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Wir sehen an dem vorstehenden Beispiel, daß man alle Unbekannten auf die linke Seite zieht. Bei Seitenwechsel **Vorzeichen** umkehren!

10. $$8x + 4 + 3x - 2 = 8x + 8$$

Stehen auf **beiden** Seiten der Gleichung die **gleichen** Größen mit den gleichen Vorzeichen, so können sie weggelassen werden.

Man stelle sich vor: Auf einer Waage stehen beiderseits gleichviel Gewichte; die Waage ist im Gleichgewicht. Man kann nun von jeder Waagschale ein gleich großes Gewicht wegnehmen, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird.

So eine Waage ist auch in der vorstehenden Gleichung (Aufgabe Nr. 10) enthalten. Lassen wir $8x$ auf **beiden** Seiten weg, so heißt die Gleichung:

$$\begin{aligned} 4 + 3x - 2 &= 8 \\ 3x &= 8 - 4 + 2 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Jetzt folgen Aufgaben mit Klammern

11.
$$\begin{aligned} 4x - (5 - 2x) &= 5x - 3 \\ 4x - 5 + 2x &= 5x - 3 \\ 4x + 2x - 5x &= 5 - 3 \\ 6x - 5x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Als Anfänger sollte man immer Schritt für Schritt vorgehen. Wichtig ist, daß die Gleichheitszeichen **untereinander** stehen.

12.
$$\begin{aligned} 8x - [5 - 4x + (8 - 2x) + 11 - x] &= 10x + 26 \\ 8x - [5 - 4x + 8 - 2x + 11 - x] &= 10x + 26 \\ 8x - 5 + 4x - 8 + 2x - 11 + x &= 10x + 26 \\ 8x + 4x + 2x + x - 10x &= 26 + 5 + 8 + 11 \\ 15x - 10x &= 26 + 24 \\ 5x &= 50 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 20 - (x - 2) &= (2x + 1) \cdot 2 \\ 20 - x + 2 &= 4x + 2 \\ -x - 4x &= 2 - 20 - 2 \\ -5x &= -20 \\ -x &= -4 \end{aligned}$$

Beachten Sie:

Im Ergebnis der vorstehenden Gleichung stören die negativen Werte.

Wenn **beide** Seiten der Gleichung mit -1 multipliziert werden, dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot -x &= -4 \cdot (-1) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} (11 - 3x)^2 + (15 - 4x)^2 &= (20 - 5x)^2 - 12 \\ (11 - 3x)(11 - 3x) + (15 - 4x)(15 - 4x) &= (20 - 5x)(20 - 5x) - 12 \\ 121 - 33x - 33x + 9x^2 + 225 - 60x - 60x + 16x^2 &= 400 - 200x + 25x^2 - 12 \end{aligned}$$

Alle Unbekannten nach links! Die Bekannten nach rechts! Vorzeichen umkehren!

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16x^2 - 25x^2 - 66x - 120x + 200x &= 400 - 12 - 121 - 225 \\ 14x &= 42 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Da sich hier die Größen x^2 **gegenseitig** aufheben, ist dies nur scheinbar eine quadratische Gleichung.

15.
$$\begin{aligned} \frac{x}{9} &= 7 \\ x &= 7 \cdot 9 \\ x &= 63 \end{aligned}$$

Aus der Division auf der linken Seite $\left(\frac{x}{9}\right)$ wird eine Multiplikation auf der rechten Seite ($\cdot$ 9).

16.
$$\begin{aligned} \frac{18}{x} &= 3 \\ 18 &= 3x \\ 3x &= 18 \\ x &= \frac{18}{3} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} \frac{72}{x} + 18 &= 48 \\ \frac{72}{x} &= 48 - 18 \\ 72 &= 30 \cdot x \\ 30x &= 72 \\ x &= \frac{72}{30} \\ x &= 2{,}4 \end{aligned}$$

fernmeldelehrling.de

fernmeldelehrling.de

18. $$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 95$$
$$\frac{10x + 5x + 4x}{20} = 95$$
$$\frac{19x}{20} = 95$$
$$19x = 95 \cdot 20$$
$$x = \frac{95 \cdot 20}{19}$$
$$x = 100$$

19. $$\frac{4}{x} + 2 - \frac{6}{x} = \frac{2}{x}$$
$$\frac{4}{x} - \frac{6}{x} - \frac{2}{x} = -2$$
$$-\frac{4}{x} = -2$$
$-4 = -2 \cdot x$ (beide Seiten mit -1 multiplizieren)
$$4 = 2x$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

20. $$\frac{x-5}{2x-9} = \frac{x-4}{2x-6}$$

Um den Nenner $2x - 9$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit $2x - 9$ multipliziert:
$$\frac{(2x-9)\ (x-5)}{2x-9} = \frac{(x-4)\ (2x-9)}{2x-6}$$
$$x - 5 = \frac{(x-4)\ (2x-9)}{2x-6}$$

Um nun auch den Nenner $2x - 6$ zu beseitigen, werden beide Seiten mit $2x - 6$ multipliziert:
$$(x-5)\ (2x-6) = \frac{(x-4)\ (2x-9)\ (2x-6)}{2x-6}$$
$$(x-5)\ (2x-6) = (x-4)\ (2x-9)$$
$$2x^2 - 10x - 6x + 30 = 2x^2 - 8x - 9x + 36$$
$$2x^2 - 2x^2 - 10x - 6x + 8x + 9x = 36 - 30$$
$$-16x + 17x = 6$$
$$x = 6$$

Wir wollen in dieser Aufgabe zur Probe den Wert $x = 6$ einsetzen. Also:
$$\frac{x-5}{2x-9} = \frac{x-4}{2x-6}$$
$$\frac{6-5}{2 \cdot 6 - 9} = \frac{6-4}{2 \cdot 6 - 6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Bevor wir zu den reinen **Buchstabengleichungen** übergehen, wollen wir uns noch die Frage vorlegen: Zu welchem Zweck **verändern** wir die Gleichungen? Warum setzt man nicht gleich die Zahlen ein?

Antwort:

Es gibt Formeln, wo eine **andere** Größe ausgerechnet werden muß, als diejenige, für die eine Formel gerade aufgestellt ist.

Beispiel:

$U = d \cdot \pi$
(Umfang ist Durchmesser mal 3,14)

Angenommen, der Umfang sei bekannt, wir wollen aber den Durchmesser wissen. Es muß deshalb die Unbekannte „d" auf die linke Seite gebracht werden.
$$d \cdot \pi = U$$
$$d = \frac{U}{\pi}$$

Wenn wir jetzt die Zahlen für U und π (3,14) einsetzen, dann können wir den Durchmesser des Kreises ausrechnen.

Nun eine Reihe von Beispielen mit Buchstaben:

1. $x + a = b$
$x = b - a$

2. $a + x - b = c$
$x = c - a + b$

3. $a - x = b$
$-x = b - a$
$x = a - b$

4. $a - x - b = c$
$-x = c - a + b$
$x = a - b - c$

In den vorstehenden Beispielen sind **beide** Seiten mit $-$ **1** multipliziert worden, dadurch wird die Unbekannte x positiv.

5. $ax = b$
$$x = \frac{b}{a}$$

6. $ax - b = c$
$ax = c + b$
$$x = \frac{b + c}{a}$$

7. $a - bx = c$
$-bx = c - a$
(beide Seiten $\cdot -1$)
$bx = a - c$
$$x = \frac{a - c}{b}$$

8. $ax + b = c$
$ax = c - b$
$$x = \frac{c - b}{a}$$

fernmeldelehrling.de

9. $$x = \frac{c - b}{a}$$

Wir können auch einmal wieder eine Probe machen, indem wir annehmen $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$

$$x = \frac{7 - 6}{5}$$
$$x = \frac{1}{5}$$

Stellen wir nun obige Gleichung nach a, b und c um, so müssen sich die gleichen Werte wieder einstellen.

$$a = \frac{c - b}{x} \qquad ax = c - b \qquad ax = c - b$$
$$a = \frac{7 - 6}{\frac{1}{5}} \qquad b = c - ax \qquad c = ax + b$$
$$a = \frac{1}{\frac{1}{5}} \qquad b = 7 - 5 \cdot \frac{1}{5} \qquad c = 5\frac{1}{5} + 6$$
$$a = \frac{1 \cdot 5}{1} \qquad b = 7 - 1 \qquad c = 1 + 6$$
$$a = 5 \qquad b = 6 \qquad c = 7$$

Weitere Beispiele:

10.
$$ax + b = x + d$$
$$ax - x = d - b$$
$$x\,(a - 1) = d - b$$
$$x = \frac{d - b}{a - 1}$$

11.
$$ax - b = a - bx$$
$$ax + bx = a + b$$
$$x\,(a + b) = a + b$$
$$x = \frac{a + b}{a + b}$$
$$x = 1$$

Der Wert x kann in den vorstehenden Beispielen ausgeklammert werden. Würde man x wieder in die Klammer hineinmultiplizieren, so wäre der alte Zustand wiederhergestellt.

12.
$$3x - 7a + 8b = 5a - x$$
$$3x + x = 5a + 7a - 8b$$
$$4x = 12a - 8b$$
$$x = \frac{12a - 8b}{4}$$
$$x = \frac{4\,(3a - 2b)}{4}$$
$$x = 3a - 2b$$

13.
$$5ab - 3ax + c = -4ax + 8ab - 2c$$
$$-3ax + 4ax = 8ab - 5ab - 2c - c$$
$$ax = 3ab - 3c$$
$$x = \frac{3ab - 3c}{a}$$
$$x = \frac{3\,(ab - c)}{a}$$

14.
$$-a + bx - (x - c)\,b = c\,(b - x)$$
$$bx - a - bx + bc = bc - cx$$
$$-a = -cx$$
$$cx = a$$
$$x = \frac{a}{c}$$

Probe: Für x setzen wir $\frac{a}{c}$ ein:

$$-a + \frac{b \cdot a}{c} - \left(\frac{a}{c} - c\right) b = c\,\left(b - \frac{a}{c}\right)$$
$$\frac{ab}{c} - a - \frac{ab}{c} + bc = bc - \frac{ac}{c}$$
$$-a = -a$$
$$0 = 0$$

Auf der linken Seite der Gleichung heben sich $\frac{ab}{c}$ gegen $-\frac{ab}{c}$ auf. Außerdem heben sich auf beiden Seiten der Gleichung **gleiche** Größen mit **gleichen** Vorzeichen (bc) auf; ebenso $-a$ gegen $-a$; es bleibt $0 = 0$.

Weitere Beispiele:

15.
$$\frac{x}{a} = b$$
$$x = ab$$

16.
$$\frac{ax}{b} = c$$
$$ax = bc$$
$$x = \frac{bc}{a}$$

17.
$$\frac{ax}{b} + c = d$$
$$\frac{ax}{b} = d - c$$
$$ax = (d - c)\,b$$
$$x = \frac{(d - c)\,b}{a}$$

$$\frac{a}{x} - b = \frac{c}{x} + d$$
$$\frac{a}{x} - \frac{c}{x} = b + d$$
$$\frac{a - c}{x} = b + d$$
$$a - c = (b + d)\,x$$
$$x = \frac{a - c}{b + d}$$

18.
$$a - \frac{bc}{x} = d$$
$$-\frac{bc}{x} = d - a$$

(beide Seiten · — 1)

$$\frac{bc}{x} = a - d$$
$$bc = (a - d)\,x$$
$$\frac{bc}{a - d} = x$$
$$x = \frac{bc}{a - d}$$

fernmeldelehrling.de

19.
$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Wir müssen in dem vorstehenden Beispiel zunächst die beiden Brüche auf einen **gemeinsamen** Bruchstrich bringen. Der Hauptnenner heißt dann $a\,b\,c$.

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{vergleichsweise } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{bc + ac + ab}{abc} \quad \text{vergleichsweise } x = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$x = \frac{12 + 8 + 6}{24}$$

An dem nebenstehenden Zahlenbeispiel können wir die Rechenoperation besser erkennen. Für die Brüche wird aus dem Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, der Hauptnenner ermittelt. Wir erkennen, daß im Zähler die einzelnen Faktoren des gemeinsamen Nenners mit einer Ausnahme erscheinen (z. B. $3 \cdot 4$). Die Ausnahme ist der Nenner des einzelnen Bruches (z. B. 2).

In dem vorstehenden Beispiel ist:

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ oder } \frac{1}{a} = \frac{b\,c}{a\,b\,c}$$

Ebenso ist $\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ oder $\frac{1}{b} = \frac{a\,c}{a\,b\,c}$

Weitere Beispiele:

20.
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) x = 1$$
$$\left(\frac{bc + ac + ab}{abc}\right) x = 1$$
$$(bc + ac + ab)\, x = a\,b\,c$$
$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

21.
$$\frac{x}{a + x} = \frac{b}{c}$$
$$x\,c = b\,(a + x)$$
$$x\,c = ba + bx$$
$$xc - bx = ab$$
$$x\,(c - b) = ab$$
$$x = \frac{a\,b}{c - b}$$

$a + x$ rückt von links unten auf die rechte Seite nach oben in den Zähler. Aus der Division wird auf der anderen Seite eine Multiplikation. Es wird sozusagen kreuzweise ($\times$) multipliziert.

Wichtig ist hierbei, daß $a + x$ als ein **gemeinsamer** Ausdruck behandelt wird. $a + x$ muß als Klammerausdruck von unten links nach oben rechts mit b multipliziert werden. Wir dürfen niemals einen Ausdruck unter einem Bruchstrich auftrennen und a oder x einzeln multiplizieren.

Weitere Beispiele:

22.
$$\frac{x}{a - x} = \frac{b}{c}$$
$$xc = b\,(a - x)$$
$$xc = ab - bx$$
$$bx + xc = ab$$
$$x\,(b + c) = ab$$
$$x = \frac{a\,b}{b + c}$$

23.
$$\frac{b}{c} = \frac{a + x}{b + x}$$
$$(b + x)\,b = (a + x)\,c$$
$$b^2 + bx = ac + cx$$
$$bx - cx = ac - b^2$$
$$x\,(b - c) = ac - b^2$$
$$x = \frac{ac - b^2}{b - c}$$

24.
$$\frac{5\,ax}{a - b} - 3a = 10x$$

Bei der vorstehenden Aufgabe können wir **nicht** kreuzweise multiplizieren; das geht **nur** bei zwei Brüchen.

Wir multiplizieren **beide** Seiten der Gleichungen mit $a - b$, damit der Ausdruck im Nenner **verschwindet**.

$$\frac{5\,ax\,(a - b)}{a - b} - 3a\,(a - b) = 10x\,(a - b)$$
$$5ax - 3a^2 + 3ab = 10ax - 10bx$$
$$5ax - 10ax + 10bx = 3a^2 - 3ab$$
$$x\,(5a - 10a + 10b) = 3a\,(a - b)$$
$$x = \frac{3a\,(a - b)}{5\,(2b - a)}$$

25.
$$\frac{4x}{2a + 3b} - 5 = \frac{7b}{5a}$$

Wenn wir bei der vorstehenden Aufgabe die linke Seite **gleichnamig** machen, dann haben wir wieder auf beiden Seiten einen Bruch, der kreuzweise multipliziert werden kann.

$$\frac{4x}{2a + 3b} - \frac{5\,(2a + 3b)}{2a + 3b} = \frac{7b}{5a}$$
$$\frac{4x - 5\,(2a + 3b)}{2a + 3b} = \frac{7b}{5a}$$
$$5a\,[4x - 5\,(2a + 3b)] = 7b\,(2a + 3b)$$
$$5a\,[4x - 10a - 15b] = 14ab + 21b^2$$
$$20ax - 50a^2 - 75ab = 14ab + 21b^2$$
$$20ax = 14ab + 75ab + 21b^2 + 50a^2$$
$$x = \frac{89ab + 21b^2 + 50a^2}{20a}$$

Wir wollen nun dazu übergehen, uns die Gleichungen selbst aufzustellen. In der Praxis sind häufig bestimmte Verhältnisse gegeben, und wir müssen dann den Wert einer fehlenden Größe suchen.

fernmeldelehrling.de

Angewandte oder eingekleidete Aufgaben:

1. Einem Wasserbehälter kann durch 3 Röhren Wasser zugeführt werden. Die eine Röhre füllt ihn in 5, die andere in 6 und die dritte Röhre **allein** in $7\frac{1}{2}$ Stunden. In welcher Zeit ist der Behälter voll, wenn alle drei Röhren zugleich geöffnet werden?

   Lösung:

   Man überlegt sich, wonach gefragt ist. Hier ist nach der **Zeit** gefragt, wie viele **Stunden** dauert es usw. Wir nehmen daher an, es dauert x **Stunden**, bis der Behälter voll ist. Wenn in x Stunden der Behälter voll ist, dann ist in **einer** Stunde **nur** $\frac{1}{x}$ des Behälters voll.

   Wir wissen also jetzt, daß **alle 3** Röhren zusammen in einer Stunde $\frac{1}{x}$ des Behälters füllen.

   Da die **erste** Röhre 5 Stunden braucht, füllt sie in einer Stunde $\frac{1}{5}$ die **zweite** $\frac{1}{6}$, die dritte $\frac{1}{7{,}5}\left(\frac{2}{15}\right)$

   Alle drei Röhren liefern also in einer Stunde

   $$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$$

   Wir haben vorher festgestellt, in einer Stunde ist $\frac{1}{x}$ voll. Beide Werte müssen daher gleich groß sein.

   Das ist die Gleichung!

   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$$
   $$\frac{1}{x} = \frac{6+5+4}{30}$$
   $$\frac{1}{x} = \frac{15}{30}$$
   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$
   $$x = 2$$

   Alle drei Röhren brauchen also 2 Stunden, bis der Behälter voll ist.

2. Die Abgangsorte zweier einander **entgegenfahrender** Lokomotiven sind 22,5 km entfernt.

   Die **erste** Lokomotive legt 308 m in der Minute zurück. Die **zweite** legt 288 m in der Minute zurück. Wenn nun die erste Lokomotive 15 Minuten **vor** der zweiten abgefahren ist, wieviel Zeit **nach** Abfahrt der zweiten fahren sie einander vorbei?

   Lösung:

   Die **erste** Lokomotive fährt 15 Minuten **früher** ab, hat also bis zur Abfahrt der zweiten Lokomotive $15 \cdot 308\,\text{m} = 4620\,\text{m}$ zurückgelegt.

Die ganze Strecke ist 22,500 km, davon ist die erste Lokomotive bereits 4,620 km gefahren. Also sind beide Lokomotiven **bei Abfahrt** der zweiten nur noch 22,5 — 4,62 = 17,88 km auseinander.

Sie kreuzen sich aber **nicht** in der Mitte; aber die Zeit, die beide bis dahin fahren, ist **gleich** groß.

Diese unbekannte Größe nehmen wir als x an.

Die erste Lokomotive wird dann in x Minuten $x \cdot 308\,\text{m}$ zurücklegen. Die zweite wird in x Minuten $x \cdot 288\,\text{m}$ zurücklegen. Die in dieser Zeit von beiden Lokomotiven zurückgelegten Wege ergeben zusammen die obengenannte Strecke von 17,88 km oder 17 880 m.

Also haben wir die Gleichung gefunden:

$$x \cdot 308 + x \cdot 288 = 17\,880$$
$$596x = 17\,880$$
$$x = \frac{17\,880}{596}$$
$$x = 30$$

Also 30 Minuten nach Abfahrt der zweiten Lokomotive fahren sie aneinander vorbei.

5.3. Kurze Zusammenfassung der wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Gleichungen

a) Beachten Sie, daß jede Rechenoperation mit **beiden gesamten Seiten** der Gleichung durchzuführen ist!

b) Prüfen Sie, ob die Gleichung durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors vereinfacht werden kann. Ist die Unbekannte z. B. in mehreren Gliedern enthalten, wird die Gleichung durch Ausklammern der Unbekannten leicht zu lösen sein.

c) Kommt die Unbekannte in Klammern vor, so sind die Klammern aufzulösen.

d) Steht die Unbekannte im Zähler oder Nenner eines Bruches, so empfiehlt es sich, die Brüche zu beseitigen.

e) Vorsicht beim Rechnen mit gemischten Zahlen!
   Gemischte Zahlen möglichst in unechte Brüche umwandeln.

f) Von der Summe oder Differenz von Brüchen kann man erst den Kehrwert bilden, nachdem man die Brüche gleichnamig gemacht und zu **einem** Bruch zusammengefaßt hat.

Beispiel:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{b+a}{ab}$$
$$x = \frac{ab}{b+a}$$

fernmeldelehrling.de

g) Niemals aus einer Summe oder Differenz kürzen!
Hier darf nur gekürzt werden, wenn ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden kann.

Beispiel:

$$x = \frac{2a + 6b - 4c}{2}$$

$$x = \frac{\cancel{2}\,(a + 3b - 2c)}{\cancel{2}}$$ (jetzt darf gekürzt werden, da „2" im Zähler als **Faktor** steht)

$$x = a - 3b - 2c$$

h) Steht die Unbekannte im Nenner eines Doppelbruchs, so sind die Regeln für das Bruchrechnen zu beachten:

Beispiel 1:

$$2 = \frac{4}{\frac{1}{x}}$$ (Zahl durch Bruch)

$$2 = 4 \cdot \frac{x}{1}$$ (= mit dem Kehrwert malnehmen)

$$2 = 4x$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2:

$$6 = \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x}}$$ (Zahl durch Summe oder Differenz von Brüchen)

$$6 = \frac{2}{\frac{x}{2x} - \frac{2}{2x}} = \frac{2}{\frac{x-2}{2x}}$$ (Brüche gleichnamig machen und zusammenfassen)

$$6 = 2 \cdot \frac{2x}{x - 2}$$ (mit dem Kehrwert malnehmen)

$$6\,(x - 2) = 2 \cdot 2x$$ (Bruch beseitigen)

$$6x - 12 = 4x$$ (Klammer auflösen)

$$6x - 4x = 12$$ (Unbekannte freistellen)

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

i) Nach Auflösung der Klammern und Beseitigung der Brüche:
beide Seiten der Gleichung ordnen,
auf beiden Seiten Gleiches zusammenfassen,
Gleichung so umstellen, daß alle Glieder mit der Unbekannten auf der linken Seite, alle anderen Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehen,
Unbekannte freistellen,
falls vor der Unbekannten ein Minuszeichen steht, die gesamte Gleichung mit (-1) malnehmen.

k) Die Probe ist grundsätzlich mit der **Ausgangsgleichung** durchzuführen, da schon in der ersten Umformung der Gleichung Fehler enthalten sein könnten.

Übungsaufgaben:

$x + 7 = 15$	$x + 16 = 30$	$1 + x = 6$
$64 + x = 100$	$x - 18 = 12$	$x - 72 = 28$
$36 - x = 12$	$17 - x = 10$	$100 - x = 96$
$x + n = n$	$b + x = a$	$x - a = b$
$x - 10 = 0$	$a - x = 0$	$x - a = 0$
$3x = 15$	$1{,}7x = 3{,}4$	$ax = b$
$55 = -11x$	$28 = 7x$	$91 = x \cdot 13$
$\frac{x}{21} = 18$	$\frac{x}{m} = n$	$(-x) = (-6)$
$42 + x = 50$	$b = x - d$	$mnx = ma$
$x - 1 = 9$	$x + m = 0$	$\frac{a}{x} = (-b)$
$27 = x + 5$	$9x = (-27)$	
$3x + 7 = 22$	$7x - 3 = 18$	$5x - 30 = 0$
$4x - 17 = 31$	$80 - 13x = 28$	$100 - 13x = 9$
$ax + 3m = 10m$	$ax - 3b = 5b$	$7x + 5 = 3x + 17$
$5x - 17 = 11 - 2x$	$21x = 55 + 10x$	$19 - 12x = 71 - 25x$
$\frac{x}{6} + 7 = 10$	$27 - \frac{27}{x} = 19$	$\frac{x}{n} - 4a = 6a$
$8a - \frac{n}{x} = 7a$	$\frac{ax}{b} = m$	$\frac{5ax}{7b} = 8b$
$\frac{12a}{x} = 3b$	$\frac{24}{5x} = 8ab$	$\frac{3x}{8} = 9$
$\frac{15x}{19} = 15$	$\frac{ax}{b} = m$	$\frac{24}{x} = 8$
$\frac{65}{x} = 13$	$(-7) = \frac{84}{x}$	$\frac{5}{3x} = 2$
$\frac{b}{ax} = m$	$cx + 3n = 12n$	$-7k + \frac{25}{x} = 18k$
$4x - 7x - 3 = 8x + 6$	$\frac{x}{9} + 6 = 10$	

Übungsgleichungen mit Klammerausdrücken (Klammern mit Summen und Differenzen):

Beispiel:

$$24x - (14 + 15x) + (28 - 6x) = 20$$

1. Schritt: **Klammer auflösen** $24x - 14 - 15x + 28 - 6x = 20$

2. Schritt: **Ordnen** $24x - 15x - 6x = 20 + 14 - 28$

3. Schritt: **Zusammenfassen** $3x = 6$

4. Schritt: **Unbekannte freistellen** $x = \frac{6}{3}$

5. Schritt: **Ausrechnen** $\underline{\underline{x = 2}}$

fernmeldelehrling.de

Probe: $24 \cdot 2 - (14 + 15 \cdot 2) + (28 - 6 \cdot 2) = 20$

$$48 - 14 - 30 + 28 - 12 = 20$$

$$\underline{\underline{20 = 20}}$$

Übungsaufgaben:

$35 - (2x - 5) = 18 - (3x - 11)$

$100 - (78 - 3x) = 10x - (14 + 8x)$

$28 - [13x - (8 - 5x)] = 31 - [7x - (49 - 10x)]$

$a - [2b - (3a + 2x)] = 4b - [15a + (8b - 3x)]$

$x - (m - n) = (m + n) - 2x;$ $\quad a - (x - 2b) = 3a + 2b$

$a - (6b - x) = b - (2x - a + 5b)$

$17m + [3n - (p - 7x)] = 15p - [(4m - 11n) - 8x]$

$7\,(7x - 6) + 13\,(3x - 5) = 4\,(7x - 8)$

$4\,(4 - 9x) - 17\,(3 - 4x) = 11\,(4 - 11x) - 7\,(2 - 7x)$

$7\,[x - 11\,(x - 2)] - (x + 12) = 0$

$25 - 3\,[x - 5 \cdot (2x - 3)] = 23x$

Übungsgleichungen mit Brüchen und Klammerausdrücken:

a) mit gleichnamigen Brüchen

Merke:

In einer Gleichung mit gleichnamigen Brüchen kann der Nenner einfach fortgelassen werden, wenn der Nenner auf beiden Seiten der Gleichung derselbe ist.

Beispiel:

$$\frac{6\,(x + 2)}{5} = \frac{3\,(2x + 4)}{5}$$

$$6\,(x + 2) = 3\,(2x + 4)$$

b) mit ungleichnamigen Brüchen

Merke:

In einer Gleichung mit ungleichnamigen Brüchen auf den beiden Seiten der Gleichung ist die Lösung folgendermaßen durchzuführen:

Beispiel:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{x - 3}{2}$$

1. Schritt: **Beide Brüche gleichnamig machen (Hauptnenner 6)** $\qquad \frac{2\,(x - 2)}{6} = \frac{3\,(x - 3)}{6}$

2. Schritt: **Nenner wegbringen** $\qquad \frac{6\,[2\,(x - 2)]}{6} = \frac{6\,[3\,(x - 3)]}{6}$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner. Der Nenner wird damit zu 1 und kann nunmehr, wie unter a) gesagt, fortgelassen werden.

3. Schritt: **Klammern ausmultiplizieren** $\qquad 2x - 4 = 3x - 9$

4. Schritt: **Ordnen** $\qquad 9 - 4 = 3x - 2x$

5. Schritt: **Zusammenfassen** $\qquad 5 = 1x$

6. Schritt: **Unbekannte freistellen** $\qquad \frac{5}{1} = x$

7. Schritt: **Ausrechnen** $\qquad 5 = x$

8. Schritt: **Unbekannte auf die linke Seite schreiben** $\qquad \underline{\underline{x = 5}}$

Übungsaufgaben:

$\frac{6}{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{x} = 22$ $\qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{x} = m$ $\qquad \frac{5}{x} - \frac{2}{3} = \frac{8}{x} - \frac{7}{6}$

$\frac{x}{n} - 4a = 6a$ $\qquad a - \frac{b}{x} = c$ $\qquad \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$

$\frac{y}{8} + \frac{y}{5} = 26$ $\qquad \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} = 10$ $\qquad \frac{3x}{4} - \frac{5x}{8} = 4$

$\frac{4x}{5} - 22 = \frac{x}{4}$ $\qquad \frac{x}{6} + \frac{x}{8} = 7$

$\frac{x}{5} - \frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 2$ $\qquad x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32}$

$\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$ $\qquad \frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$ $\qquad \frac{3x}{8} - 2 = 32 - \frac{7x}{4}$

$\frac{x - 2}{2} = \frac{x + 17}{5}$ $\qquad 5x + 1 = \frac{2x - 0{,}25}{2}$

$\frac{3x - 2}{4} - \frac{6x - 5}{8} = \frac{5}{16}$

$1 - \frac{4}{x - 3} = 0{,}6$ $\qquad \frac{x - 2}{3} = \frac{x - 3}{2}$

$\frac{x - 1}{4} = \frac{x + 2}{2}$ $\qquad \frac{x + 5}{3} = \frac{x + 1}{2}$ $\qquad \frac{2x + 4}{6} = \frac{3x + 2}{8}$

$\frac{x + 4}{14} + \frac{x - 4}{6} = 2$ $\qquad \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{7} = x - 2$

$\frac{3x}{4} + \frac{100 - 5x}{6} = 29$ $\qquad \frac{x + 20}{9} + \frac{3x}{7} = 6$

$\frac{x - 8}{7} + \frac{x - 3}{3} + \frac{5}{21} = 0$ $\qquad \frac{x + 1}{3} - \frac{3x - 1}{5} = x - 2$

fernmeldelehrling.de

$$\frac{5\,(x + 5)}{8} - \frac{2\,(x - 3)}{7} = 5\frac{19}{28} \qquad 2x - \frac{19 - 2x}{9} = \frac{11x - 19}{4}$$

$$\frac{10x + 3}{3} - \frac{6x - 7}{2} = 10x - 10 \qquad \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x - 1}$$

$$\frac{1}{x + 2} = \frac{4}{x^2 - 4} \qquad \frac{4}{2x - 1} = \frac{8}{7x + 1} \qquad \frac{16}{3x - 4} = \frac{5}{2x - 5}$$

$$\frac{2}{x + a} = \frac{1}{x - 2b} \qquad \frac{2x - 3}{5} : \frac{12 + x}{9} = \frac{9}{16} \qquad \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x}} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$5x + \frac{5x + 3}{7} = 34 - \frac{10 - 2x}{3} - x \qquad (12 - x) : \frac{x}{6} = \frac{36}{3}$$

5.4. Das Umstellen von Formeln

Das in der Schulmathematik bisher Gelernte wollen wir nunmehr beim Umstellen von Formeln anwenden.

Wenn unsere Unbekannte bisher mit x bezeichnet wurde, ist künftig immer **das** Formelzeichen als Unbekannte zu betrachten, dessen Zahlenwert in einer Aufgabe unbekannt ist und gesucht wird.

Es gibt also bei einer Aufgabe immer bekannte Größen und unbekannte Größen. Die bekannten Größen sind in der Aufgabe „gegeben". Die unbekannten Größen werden „gesucht".

z. B. Formel: $v = \frac{s}{t}$

Gegeben: v und t

Gesucht: s

Unsere Unbekannte, die bisher mit x bezeichnet wurde, heißt hier s. Die Formel ist also so umzustellen, daß s auf der linken Seite der Gleichung allein steht.

Lösung:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t \cdot v = s$$

oder $s = v \cdot t$

Eine andere bekannte Formel lautet:

$$\frac{d^2 \cdot \pi}{4} = A$$

$$\frac{A \cdot 4}{\pi} = d^2$$

Gegeben: A, π, 4

Gesucht: d

Wir suchen aber nicht d^2, sondern den Durchmesser d. Ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel, so sieht unsere Gleichung so aus:

$$\sqrt{\frac{A \cdot 4}{\pi}} = \sqrt{d^2} \qquad d = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\pi}} \quad \text{oder} \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$$

Eine Formel aus der E-Technik lautet:

$$R = \frac{l \cdot \varrho}{A}$$

Gegeben: R, l und ϱ

Gesucht: A

$$A \cdot R = l \cdot \varrho$$

$$A = \frac{l \cdot \varrho}{R}$$

Übungsaufgaben:

1. Formel: $I = \frac{U}{R}$

a) Gegeben: I und U
Gesucht: $R = ?$

b) Gegeben: I und R
Gesucht: $U = ?$

In den folgenden Aufgaben wird nur nach der Unbekannten gefragt. Es ist zu unterstellen, daß die übrigen Größen gegeben sind.

2. Formel: $\frac{U}{I} = \frac{l \cdot \varrho}{A}$ — $U = ?$, $I = ?$, $A = ?$, $l = ?$

3. Formel: $R = R_1 + R_2 + R_3$ — $R_1 = ?$, $R_3 = ?$

4. Formel: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ — $R_1 = ?$

5. Formel: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ — $R = ?$

6. Formel: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ — $R_2 = ?$

7. Formel: $I = \frac{E}{R_i + R_a}$ — $E = ?$, $R_a = ?$

8. Formel: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$ — $I_1 = ?$

9. Formel: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$ — $R_3 = ?$

10. Formel: $P = U \cdot I$ — $I = ?$

11. Formel: $P = I^2 \cdot R$ — $I = ?$

12. Formel: $K = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ — $m_2 = ?$, $r = ?$

fernmeldelehrling.de

13. Formel: $B = 1{,}256 \cdot H$ — $H = ?$

14. Formel: $R = R_{20}\,(1 + \alpha \cdot \Delta t)$ — $R_{20} = ?$; $\alpha = ?$; $\Delta t = ?$

15. Formel: $H = \frac{I \cdot N}{l}$ — $l = ?$

16. Formel: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_1}{R_2}$ — $R_2 = ?$

17. Formel: $U_K = E - I \cdot R_i$ — $R_i = ?$; $E = ?$; $I = ?$

18. Formel: $I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$ — $R_2 = ?$

19. Formel: $f_R = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}}$ — $L = ?$

20. Formel: $Z = \frac{R \cdot X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ — $R = ?$

21. Formel: $\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ — $C = ?$

22. Formel: $R_i = \frac{n}{p} \cdot R_i$ — $n = ?$; $p = ?$

23. Formel: $P = \frac{U^2}{R}$ — $U = ?$

24. Formel: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ — $\omega = ?$

25. Formel: $I = \frac{n \cdot E}{\frac{n}{p} \cdot R_i + R_a}$ — $n = ?$; $p = ?$; $R_i = ?$; $R_a = ?$

26. Formel: $R = \frac{E_1 - E_2}{I_1 - I_2}$ — $E_2 = ?$; $I_1 = ?$

27. Formel: $E - I \cdot R_1 = I \cdot R_2 + I \cdot R_3$ — $I = ?$; $R_1 = ?$

28. Formel: $\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = I_1 + I_2$ — $R_1 = ?$; $U_2 = ?$

29. Formel: $R_i = \frac{E - I \cdot R_a}{I}$ — $I = ?$; $R_a = ?$

30. Formel: $C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f^2 L}$ — $f = ?$

31. Formel: $E = \frac{I\,(n \cdot R_i + R_a)}{n}$ — $n = ?$; $R_a = ?$; $R_i = ?$

32. Formel: $A = \frac{(D^2 - d^2) \cdot \pi}{4}$ — $D = ?$; $d = ?$

33. Formel: $U = \frac{\varrho \cdot l \cdot I}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$ — $d = ?$

34. Formel: $U - I \cdot R_1 = I \cdot R_2$ — $R_1 = ?$; $I = ?$

35. Formel: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ — $R_2 = ?$

36. Formel: $\frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ — $C_3 = ?$

37. Formel: $R_2 = R_1 \cdot [1 + \alpha\,(t_2 - t_1)]$ — $t_2 = ?$; $t_1 = ?$

38. Formel: $U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 + U_v \cdot I_v$ — $U_v = ?$; $I_2 = ?$

39. Formel: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ — $R = ?$

40. Formel: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ — $R = ?$; $X_L = ?$; $X_C = ?$

41. Formel: $X_B = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — $\omega L = ?$; $L = ?$; $C = ?$

42. Formel: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — $R = ?$; $L\omega = ?$; $C\omega = ?$; $L = ?$; $C = ?$

43. Formel: $U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$ — $U_R = ?$; $U_L = ?$; $U_C = ?$

44. Formel: $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}$ — $Z = ?$; $R = ?$; $X = ?$

45. Formel: $\frac{1}{Z} = \frac{X_C - X_L}{X_C \cdot X_L}$ — $Z = ?$; $X_C = ?$; $X_L = ?$

46. Formel: $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ — $R = ?$; $L = ?$; $C = ?$

(Textgleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten)

a) Welche Zahl muß man von 847 subtrahieren, um 748 zu erhalten?

b) Welche Zahl gibt $\frac{2}{3}$, wenn sie mit $\frac{4}{9}$ multipliziert wird?

fernmeldelehrling.de

c) Wie groß ist der Bestand der Kasse, wenn nach Auszahlung des dritten und siebenten Teils des vorhandenen Geldes noch 40 DM mehr als die Hälfte übrigbleibt?

d) Eine Leiter hat 30 Sprossen. Hätte man den Abstand der einzelnen Sprossen 6 cm größer gemacht, so wäre man mit 5 Sprossen weniger ausgekommen. Wie weit sind die Sprossen voneinander entfernt?

e) Es sollen 1000 DM unter 3 Personen A, B und C so verteilt werden, daß A 50 DM mehr als B und C 40 DM weniger als B erhält.

f) Durch Preisrückgang einer Ware um 50 DM für 100 kg verliert ein Geschäftsmann beim Verkauf 200 DM. Um wieviel kg Ware handelt es sich demnach?

g) Ein Arbeiter erhielt 100 DM Wochenlohn. Nachdem er 10 DM seines Barbestandes ausgegeben hatte, besaß er noch um $\frac{1}{10}$ mehr als vor der Lohnzahlung. Wie hoch war sein anfänglicher Barbestand?

h) Zwei Unternehmer haben für 7560 DM eine Wegstrecke auszubessern; sie beginnen gleichzeitig und zwar an den entgegengesetzten Enden. Weil sie 22 m von der Mitte zusammentreffen, erhält der eine 560 DM mehr als der andere. Wie lang ist die Strecke?

i) Zerlegen Sie die Zahl 88 so in zwei Teile, daß der Unterschied ihrer Quadrate 880 ergibt.

5.5. Gleichungen mit 2 Unbekannten

5.5.1. Allgemeines

Sind in einer Gleichung **2 Unbekannte** vorhanden, so lassen sich diese nicht eindeutig bestimmen.

In der Gleichung $x + y = 100$

sind x und y die Unbekannten. Da beide zusammen die Summe 100 ergeben sollen, lassen sich **zahllose** Wertepaare finden, z. B. $x = 50$ und $y = 50$ oder $x = 95$ und $y = 5$ usw. Hat man jedoch noch eine **zweite** Gleichung mit den Unbekannten x und y zur Verfügung, dann gibt es nur **einen bestimmten** Wert für x und y, der in beiden Gleichungen richtig ist.

Gl. I: $3x + 2y = 42$

Gl. II: $2x + 3y = 33$

Folgende Bedingungen sind immer zu beachten:

Es müssen so viele Gleichungen gegeben sein wie Unbekannte gegeben sind.

Die Unbekannten müssen natürlich in allen Gleichungen den gleichen Wert haben.

In dem vorstehenden Beispiel haben wir **zwei** Unbekannte (x, y) und somit auch **zwei** Gleichungen, die wir mit den Ziffern I und II bezeichnen.

Es gibt eine Anzahl von Lösungen. Wir wollen nur die wichtigsten davon durcharbeiten. Alle Lösungsarten haben einen Hauptgedanken gemeinsam: Man sucht nach und nach **eine** Unbekannte, um die **andere** wegzuschaffen; das wird so lange fortgesetzt, bis nur noch **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten übrigbleibt.

5.5.2. Substitutions- oder Einsetzungsmethode

Das Wort kommt von Substitut = Stellvertreter. In unserer Verwendung bedeutet es soviel wie vertreten, ersetzen oder **einsetzen.**

Der Arbeitsvorgang ist folgender:

Man vereinfacht eine Gleichung so lange, bis man **eine** Unbekannte ganz allein auf der **linken** Seite hat. Dann setzt man den für diese Unbekannte erhaltenen Wert in die **andere** Gleichung ein. Aus **zwei** Gleichungen wird somit **eine** Gleichung.

Ausführung:

Gl. I:
$$3x + 2y = 42$$
$$3x = 42 - 2y$$
$$x = \frac{42 - 2y}{3}$$

Den erhaltenen Wert für x setzen wir nun in die andere Gleichung ein.

Gl. II:
$$2x + 3y = 33$$
$$2\,\frac{42 - 2y}{3} + 3y = 33$$
$$\frac{84 - 4y}{3} + 3y = 33$$
$$\frac{84 - 4y + 9y}{3} = 33$$
$$84 - 4y + 9y = 33 \cdot 3$$
$$5y = 99 - 84$$
$$y = 3$$

Hat man nun eine Unbekannte (y) in ihrem Wert bestimmt, so ist es leicht, auch die andere Unbekannte (x) zu finden. Man setzt einfach den gefundenen Wert in eine der Gleichungen ein:

Gl. I:
$$3x + 2y = 42$$
$$3x + 2 \cdot 3 = 42$$
$$3x = 42 - 6$$
$$x = \frac{36}{3}$$
$$x = 12$$

oder Gl. II:
$$2x + 3y = 33$$
$$2x + 3 \cdot 3 = 33$$
$$2x = 33 - 9$$
$$x = \frac{24}{2}$$
$$x = 12$$

Damit haben wir auch schon eine Probe gemacht. Beide Gleichungen würden nicht dasselbe Resultat ergeben, wenn wir irgendwo einen Fehler gemacht hätten.

fernmeldelehrling.de

5.5.3. Gleichsetzungsmethode

Man löst beide Gleichungen nach **einer** Unbekannten (x oder y) auf. Da der Wert in **beiden** Gleichungen **gleich** sein muß, so können wir sie durch ein **Gleichheitszeichen** verbinden.

Ausführung:

Gl. I: $x + y = 100$
Gl. II: $2x - y = 20$

Wir müssen jetzt **beide** Gleichungen nach y auflösen.

Gl. Ia: $y = 100 - x$
Gl. IIa: $y = 2x - 20$

Beide Werte für y nach Gleichung Ia und IIa können durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden.

$$\text{(Gl. Ia)} \quad 100 - x = 2x - 20 \quad \text{(Gl. IIa)}$$
$$100 + 20 = 3x$$
$$x = 40$$

Aus der Gleichung Ia ergibt sich:

$$y = 100 - x$$
$$y = 100 - 40$$
$$y = 60$$

5.5.4. Additions- und Subtraktionsmethode

Durch Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen muß **eine** Unbekannte (x oder y) zum Verschwinden gebracht werden.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Gl. I:} & x + y = 100 \\ \text{Gl. II:} & 2x - y = 20 \end{array}\right\} \text{Addition}$$
$$3x = 120 \quad \text{Summe}$$
$$x = 40$$

Die Unbekannte y kann man jetzt aus der Gleichung I ermitteln.

$$x + y = 100$$
$$y = 100 - x$$
$$y = 100 - 40$$
$$y = 60$$

Sind aber in den beiden Gleichungen **unterschiedliche** Beizahlen von einer Unbekannten vorhanden, so muß man durch Multiplikation erreichen, daß sie **gleich** werden, damit bei der Addition oder Subtraktion die Unbekannte herausfällt.

Beispiel:

Gl. I: $5x + 3y = 21$
Gl. II: $7x - 2y = 17$

Multipliziert man die Gleichung I mit „2" und Gleichung II mit „3", so erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Gl. Ia:} & 10x + 6y = 42 \\ \text{Gl. IIa:} & 21x - 6y = 51 \end{array}\right\} \text{Addition}$$
$$31x = 93 \quad \text{Summe}$$
$$x = 3$$

Durch Einsetzen von x in Gleichung I oder II folgt:

Gl. I:
$$5x + 3y = 21$$
$$15 + 3y = 21$$
$$3y = 21 - 15$$
$$y = \frac{6}{3}$$
$$y = 2$$

Gl. II:
$$7x - 2y = 17$$
$$21 - 2y = 17$$
$$-2y = 17 - 21$$
$$-2y = -4$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

Übungsaufgaben:

$$10x - 2y = 80$$
$$3x + y = 26$$

$$6x + 2y = -10$$
$$-x - 2y = -5$$

$$30x - 28y = 100$$
$$5x - 2y = 30$$

$$x = 3y - 2$$
$$x = 5y - 12$$

6. Die graphische Darstellung von Funktionen

Wir haben im Kapitel 2. gesehen, daß die Veränderung einer Zahl bildlich an der Zahlengeraden gezeigt werden kann. Wenn aber **zwei** voneinander abhängige Größen vorhanden sind, dann kann das nicht mehr an einer Zahlengeraden dargestellt werden.

Eine Größe, die in ihrem Wert von einer anderen abhängt, heißt eine Funktion der anderen Größe.

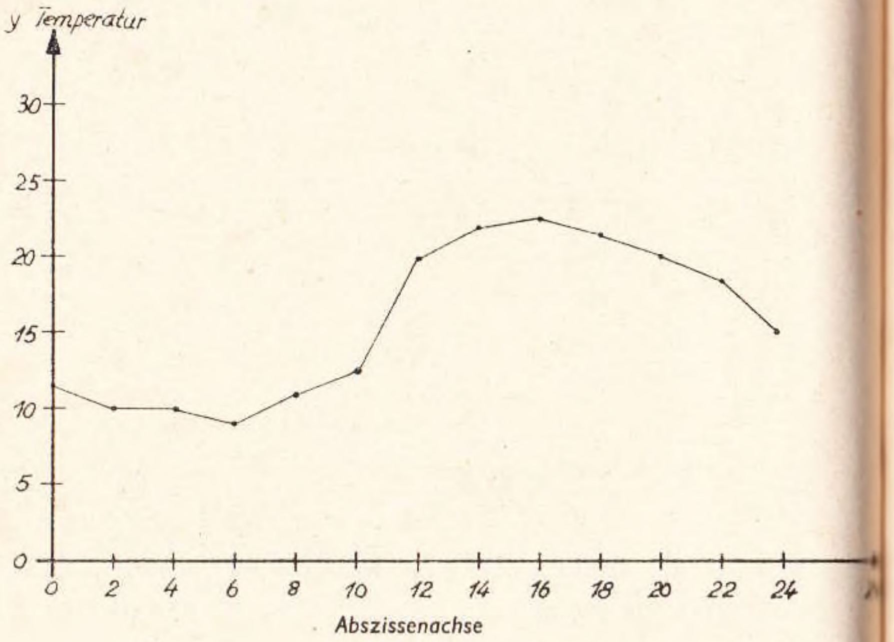
Hierfür dienen zur besseren Übersicht die **graphischen Darstellungen.**

Wollen wir z. B. einen Überblick über den Verlauf der Temperatur eines bestimmten Zeitabschnittes (z. B. eines Tages) bekommen, so lesen wir von 0 bis 24 Uhr alle 2 Stunden (e. F. auch stündlich) am Thermometer die Temperatur ab und tragen sie in eine Tabelle ein.

fernmeldelehrling.de

Uhr	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Cels.	12°	10°	10°	9°	11°	13°	20°	22°	22,5°	21°	20°	18°	15°

Nach der vorstehenden Tabelle kann man sich nur mühsam einen Überblick über die Temperaturverhältnisse während eines Zeitabschnitts verschaffen. Dagegen ist die folgende graphische Darstellung von weit größerer Anschaulichkeit.



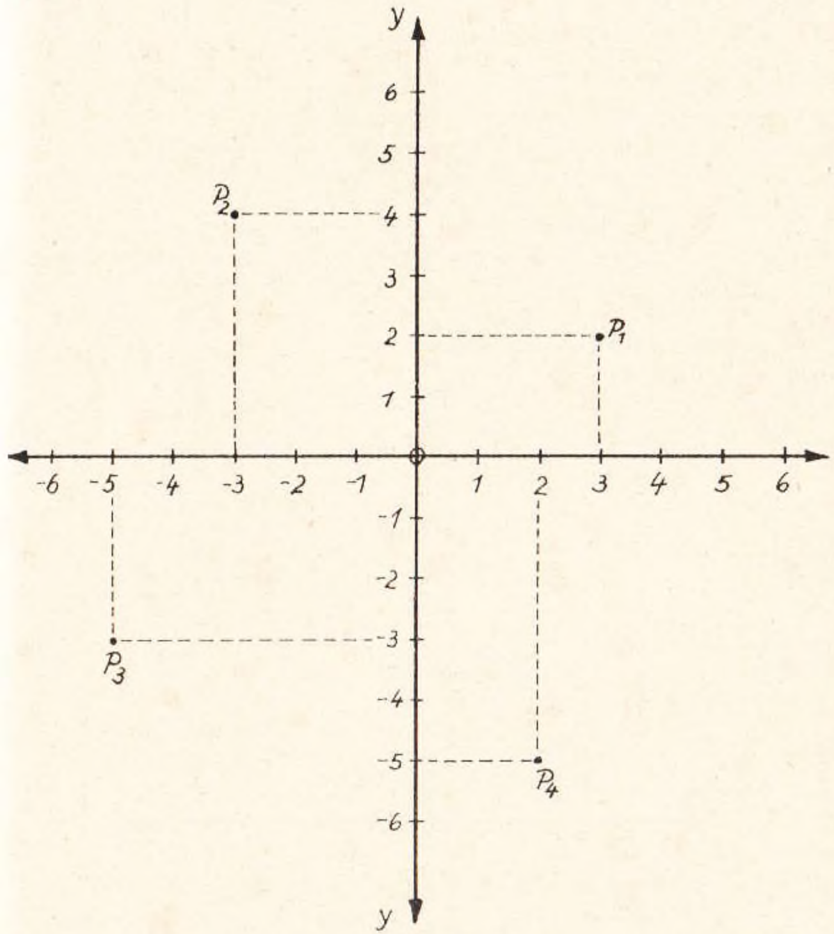
(Abb. 25)

Auf Millimeterpapier oder anderem Papier tragen wir auf einem waagerechten Strahl, der Abszissenachse, gleiche Teilstrecken ab, die dem aufeinanderfolgenden Zeitraum von 2 Stunden entsprechen. Beim Nullpunkt errichten wir die Senkrechte (Ordinate), die für die Temperatur gleichmäßig unterteilt ist. Die gemessenen Temperaturwerte werden als Punkte bei der dazugehörigen Uhrzeit eingetragen. Verbinden wir jetzt die einzelnen Meßpunkte durch gerade Verbindungsstrecken, so erhalten wir den Temperaturverlauf **graphisch** dargestellt. Man spricht von der **Temperaturkurve.**

Das Bild zeigt deutlich die Vorteile der graphischen Darstellung. Man erkennt sofort, wann die höchste und tiefste Temperatur herrschte, in welchem Zeitraum die Temperatur am stärksten stieg, in welchem Zeitraum sie gleichblieb usw. Auch ist es möglich, Zwischenwerte abzulesen (zu interpolieren). Welche Temperatur herrschte um 11.00 Uhr oder um 19.30 Uhr? Doch ist hierbei Vorsicht geboten. Wollen wir die Änderung

der Temperatur genauer wissen, so müssen mehr Temperaturmessungen durchgeführt werden (etwa alle 30 Minuten).

In der Mathematik und in der Technik handelt es sich weniger um derartige Beobachtungen, sondern um Gleichungen, die man auch **Funktionsgleichungen** nennt. Zu diesem Zweck zeichnet man ein **Koordinatenkreuz.**



(Abb. 26)

Die waagerechte Achse heißt **Abszissen- oder x-Achse,** die senkrechte Achse heißt **Ordinaten- oder y-Achse.** Vom Schnittpunkt der Koordinatenachsen trägt man auf beiden Achsen (x und y) nach beiden Richtungen Maßeinheiten ab. Die Richtung der **Abszissenachse** nach rechts

fernmeldelehrling.de

ist **positiv**, nach links **negativ**. Die Richtung der **Ordinatenachse** nach oben ist **positiv**, nach unten **negativ**. Dementsprechend haben Abszissen und Ordinaten positive und negative Werte.

Jeder Punkt (P_1 usw.) im Kreuz hat immer zwei Werte, einen x- und einen y-Wert.

Beispiel:

Folgende Funktion ist graphisch darzustellen:

$$y = 2x$$

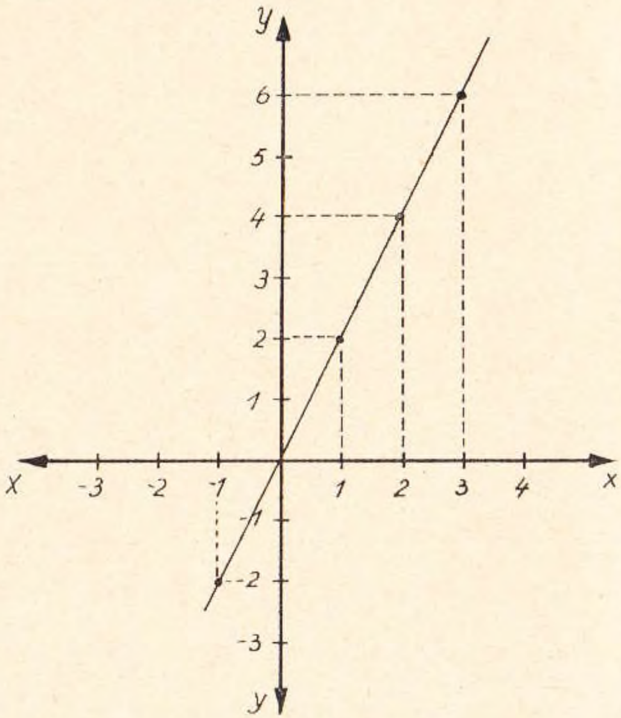
Wir stellen zunächst wieder eine Tabelle auf

x	1	2	3	—1	—2
y	2	4	6	—2	—4

Der Wert y kann für die eingetragenen x-Werte aus der obenstehenden Gleichung ermittelt werden.

Für $x = 1$ ist $y = 2$ usw.

Jetzt zeichnen wir das Koordinatenkreuz.



(Abb. 27)

In dieses Achsenkreuz werden die einzelnen Werte aus der Tabelle als Punkte eingetragen. So wird z. B. für $x = 1$ und $y = 2$ der Schnittpunkt ermittelt usw. Wenn man die einzelnen Punkte miteinander verbindet, so erhält man die **Kurve** der Funktion. In diesem Beispiel ist es eine gerade Linie, die durch den Nullpunkt geht.

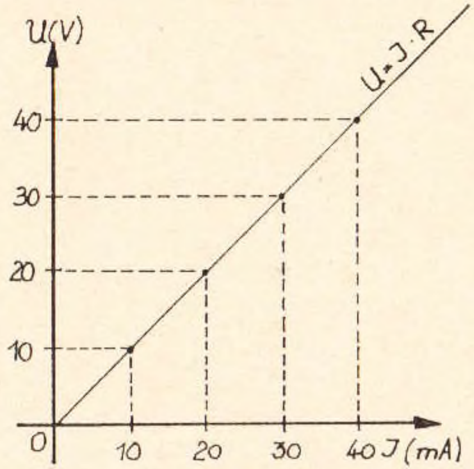
Ebenso kann man Funktionsgleichungen aus der Elektrotechnik graphisch darstellen.

Beispiel:

Der Spannungsabfall an einem Widerstand ist graphisch darzustellen:
$U = I \cdot R$

Da der Widerstand R im Stromkreis mit 1 kΩ konstant bleibt, ist der Spannungsabfall U eine Funktion von der Stromstärke I.

I in mA	10	20	30	40
U = I · R (V)	10	20	30	40



(Abb. 28)

In das Achsenkreuz werden die einzelnen Werte wieder eingetragen. Die Verbindung der eingezeichneten Punkte ergibt die Strom-Spannungskurve bei gleichbleibendem Widerstand. Es handelt sich auch hier wieder um eine Gerade.

Graphische Darstellung von Gleichungen mit 2 Unbekannten

Im Kapitel 5.5.3. haben wir bei der folgenden Aufgabe die zwei Unbekannten x und y rechnerisch ermittelt.

fernmeldelehrling.de

$$\text{Gl. I:}\quad x + y = 100$$
$$\text{Gl. II:}\quad 2x - y = 20$$

Die rechnerische Ermittlung ergab:

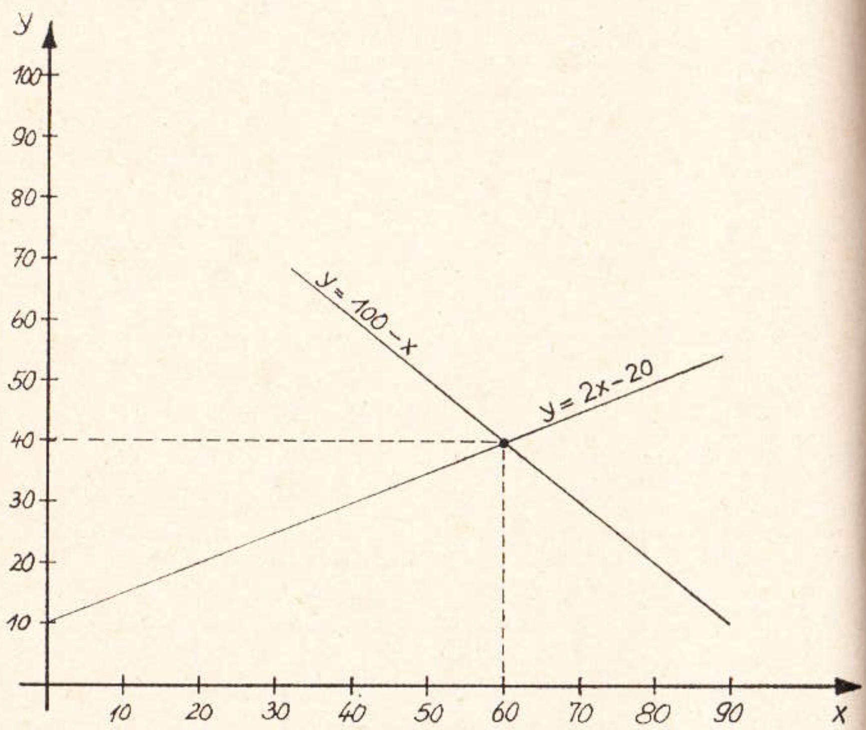
$$x = 60 \text{ und } y = 40$$

Für die graphische Darstellung lösen wir beide Gleichungen nach y auf:

Gl. I: $y = 100 - x$ | Gl. II: $y = 2x - 20$

y	10	20	30	40	50
x	90	80	70	60	50

y	10	20	30	40	50
x	0	20	40	60	80



(Abb. 29)

Diese Funktionen stellen zwei gerade Linien dar, die sich in einem Punkt schneiden. Als Schnittpunkt finden wir $x = 60$ und $y = 40$. Diese Werte stimmen also mit den errechneten überein.

Die **graphische** Lösung von zwei linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten besteht darin, den **Schnittpunkt** beider Geraden zu finden.

7. Die Proportion

Haben 2 Verhältnisse denselben Wert (z. B. $18 : 12 = \frac{3}{2}$ und $9 : 6 = \frac{3}{2}$), so sind sie gleich. Werden sie durch das Gleichheitszeichen zu einer Gleichung verbunden, so erhält man eine **Proportion**.

$18 : 12 = 9 : 6$

$a : \underbrace{b = c}_{\text{innere}} : d$ — äußere Glieder

Gelesen: a verhält sich zu b wie c zu d.

Man nennt die 4 Glieder der Reihe nach das 1., 2., 3. und 4. Glied der Proportion. a und c heißen die **vorderen**, b und d die **hinteren** Glieder, ferner a und d die **äußeren**, b und c die **inneren Glieder** der **Proportion**.

Die Proportion kann auch als Bruchgleichung geschrieben werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Beispiel:

Bei der Karte 1 : 100 000 verhält sich:

$$\frac{\text{Kartenstrecke}}{\text{wirkliche Strecke}} = \frac{1}{100\,000}$$

Hat man eine Proportion, so ergibt sich durch das **kreuzweise** Multiplizieren die Produktengleichung:

$$a : b = c : d$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Produktengleichung: $ad = bc$

In einer Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren Glieder.

Im praktischen Rechnen hat die Proportion eine große Bedeutung. Ist in einer Proportion ein Glied unbekannt, so kann man dieses aus den drei anderen berechnen.

Beispiel:

$$5 : x = 10 : 3$$
$$\frac{5}{x} = \frac{10}{3}$$
$$x = \frac{5 \cdot 3}{10}$$

fernmeldelehrling.de

Praktische Anwendung findet die Proportion beim Lösen von Dreisatzaufgaben:

1. Ein Schlossermeister zahlt für 4 Gesellen 96 DM Tagelohn, wieviel hat er täglich zu zahlen, wenn er noch 2 Gesellen dazunimmt?

   Die Aufgabe enthält 2 Verhältnisse: Ein Verhältnis zwischen der **Zahl der Gesellen** und ein Verhältnis zwischen den **Tagelöhnen.**

$$\frac{4 \text{ Gesellen}}{4 + 2 \text{ Gesellen}} = \frac{96 \text{ DM}}{x \text{ DM}}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{96}{x}$$

$$x = \frac{96 \cdot 6}{4}$$

$$x = 144 \text{ DM}$$

2. Drei Arbeiter graben einen Garten in 8 Tagen um. Wie lange brauchen 4 Arbeiter zu der Arbeit?

   Auch diese Aufgabe enthält 2 Verhältnisse: Ein Verhältnis zwischen der **Zahl** der **Arbeiter** und ein Verhältnis zwischen der **Zahl** der **Arbeitstage.**

   Die Vermehrung der Arbeiter hat jedoch keine Vermehrung, sondern eine Verminderung der Arbeitstage zur Folge, also ist das **umgekehrte** Verhältnis der Arbeitstage dem der Arbeiter gleichzusetzen:

$$\left.\frac{3 \text{ Arbeiter}}{4 \text{ Arbeiter}} = \frac{x \text{ Tage}}{8 \text{ Tage}}\right\} \text{ umgekehrtes Verhältnis}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$$

$$x = \frac{3 \cdot 8}{4}$$

$$x = 6 \text{ Tage}$$

Wenn beide Größen in demselben Verhältnis wachsen oder abnehmen, dann stehen sie in einem geraden Verhältnis zueinander, sie sind direkt proportional.

Stehen dagegen die Größen im umgekehrten Verhältnis zueinander, d. h. wird die eine größer, dann wird die andere kleiner, so sind sie umgekehrt proportional.

3. Der Sockel eines Gebrauchsgegenstandes vom Ausmaß 5 : 8 soll auf eine im genau gleichen Verhältnis stehende Unterlage gesetzt werden, die nur eine Breite von 11,2 mm haben kann. Wie groß ist die Länge?

$$\frac{5}{8} = \frac{11{,}2}{x}$$

$$x = \frac{11{,}2 \cdot 8}{5}$$

$$x = 17{,}92 \text{ mm}$$

Übungsaufgaben:

$3 : 4 = 9 : x$

$42 : 15 = 28 : x$

$52 : x = 68 : 51$

$14 : 5 = 28 : x$

$48 : 75 = x : 50$

$5{,}25 : x = 9{,}8 : 0{,}28$

$96 : 4x = 72 : 21$

$0{,}4x : 0{,}35 = 7{,}2 : 0{,}021$

$1\frac{3}{7} : x = 8 : 1\frac{3}{4}$

$(27 + x) : x = 8 : 5$

$38 : x = 16 : (44 + x)$

$7x : (51 - 2x) = 49 : 37$

$\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{d} : x$

$\frac{a}{b} : \frac{5c}{2d} = \frac{4a}{15c} : x$

$x : \frac{2}{3}ac = 7\frac{1}{2}ab : 3\frac{1}{8}b^2c$

$14 : x = 91 : 65$

$6 : 4 = x : 4$

$x : 76 = 45 : 57$

$0{,}28 : x = 9{,}8 : 10{,}5$

$x : 0{,}84 = 3{,}5 : 1{,}2$

$x : 0{,}248 = 25 : 1{,}55$

$135 : 72 = 5x : 64$

$3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = \frac{8}{9} : x$

$4\frac{3}{8} : x = 6\frac{3}{4} : 14\frac{2}{5}$

$x : (63 - x) = 3 : 4$

$(56 - 3x) : x = 25 : 15$

$4x : 29 = (157 - 5x) : 9$

$\frac{2a}{3b} : \frac{3a}{4c} = \frac{8c}{45b} : x$

$\frac{3}{4}a^2b : \frac{1}{2}ac = 1\frac{1}{2}b^2 : x$

Suchen Sie die vierte Proportionale zu

$6;\ 8;\ 9;\ ?$ $\quad 1{,}4;\ 0{,}18;\ 21;\ ?$ $\quad 2\frac{1}{2};\ 3\frac{3}{4};\ 2\frac{2}{3};\ ?$ $\quad 8;\ 3\frac{1}{5};\ 7\frac{1}{2};\ ?$

a) Teilen Sie die Zahl 200 in drei Teile x, y, z, so daß $x : y = 2 : 3$, $y : z = 12 : 5$ ist.

b) Von drei Zahlen verhält sich die erste zur zweiten wie 2 zu 3, die zweite zur dritten wie 5 zu 8; ihre Summe beträgt 98. Wie heißen die Zahlen?

c) Eine 2cm lange Linie stellt in einer Zeichnung eine 28m lange Strecke dar. Welche Strecke wird entsprechend durch eine 3,5cm lange Linie dargestellt?

d) Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 78cm; Schenkel und Grundlinie verhalten sich wie 5 : 3. Wie lang sind die Seiten?

e) In einem Stromkreis mit $R_1 = 10\,\Omega$ Widerstand fließt ein Strom $J_1 = 5\,A$. Wie groß ist der Strom J_2 bei einem Widerstand von $R_2 = 2\,\Omega$?

f) Ein Nickelindraht von $A_1 = 3{,}14\,\text{mm}^2$ Querschnitt hat einen Widerstand $R_1 = 0{,}1\,\Omega$. Wie groß ist der Widerstand R_2 bei einem Querschnitt $A_2 = 7{,}05\,\text{mm}^2$?

g) Wieviel reines Silber enthalten 17 Silbermünzen bei einem Gewicht von je 5,556g und dem Mischungsverhältnis 9 : 1?

h) Wie lang sind die Höhen eines Dreiecks, die zu den Seiten $a = 12\text{cm}$ und $b = 17\text{cm}$ gehören, wenn sie sich um 3cm unterscheiden?

fernmeldelehrling.de

i) Ein Winkel eines Dreiecks beträgt 36°. Wie groß sind die beiden anderen Winkel, wenn sie sich wie 7 : 2 verhalten?

j) Von vier flächengleichen Rechtecken sind die vier langen Seiten 15, 20, 24, 30 cm lang. Wie müssen sich die entsprechenden vier kurzen Seiten verhalten?

8. Wiederholungsfragen zu den Abschnitten 5. bis 7.

1. Was versteht man unter einer Gleichung? 2. Was kann man mit einer Gleichung machen, ohne ihren Wert zu ändern? 3. Wie werden die Glieder einer Gleichung auf die andere Seite gebracht? 4. Was versteht man unter Auflösung einer Gleichung? 5. Wie wird der Nenner in einer Gleichung beseitigt? 6. Wie werden die Rechenzeichen auf die andere Seite der Gleichung gebracht? 7. Wie kann die Potenzform einer Unbekannten (x^2) beseitigt werden? 8. Wie kann die Wurzel einer Unbekannten ($\sqrt{x}$) beseitigt werden? 9. Wie kann man prüfen, ob die Unbekannte richtig ermittelt wurde? 10. Welche Bedingungen müssen bei Gleichungen mit 2 Unbekannten erfüllt werden? 11. Welche Lösungsmethode gibt es bei Gleichungen mit 2 Unbekannten? 12. Wozu dienen graphische Darstellungen von Funktionen?

9. Der pythagoreische Lehrsatz

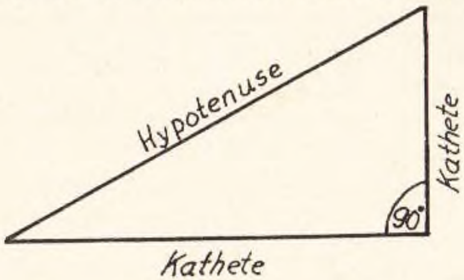
9.1. Allgemeines

Der Lehrsatz des Pythagoras ist einer der wichtigsten Lehrsätze der Geometrie. Pythagoras war ein griechischer Philosoph, der um 550 vor Chr. lebte. Sein Lehrsatz, der sich mit dem Verhältnis der einzelnen Seiten zueinander in einem **rechtwinkligen** Dreieck befaßt, ermöglicht uns in der Wechselstromlehre die Berechnung der Wirk-, Blind- und Scheinanteile.

Das rechtwinklige Dreieck hat, wie sein Name sagt, einen rechten Winkel (90°). Wo dieser Winkel von 90° liegt, spielt keine Rolle.

Die Summe der Winkel in jedem Dreieck beträgt immer 180°

In einem Dreieck kann nur ein **rechter** (und zwei **spitze**) Winkel enthalten sein, weil zwei rechte Winkel schon zusammen 180° hätten.



(Abb. 30)

Die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen die **Katheten**; die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite hat den Namen **Hypotenuse**.

Beachten Sie auch die Schreibweise. Man liest oft das Wort **Hypotenuse** mit „th" geschrieben; es hat aber mit Hypothese oder Hypothek nichts zu tun. Die Wörter **„Kathete"** und **„Pythagoras"** werden dagegen mit „th" geschrieben.

9.2. Beweis für die Richtigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes

An einem **rechtwinkligen** Dreieck, in dem sich die Seiten wie 3 : 4 : 5 verhalten, wollen wir jetzt den pythagoreischen Lehrsatz erläutern und beweisen.

Wir zeichnen das Dreieck mit der Hypotenuse von 5 cm und den beiden Katheten von 4 und 3 cm Länge.

Über die einzelnen Dreiecksseiten wird je ein Quadrat errichtet. Wir erhalten also ein großes Kathetenquadrat von 4 cm Seitenlänge, ein kleines Kathetenquadrat von 3 cm Seitenlänge und ein Hypotenusenquadrat von 5 cm Seitenlänge.

Die einzelnen Quadrate ergeben folgende **Flächen**:

1. Großes Kathetenquadrat	$4 \cdot 4 =$	$16\ \text{cm}^2\ (a^2)$
2. Kleines Kathetenquadrat	$3 \cdot 3 =$	$9\ \text{cm}^2\ (b^2)$
	Summe	$25\ \text{cm}^2$
3. Hypotenusenquadrat	$5 \cdot 5 =$	$25\ \text{cm}^2\ (c^2)$

Bei der Betrachtung der Flächen erkennen wir, daß die beiden Kathetenquadrate mit zusammen 25 cm² in der Größe dem Hypotenusenquadrat von ebenfalls 25 cm² entsprechen.

Hieraus folgt der pythagoreische Lehrsatz:

> In einem **rechtwinkligen** Dreieck ist die Summe der beiden **Kathetenquadrate** gleich dem **Hypotenusenquadrat**.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Daraus folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

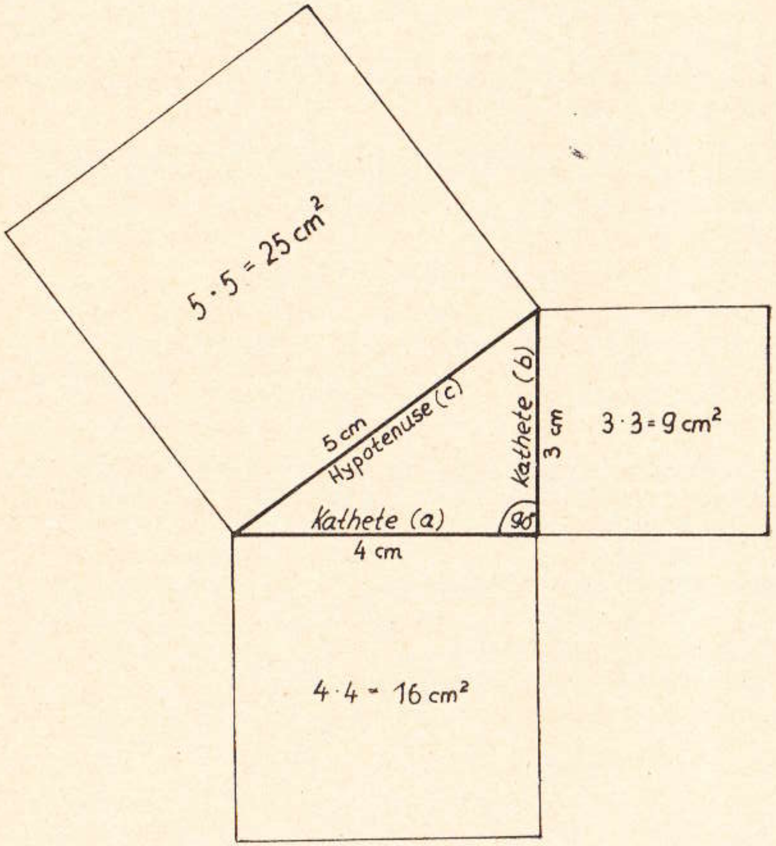
fernmeldelehrling.de

Setzen wir für $a = 4$ und $b = 3$ ein:

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$c = \sqrt{16 + 9}$$
$$c = \sqrt{25}$$
$$c = 5$$

Die Seite c haben wir über die Formel des pythagoreischen Lehrsatzes durch Umstellung der Gleichung ermitteln können. Ebenso kann man die Gleichung nach a oder b umstellen.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



(Abb. 31)

In dem vorstehenden Beispiel haben wir gesehen, daß bei einem Seitenverhältnis von 3 : 4 : 5 ein **rechtwinkliges** Dreieck herauskommt. Es gibt aber auch andere Zahlengruppen, die die Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken angeben, z. B. 5 : 12 : 13, 7 : 24 : 25, 8 : 15 : 17 usw., man nennt sie **pythagoreische** Zahlen. Wenn man sie mit beliebigen Zahlen multipliziert, erhält man neue pythagoreische Zahlen.

Schon die alten Ägypter sollen mit einer Schnur, die durch Knoten in drei Abschnitte im Verhältnis 3 : 4 : 5 geteilt war, rechte Winkel im Freien abgesteckt haben.

Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes:

Bei einem rechtwinkligen Dreieck soll die unbekannte Seite ermittelt werden:

$a = 40\,\text{cm}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = 9\,\text{cm}$	$c = \sqrt{40^2 + 9^2}$
$c = ?$	$c = \sqrt{1600 + 81}$
	$c = \sqrt{1681}$
	$c = 41\,\text{cm}$
$c = 41\,\text{cm}$	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
$b = 9\,\text{cm}$	$a = \sqrt{41^2 - 9^2}$
$a = ?$	$a = \sqrt{1681 - 81}$
	$a = \sqrt{1600}$
	$a = 40$
$c = 41$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$a = 40$	$b = \sqrt{41^2 - 40^2}$
$b = ?$	$b = \sqrt{1681 - 1600}$
	$b = \sqrt{81}$
	$b = 9$

Beispiele aus der Elektrotechnik:

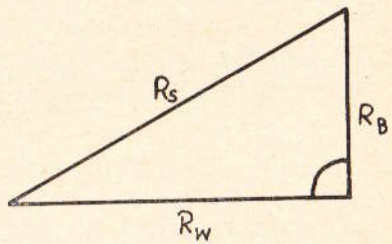
In dem rechtwinkligen Dreieck soll der unbekannte Wechselstromwiderstand R_s ermittelt werden:

Wirkwiderstand $R_W = 100$

Blindwiderstand $R_B = 1750$

Scheinwiderstand $R_s = ?$

$$R_s = \sqrt{R_W^2 + R_B^2}$$
$$R_s = \sqrt{100^2 + 1750^2}$$
$$R_s = 1753$$



(Abb. 32)

fernmeldelehrling.de

Die unbekannte Blindleistung ist zu ermitteln:

Scheinleistung $P_s = 4400$

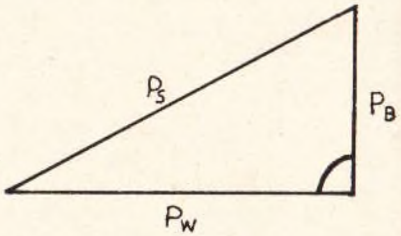
Wirkleistung $P_W = 3000$

Blindleistung $P_B = ?$

$$P_B = \sqrt{P_s^2 - P_W^2}$$

$$P_B = \sqrt{4400^2 - 3000^2}$$

$$P_B = 3210$$



(Abb. 33)

Übungsaufgaben:

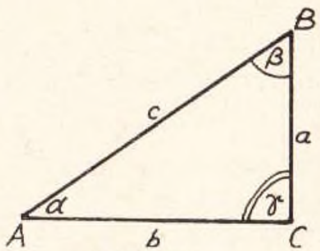
$a = 6$	$b = 8$	$c = ?$
$c = 29$	$a = 21$	$b = ?$
$R_W = 36$	$R_B = 48$	$R_s = ?$
$R_s = 70$	$R_B = 56$	$R_W = ?$
$P_W = 100$	$P_B = 75$	$P_s = ?$
$P_s = 165$	$P_W = 132$	$P_B = ?$

10. Die Winkelfunktionen

10.1. Allgemeines

Bei den folgenden Betrachtungen wollen wir uns nur so weit mit den einfachen Winkelfunktionen eines **rechtwinkligen** Dreiecks befassen, wie es für das Verständnis in der Elektrotechnik (Wechselstromtechnik) unbedingt erforderlich ist.

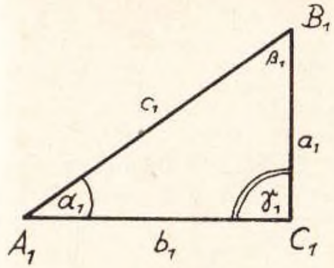
Das rechtwinklige Dreieck enthält die Winkel α (Alpha), β (Beta) und γ (Gamma).



(Abb. 34)

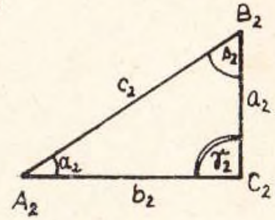
Das Verhältnis der Seiten a und b ändert sich bei **kleineren oder größeren Dreiecken nicht,** solange die Winkel unverändert bleiben.

Zu jedem Verhältnis von zwei Seiten müssen also in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmte Winkel α und β gehören.



(Abb. 35)

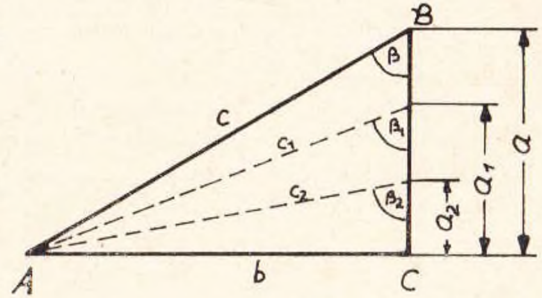
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$



(Abb. 36)

Nun wollen wir uns aber nicht nur mit den Seiten, sondern auch mit den Winkeln befassen. Nehmen wir den spitzen Winkel bei A, also den Winkel α, sprich Alpha.

In der nebenstehenden Zeichnung ergeben sich zu den verschieden n Winkeln von α im Punkt A die Seiten a, a_1, a_2 und c, c_1, c_2.



(Abb. 37)

Werden die Seiten a und c kleiner, so wird auch der Winkel α kleiner, und zwar im gleichen Verhältnis.

Wir können also sagen:

der Winkel α hat das Verhältnis $a : c$

der Winkel α_1 hat das Verhältnis $a_1 : c_1$

der Winkel α_2 hat das Verhältnis $a_2 : c_2$

Der Winkel α kann durch das Verhältnis der **gegenüberliegenden Kathete** a zur **Hypotenuse** c bestimmt werden. **Diese Winkelfunktion wird „Sinus" genannt** und „sin" geschrieben.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

fernmeldelehrling.de

Beispiel:

Gegeben: $a = 3$, $c = 6$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

nach der Tabelle ist $\alpha = 30°$

Der Winkel α kann aber auch durch das Verhältnis der **anliegenden Kathete** b zur **Hypotenuse** c bestimmt werden. **Diese Winkelfunktion wird „Kosinus"** genannt und „cos" geschrieben.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Beispiel:

Gegeben: $b = 2$, $c = 4$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

$\alpha = 60°$ (Tabelle)

Bisher wurde der Winkel α durch das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse bestimmt (sin und cos). Der Winkel α kann außerdem durch das Verhältnis der beiden Katheten bestimmt werden (tan und cot).

Das Verhältnis der **Gegenkathete** zur **Ankathete** ist der **Tangens** (geschrieben: tan).

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Das Verhältnis der **Ankathete** zur **Gegenkathete** wird **Kotangens** genannt (geschrieben: cot).

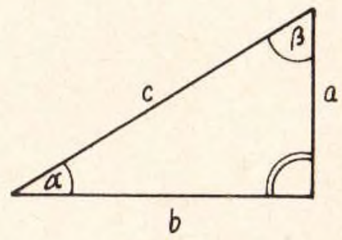
$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

Wir haben bisher immer nur vom Winkel α gesprochen. Das rechtwinklige Dreieck enthält aber außerdem noch den spitzen Winkel „β" (lies Beta). Die für den Winkel α entwickelten Beziehungen gelten aber genauso für den Winkel β. Wir dürfen uns nur nicht zu ängstlich an die Buchstaben in den Formeln klammern, wie das der Ungeübte gern macht. Es kommt nicht darauf an, daß $\sin\alpha = a : c$ ist, sondern $\sin\alpha$ = Gegenkathete : Hypotenuse.

Beim Winkel „β" ist z. B.:

$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\tan\beta = \frac{b}{a}$
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$\cot\beta = \frac{a}{b}$



(Abb. 38)

Aus der vorstehenden Gegenüberstellung ergibt sich folgendes:

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad \left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos\alpha = \sin\beta \quad \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\tan\alpha = \cot\beta \quad \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\cot\alpha = \tan\beta \quad \left(\frac{b}{a}\right)$$

Wenn wir in den vorstehenden Gleichungen für den Winkel $\beta = 90° - \alpha$ einsetzen, so ergibt sich:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$
$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$$
$$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$$

Die Funktion eines Winkels ist gleich der **Kofunktion** seines **Komplementwinkels** (Ergänzungswinkel zu 90°).

Durch diesen Zusammenhang können aus der Sinustabelle die Kosinuswerte und aus der Tangenstabelle die Kotangenswerte abgelesen werden.

Zur Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken müssen außer dem rechten Winkel noch zwei Größen bekannt sein.

fernmeldelehrling.de

Auszug aus der Tabelle für Winkelfunktionen

Sinus Grad	Kosinus Grad		Tangens Grad	Kotangens Grad	
0	90	0,000	0	90	0,000
10	80	0,174	10	80	0,176
20	70	0,342	20	70	0,364
30	60	0,500	30	60	0,577
40	50	0,643	40	50	0,839
50	40	0,766	50	40	1,192
53	37	0,799	53	37	1,327
60	30	0,866	60	30	1,732
70	20	0,940	70	20	2,747
80	10	0,985	80	10	5,671
90	0	1,000	90	0	

10.2. Beispiele für die Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken

Gegeben: $a = 8$, $b = 6$

Gesucht: $c = ?$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{64 + 36}$$
$$c = \sqrt{100}$$
$$c = 10$$

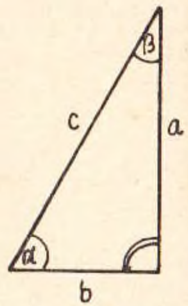
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

nach der Tabelle: $\alpha = 53°$

$$\beta = 90° - \alpha = 90 - 53 = 37°$$

oder $\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$$\beta = 37°$$

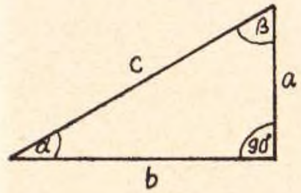


(Abb. 39)

Gegeben: $c = 15$, $a = 9$

Gesucht: $b = ?$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{15^2 - 9^2}$$
$$= \sqrt{144}$$
$$= 12$$



(Abb. 40)

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{15} = 0{,}8$$
$$\alpha = 37°$$
$$\beta = 90 - \alpha = 53°$$

oder $\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{9}{15} = 0{,}6$

$$\beta = 53°$$

oder $\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{12}{9} = 1{,}33$

$$\beta = 53°$$

oder $\cot \beta = \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = 0{,}75$

$$\beta = 53°$$

11. Wiederholungsfragen zu den Abschnitten 9. und 10.

1. Wie groß ist die Summe der Winkel in einem Dreieck? 2. Wie heißen die Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck? 3. Wie heißen die Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck? 4. Wie heißt der pythagoreische Lehrsatz? 5. Wodurch kann der Winkel α bestimmt werden? 6. Welche Winkelfunktionen sind bekannt? 7. Was ist ein Komplementwinkel? 8. Wofür werden die Winkelfunktionen in der Elektrotechnik gebraucht?

Grundgesetze der Physik

Im folgenden wollen wir uns mit den **physikalischen Grundbegriffen** befassen, die für eine gute praktische und theoretische Ausbildung unbedingt erforderlich sind. Den Ausbildungsplan überschreitende physikalische Betrachtungen und Gleichungen werden bewußt nicht behandelt, auch wenn dadurch der behandelte Stoff nicht völlig in sich abgeschlossen ist.

12. Allgemeines

In der Technik unterscheidet man physikalische und chemische Vorgänge.

Von einem **physikalischen Vorgang** spricht man, wenn bei einem technischen Vorgang z.B. die Form, die Lage oder der Zustand eines Stoffes verändert wird.

fernmeldelehrling.de

Beispiele:

Zerkleinern eines Stoffes

Niederdrücken einer Türklinke

Wasser kann fest, flüssig oder gasförmig auftreten

Wenn bei einem technischen Vorgang ein Stoff in einen anderen Stoff oder in mehrere andere Stoffe umgewandelt wird, so spricht man von einem **chemischen Vorgang.**

Beispiele:

Das Rosten von Eisen

Wasser kann in Wasserstoff und Sauerstoff zersetzt werden

Alle physikalischen oder chemischen Vorgänge kann man auf physikalische oder chemische Gesetze zurückführen. Physikalische Gesetze lassen sich am kürzesten durch mathematische **Formeln** ausdrücken. Diese Formeln werden als **Gleichungen** geschrieben.

Die physikalischen Größen (z.B. die Fläche, die Kraft, die Geschwindigkeit usw.) werden in den Formeln (Gleichungen) durch **Formelzeichen** angegeben.

Beispiel für eine Formel:

	Rechteckfläche	=	Länge	×	Breite		
Formel:	A	=	a	·	b		($cm^2 = cm \cdot cm$)

Für die physikalischen Größen hat man **Einheiten** (Maßeinheiten, Maßgrößen, Dimensionen) festgelegt, die ebenfalls durch Kurzzeichen angegeben werden.

Beispiel:

m = Kurzzeichen für das Meter (Einheit der Länge)

Sämtliche physikalischen Vorgänge können auf drei Grundgrößen, für die international anerkannte Grundeinheiten festgelegt worden sind, zurückgeführt werden:

1. Grundgröße: Länge

2. Grundgröße: Zeit

3. Grundgröße: Kraft

Von diesen drei Grundgrößen werden alle anderen Größen abgeleitet, indem sie durch **Multiplikation** von Grundgrößen (Arbeit = Kraft · Weg) oder durch die **Division** von Grundgrößen (Geschwindigkeit = Weg : Zeit) dargestellt werden.

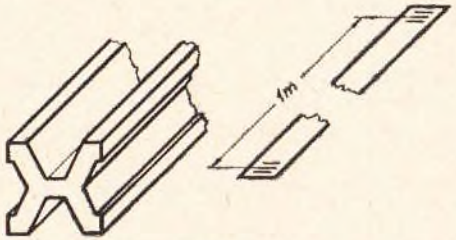
12.1. Die Länge

Die Länge ist die Entfernung zwischen zwei Punkten.

Formelzeichen für die Länge:

l (a, b, c)

Die Längeneinheit ist das Urmeter, das im Internationalen Büro für Maße und Gewichte, im Pavillon de Breteuil in Sèvres bei Paris, aufbewahrt wird.



(Abb. 41)

Das Urmeter ist ein Stab aus einer Legierung von 90% Platin und 10% Iridium. Der Stab, dessen Querschnitt in Abb. 41 dargestellt ist, trägt auf dem Grunde der Rinne an beiden Enden je drei feine Striche; der Abstand der beiden mittleren Striche beträgt bei einer Temperatur von 0° C*) „ein Meter" (1 m). Das Meter entspricht fast genau dem zehnmillionsten Teil eines Erdquadranten (Abstand zwischen Pol und Äquator). Kopien des Urmeters befinden sich im Besitz aller Kulturländer, sie dienen in diesen Ländern als Normale der Längeneinheit.

Neben dem Meter (m) sind in der Technik **folgende** vom Meter abgeleitete **Längeneinheiten üblich:**

1 Kilometer (km)	$= 10^3$ m
1 Zentimeter (cm)	$= 10^{-2}$ m
1 Millimeter (mm)	$= 10^{-3}$ m
1 Mikron (μ)	$= 10^{-6}$ m
1 Millimikron (mμ)	$= 10^{-9}$ m
1 Mikromikron ($\mu\mu$)	$= 10^{-12}$ m

Meßgeräte:

Bandmaß, Maßstab, Schieblehre, Meßschraube.

Das Lichtjahr ist eine Längeneinheit der Astronomie; die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt, entspricht $0{,}94608 \cdot 10^{13}$ km.

*) °C = Grad Celsius, Einheit der Temperatur

fernmeldelehrling.de

Die genaue Länge des Meters kann auch mit Hilfe von Lichtwellen bestimmt werden. International anerkannt ist die Bestimmung der Längeneinheit mit der roten Linie des Elementes Cadmium, ein Meter entspricht 1553164,13 Wellenlängen dieses Lichtes.

Aus der **Längeneinheit** werden die **Flächeneinheit** und die **Einheit des Raumes** (Volumeneinheit) abgeleitet. **Flächeneinheit ist das Quadratmeter** (m^2), ein Quadrat, dessen Seitenlänge 1 m beträgt. **Volumeneinheit ist das Kubikmeter** (m^3), ein Würfel, dessen Kantenlänge 1 m beträgt.

12.2. Die Zeit

Jeder Vorgang im praktischen Leben, auch in der Physik, besteht aus einer Folge von Ereignissen. Jedem Ereignis ist dabei eine bestimmte Zeit zugeordnet; die einzelnen Ereignisse können gleichzeitig stattfinden, sie können aber auch zeitlich aufeinanderfolgen. **Der Zeitbegriff und die Zeitmessung spielen in den Beobachtungsreihen der Naturlehre eine wichtige Rolle.**

Die Zeiteinheit ist der Tag, das ist die Dauer einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Achse.

1 Tag = 24 Stunden = 1440 Minuten = 86 400 Sekunden
1 Tag = 24 h = 1440 min = 86 400 s

Die Umdrehung der Erde wird ermittelt durch die Beobachtung der Stellung der Erde gegenüber der Sonne, und zwar wird der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Kulminationen*) der Sonne gemessen (wahrer Sonnentag). Von dem Sonnentag unterscheidet sich der Sternentag, das ist der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Kulminationen eines beliebigen Fixsternes; der Sternentag dauert etwa 3 Minuten und 56 Sekunden länger als der Sonnentag.

Jeder Längengrad der Erde hat aus diesem Grunde seine eigene Zeit (Ortszeit). Um im praktischen Leben die Zeitbestimmung zu vereinfachen, ist die Erde in 15° breite Zonen eingeteilt worden, in denen jeweils die gleiche Zeit gilt (Zonenzeit). Diese Zonen haben einen Zeitunterschied von jeweils einer Stunde. Für Deutschland und die übrigen mitteleuropäischen Länder gilt die mitteleuropäische Zeit (MEZ), d.h. die Ortszeit des 15. Längengrades östlich von Greenwich. Die Ortszeit von Greenwich ist als Weltzeit festgelegt worden.

Meßgeräte:

Uhr, Pendeluhr, Chronometer (Zeitmesser).

*) Kulmination = Durchgang eines Gestirns durch den Meridian; hierbei erreicht das Gestirn seine größte Höhe über dem Horizont. Die „obere Kulmination" der Sonne findet um 12.00 Uhr, die „untere Kulmination" um Mitternacht statt.

12.3. Die Masse und die Kraft (Gewicht)

Vor etwa drei Jahrzehnten begannen technisch-wissenschaftliche Kreise bei den Berechnungen

als Einheit der Masse das Kilogramm (kg) und

als Einheit der Kraft das Kilopond (kp)

zu benutzen. Zunächst ergaben sich aber immer wieder Irrtümer hinsichtlich der richtigen Anwendung dieser Einheiten.

Die 10. Generalkonferenz der Internationalen Meterkonvention hat 1954 eine **strenge Trennung** der Einheiten für **Masse** und **Kraft** beschlossen. Es wurde das **Kilogramm** (kg) eindeutig als Einheit der Masse bestimmt. Für die Kraft hat sich das **Kilopond** als Maßeinheit im letzten Jahrzehnt durchgesetzt.

Erläuterungen:

Jeder begrenzte Körper besteht aus einer bestimmten Stoffmenge. Diese Stoffmenge ist eine Summe abzählbarer Teilchen (z.B. Moleküle, Atome, Ionen). Als Maß für die Menge (z.B. Wassermenge oder Kohlenmenge) wurde die **Masse** eingeführt.

Die Maßeinheit der **Masse**, das **Kilogramm** (kg) ist durch das Urmaß der Masse, einen Platin-Iridium-Zylinder von 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser, dargestellt. Ebenso wie das Urmaß des Meters wird es in Paris aufbewahrt. Es entspricht dem Gewicht von 1 l Wasser bei 4° C. Gleichartige Urmaße sind an alle Mitgliedsstaaten der Meterkonvention verteilt worden.

Durch die **Anziehungskraft** der Erde wird von jedem Körper auf seine Unterlage eine **Kraft** (ein Druck) ausgeübt. Die auf die Unterlage wirkende Kraft heißt auch **Gewicht**.

Die Anziehungskraft der Erde ist nicht überall gleich groß. Sie nimmt mit zunehmender Entfernung vom Erdmittelpunkt ab; in 6370 km Höhe ist sie auf $\frac{1}{4}$ gesunken. Der Mond übt in seinem Anziehungsbereich auch eine Anziehungskraft auf alle Körper aus. Auf seiner Oberfläche werden jedoch alle Körper nur mit dem 6. Teil des Gewichts angezogen, das sie auf der Erde hätten. Ein Raumfahrer könnte also auf dem Mond 6 mal so hoch springen wie auf der Erde. Aus diesen Überlegungen ergibt sich:

Das Gewicht ändert sich mit dem Ort.

Anders ist es jedoch mit der **Masse** des Körpers. Die **Substanzmenge** (Masse) bleibt **unabhängig vom Ort** immer erhalten.

Die Masse eines Körpers ist überall gleich groß.

Nach dem **Grundgesetz von Newton** gibt es zwischen der **Kraft** und der **Masse** unter Berücksichtigung der **Beschleunigung** folgenden gesetzmäßigen Zusammenhang:

fernmeldelehrling.de

Kraft = Masse · Beschleunigung

$$F = m \cdot b \quad \text{(kp)}$$

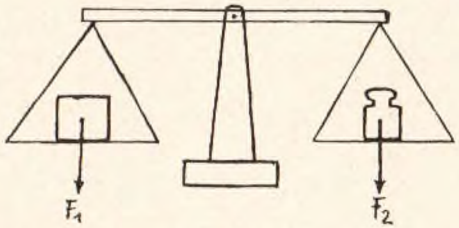
Da sich die Masse eines Körpers nicht ändern kann, ändert sich die Kraft **proportional** mit der **Beschleunigung**. Setzen wir für die Kraft F das **Gewicht** G und für die beliebige Beschleunigung b die **Fallbeschleunigung** g in die Formel ein, so erhalten wir:

Gewicht = Masse · Fallbeschleunigung

$$G = m \cdot g \quad \text{(kp)}$$

Das Gewicht eines Körpers ist also abhängig von der Fallbeschleunigung. Die Fallbeschleunigung wiederum wird von der Anziehungskraft bestimmt.

Da zwei Körper gleicher Masse **am selben Ort** auch gleiches Gewicht haben, läßt sich die Masse eines Körpers auf einer **Hebelwaage** durch **Vergleich** mit **Gewichtsstücken** bestimmen, d.h. wiegen.



(Abb. 42)

$$F_1 = F_2 \text{ (kp)}$$

in diesem Fall ist auch: $m_1 = m_2$ (kg)

Dies ist erklärlich, da beide Körper – das Gewichtsstück und der zu wiegende Körper – am **selben Ort** einer **gleich großen Erdanziehung** unterliegen.

Alle Mitglieder der Meterkonvention haben die gleichen Urmaße für das **Kilogramm** erhalten, d.h. daß diese Urtypen für die im Handel usw. zu verwendenden **Gewichtsstücke** alle die **gleiche Masse** haben. Gleichgültig, wo ich nun auf der Erde **1 kg** Butter einkaufe, ich erhalte überall die gleiche **Menge** Butter.

Dagegen ist die im technischen Maßsystem verwendete Maßeinheit für die Kraft das Kilopond (kp).

1 Kilopond (kp) ist die **Kraft**, die eine Masse von 1 Kilogramm (kg) unter 45° geographischer Breite in Meeresspiegelhöhe infolge ihres **Gewichts** auf ihre Unterlage ausübt.

1 Kilopond = 1000 Pond
(1 kp = 10^3 p)
1 Megapond = 1000000 Pond
(1 Mp = 10^6 p)

Zusammenfassend läßt sich über die Umstellung von **Kilogramm** auf **Kilopond** sagen, daß sich diese im Handels- und Wirtschaftsleben sowie im täglichen Leben nur in wenigen Fällen auswirkt.

In der **Technik sind in allen Fällen,** in denen man mit **Spannungen, Drücken, Kräften, Gewichten oder Lasten** rechnet, die bisherigen Einheiten **mg, g, kg, t** durch **mp, kp, Mp** zu ersetzen.

Meßgeräte:

Waage, Hebelwaage, Federwaage, Kraftmesser.

12.4. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 12.

1. Nennen Sie die Grundgrößen der Physik mit Formelzeichen und Einheiten. 2. Was ist die Länge? 3. Was ist die Kraft? 4. Geben Sie die Meßgeräte für die Länge an. 5. Geben Sie die Meßgeräte für die Kraft an. 6. Geben Sie die Meßgeräte für die Zeit an. 7. Welche Größen werden von der Länge abgeleitet? 8. Wieviel cm sind: $l = 3{,}06\,\text{m} + 0{,}043\,\text{km} + 46253\,\text{mm}$? 9. Wieviel cm² sind: $A = 0{,}055\,\text{m}^2 + 6{,}3\,\text{dm}^2 + 7890\,\text{mm}^2$? 10. Wieviel cm³ sind: $V = 0{,}00054\,\text{m}^3 + 0{,}867\,\text{dm}^3 + 1050\,\text{mm}^3$? 11. Wieviel p sind: $G = 0{,}358\,\text{kp} + 60046\,\text{mp}$? 12. Wieviel min sind: $t = 2{,}6\,\text{h} + 1440\,s$? 13. Erklären Sie den Unterschied zwischen Gewicht und Masse.

13. Aufbau und Zustandsformen der Körper

Jeder Körper beansprucht für sich einen **Raum.**

Der physikalisch kleinste Teil eines Stoffes heißt **Molekül.**

Die Zusammenhangskraft, die die Moleküle eines Stoffes zusammenhält, heißt **Kohäsion.** Ohne Kohäsion würden alle Körper auseinanderfallen.

Die Kraft, mit der verschiedene Stoffe äußerlich aneinanderhaften, nennt man **Adhäsion** (Anhangskraft), z.B. Kitt und Glas, Farbe und Metall.

Die Moleküle lassen sich chemisch noch weiter zerlegen in **Atome.**

Atome sind die **kleinsten** Teile eines **Grundstoffes** oder **Elementes.**

Es gibt etwa **100** Elemente.

Sämtliche Körper (Stoffe) sind aus den Grundstoffen zusammengesetzt. Sie unterscheiden sich voneinander durch die Art und Anzahl der in ihren Molekülen vorhandenen Atome.

Alle Körper können in **festem, flüssigem** oder **gasförmigem** Zustand den Raum ausfüllen. Diese Zustandsform oder **Aggregatzustände** der Körper hängen von der Stärke der **Kohäsion** ab. **Durch Temperaturveränderungen bzw. durch Druckänderungen kann die Stärke der Kohäsion und damit der Aggregatzustand geändert werden.**

fernmeldelehrling.de

13.1. Feste Körper

Die Stoffe der festen Körper haben einen **bestimmten Rauminhalt** und eine **bestimmte Gestalt**. Ihre Moleküle können nur schwer gegeneinander verschoben oder voneinander getrennt werden, weil zwischen den Molekülen eine **große** Kohäsion besteht.

Feste Körper haben verschiedene Eigenschaften. Sie können z.B. **hart** sein (wenn sie dem Eindringen eines anderen Körpers einen großen Widerstand entgegensetzen); sie können ferner **plastisch** (zäh, dehnbar; Verformung ohne Bruch), **elastisch** (Formänderung nur während Belastung, z.B. Gummi, Federstahl), **spröde** (Bruch bei geringer Formänderung, z.B. Glas, gehärteter Stahl) oder **porös** (durchlässig für gasförmige oder flüssige Stoffe) sein.

13.2. Flüssige Körper

Flüssige Körper haben auch einen **bestimmten Rauminhalt**, aber **keine** bestimmte Gestalt. Ihre Moleküle haben eine **schwache** Kohäsion.

13.3. Gasförmige Körper

Luftförmige Körper oder Gase haben **keinen** bestimmten Rauminhalt und **keine** bestimmte Gestalt. Gase haben ein **Ausdehnungsbestreben**; sie lassen sich aber auch stark zusammendrücken. Zwischen den Molekülen der Gase ist praktisch **keine** Kohäsion vorhanden.

Ein Stoff kann durch Temperatur- oder Druckänderungen von einer Zustandsform in die andere übergehen. Das Wasser kann z.B. beim Gefrieren aus der flüssigen in die feste Form (Eis), beim Schmelzen aus der festen in die flüssige Form (Wasser), beim Sieden aus der flüssigen in die gasförmige Form (Dampf), beim Kondensieren aus der gasförmigen in die flüssige Form (Wasser), übergehen.

13.4. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 13.

1. Beschreiben Sie die Zustandsform eines festen Körpers. 2. Beschreiben Sie die Zustandsform eines flüssigen Körpers. 3. Beschreiben Sie die Zustandsform eines gasförmigen Körpers. 4. Was ist ein Atom? 5. Was ist ein Molekül? 6. Welche Eigenschaft hat ein harter Körper? 7. Welche Eigenschaft hat ein elastischer Körper? 8. Welche Eigenschaft hat ein poröser Körper? 9. Welche Eigenschaft hat ein plastischer Körper? 10. Welche Eigenschaft hat ein spröder Körper? 11. Was bedeutet Kohäsion? 12. Was bedeutet Adhäsion?

14. Mechanik der festen Körper

14.1. Die Kraft

Eine Kraft (Zugkraft oder Druckkraft) kann folgende Wirkungen verursachen:

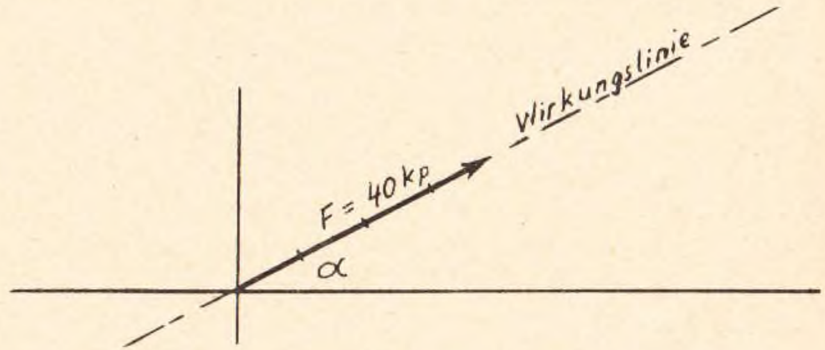
a) Eine Kraft kann den Körper verformen (statische Kräfte).

b) Eine Kraft kann den Bewegungszustand eines Körpers verändern (dynamische Kräfte).

Wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, so ist stets eine gleich große, in entgegengesetzter Richtung wirkende Gegenkraft vorhanden:

$$\boxed{\text{Kraft} = \text{Gegenkraft}}$$

Durch einen Kraftpfeil (Vektor) kann man Größe, Richtung und Lage einer Kraft darstellen:



(Abb. 43)

Auch das Gewicht eines Körpers ist eine Kraft, die nach dem Mittelpunkt der Erdkugel gerichtet ist. Diese Anziehungskraft der Erde nennt man **Schwerkraft**. Alle Körper üben deshalb einen Druck auf ihre Unterlage aus, der mit **Gewicht** bezeichnet wird.

Formelzeichen für das Gewicht: G

Die Abhängigkeit des Gewichts von der Größe und Art des Körpers wird durch folgende Formel ausgedrückt:

fernmeldelehrling.de

Gewicht	=	Volumen	·	spezifisches Gewicht
G	=	V	·	γ
kp	=	dm^3	·	$\frac{kp}{dm^3}$

Das spezifische Gewicht (auch Wichte, Artgewicht oder Einheitsgewicht genannt) gibt das Gewicht der Raumeinheit eines Stoffes an:

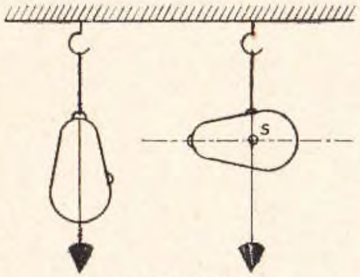
Bei festen und flüssigen Körpern wird das spez. Gewicht γ (Gamma)

in p für 1 cm^3
in kp für 1 dm^3
in Mp für 1 m^3

angegeben; z. B. für Kupfer $\gamma = 8{,}9\,p/cm^3$ bzw. kp/dm^3 usw.

Man kann sich das Gewicht eines Körpers auch vorstellen als eine einzige Kraft, die in einem Punkt, dem **Schwerpunkt** des Körpers, angreift. Bei Unterstützung eines Körpers in seinem Schwerpunkt befindet sich der Körper in jeder Lage im Gleichgewicht, wenn nur die Schwerkraft auf ihn wirkt.

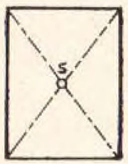
14.2. Schwerpunkt und Gleichgewicht



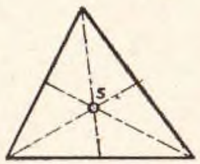
(Abb. 44)

Der Schwerpunkt eines unregelmäßigen, flächenhaften Körpers kann durch einen einfachen Versuch bestimmt werden, indem der Körper nacheinander in zwei verschiedenen Punkten an einem Faden aufgehängt wird. Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Fadenrichtungen (Schwerelinien) (Abb. 44). Der Schwerpunkt regelmäßiger Flächen und Körper ist durch Zeichnung leicht zu finden. [Beispiele siehe Abbildungen 45a bis d – beim Dreieck (Abb. 45c) ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden—.]

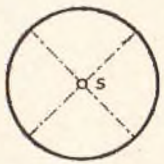
(Abb. 45a)



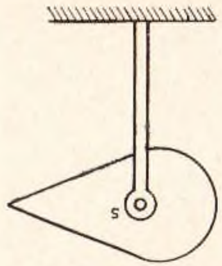
(Abb. 45b)



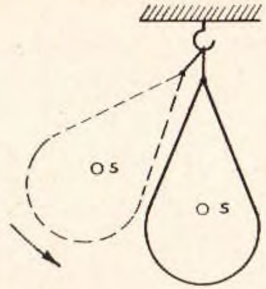
(Abb. 45c)



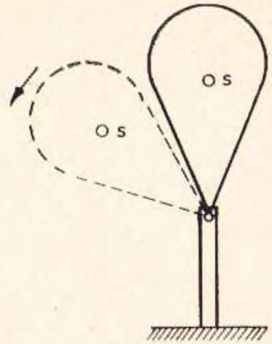
(Abb. 45d)



(Abb. 46)



(Abb. 47)



(Abb. 48)

Ist ein **Körper in seinem Schwerpunkt unterstützt**, ist er **in jeder Lage im Gleichgewicht.** Der Körper befindet sich dann in der **stetigen, unterschiedslosen oder indifferenten Gleichgewichtslage** (Abb. 46).

Wird der **Körper in einem anderen Punkt** als dem Schwerpunkt **unterstützt,** dreht er sich und pendelt hin und her, bis **sein Schwerpunkt genau lotrecht unter dem Unterstützungspunkt** liegt (Abb. 47). Der Körper befindet sich dann in der **sicheren oder stabilen Gleichgewichtslage.**

Ein **Körper** ist aber auch im Gleichgewicht, wenn **sein Unterstützungspunkt lotrecht unter dem Schwerpunkt liegt** (Abb. 48). Der Körper nimmt aber umkippend die stabile Lage ein, wenn der Schwerpunkt aus dieser lotrechten Geraden gerät. Diese **künstlich herbeigeführte Lage ist die unsichere oder labile Gleichgewichtslage.**

14.3. Standfestigkeit

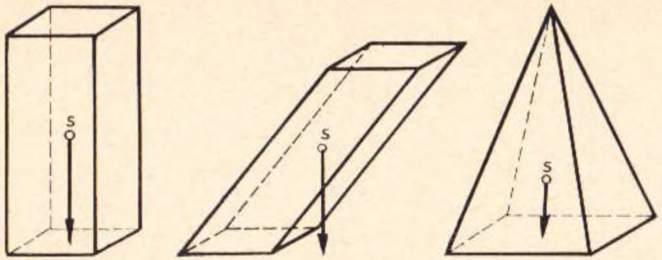
Wird ein Körper nicht in einem einzigen Punkt, sondern in einer Fläche unterstützt, ist für physikalische und praktische Betrachtungen seine **Standfestigkeit** wichtig.

Ein Körper steht fest, wenn das Lot vom Schwerpunkt durch die Unterstützungsfläche geht (Abb. 49a).

Geht das **Lot** vom Schwerpunkt seitlich **an der Unterstützungsfläche vorbei, bleibt der Körper nicht in dieser Lage stehen,** er fällt um (Abb. 49b).

Die Standfestigkeit ist um so größer, je weiter sich die Unterstützungsfläche nach allen Seiten erstreckt und je näher der Schwerpunkt bei der Unterstützungsfläche liegt (Abb. 49c).

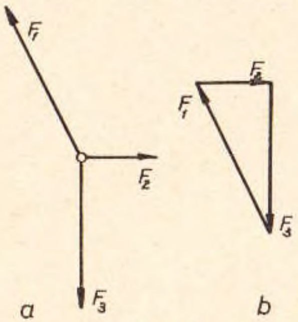
fernmeldelehrling.de



(Abb. 49a) (Abb. 49b) (Abb. 49c)

14.4. Gleichgewicht der Kräfte und der Drehmomente

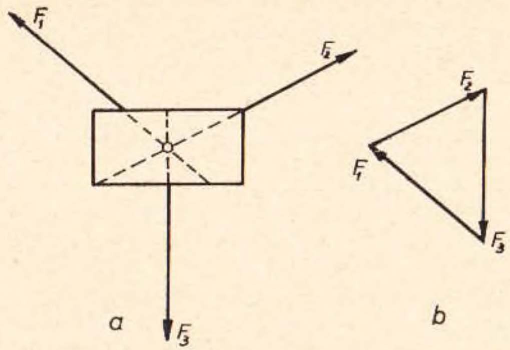
Zunächst müssen wir untersuchen, in welcher Weise Kräfte auf einen Körper einwirken können und unter welchen Bedingungen Kräfte im Gleichgewicht sind. Es kommt bei einem Körper nicht nur darauf an, wie groß eine Kraft ist und in welcher Richtung sie auf ihn wirkt, sondern auch, an welchem Punkt des Körpers die Kraft angreift. **Kräfte, die in demselben Punkt eines Körpers angreifen, können im Gleichgewicht stehen, wenn die Gesamtkraft im Kräftevieleck Null ist** (Abb. 50).



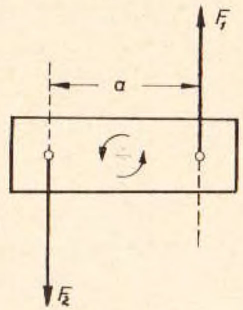
(Abb. 50)

Ferner können mehrere Kräfte an einem Körper auch dann im **Gleichgewicht** sein, **wenn die Verlängerung ihrer Richtungspfeile, d. h. ihre Wirkungslinien, sich in einem Punkt schneiden und die Gesamtkraft Null ist** (Abb. 51a). Der **Schnittpunkt der Wirkungslinien** gilt dann als der **gemeinsame Angriffspunkt der Kräfte.** Jede Kraft kann also entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden, ohne daß sich ihre Wirkung verändert.

Haben zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte nicht dieselbe Wirkungslinie, stehen sie nicht mehr im Gleichgewicht. Zwei solche Kräfte werden ein **Kräftepaar** genannt; ein Kräftepaar übt auf den Körper ein **Drehmoment** aus, weil es einen Körper zu drehen versucht (in Abb. 51b im Sinne der gekrümmten Pfeile).

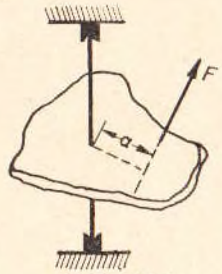


(Abb. 51a)



(Abb. 51b)

Ist ein **Körper drehbar gelagert,** übt **jede einzelne Kraft ein Drehmoment auf die Drehachse aus** (Abb. 51c). Die **Größe des Drehmomentes** wird bestimmt durch die **Größe der Kraft** und durch den **rechtwinkligen Abstand** a **der Wirkungslinien der Kräfte bzw. den rechtwinkligen Abstand** a **der Kraft vom Drehpunkt (Drehachse).** Aus dem Produkt dieser beiden Größen ergibt sich die Größe des Drehmomentes M:

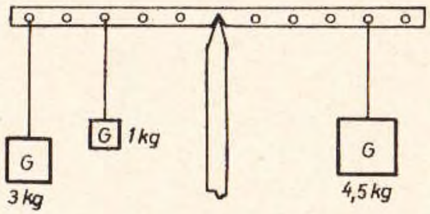


(Abb. 51c)

fernmeldelehrling.de

Drehmoment	=	Kraft	·	Abstand
M	=	F	·	a
kpm	=	kp	·	m

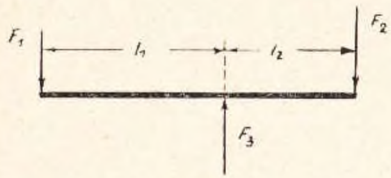
Dabei ist zu beachten, daß neben der Größe des Drehmomentes auch dessen Richtung wesentlich ist. Ein Drehmoment wird also ähnlich wie die Kraft erst durch Größe und Richtung genau festgelegt; **ein Drehmoment ist eine gerichtete Größe.** Wie bei den Kräften können auch mehrere Drehmomente zu einem Gesamtdrehmoment zusammengesetzt werden. Mehrere Drehmomente können sich gegenseitig aufheben (Abb. 52). Demnach müssen nicht nur Einzelkräfte, sondern auch **Drehmomente an einem Körper im Gleichgewicht sein.**



(Abb. 52)

Hebelgesetz:

Bei einem drehbar gelagerten Körper herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente der links gerichteten Kräfte gleich der Summe der Drehmomente der rechts gerichteten Kräfte ist.



$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$
$$F_3 = F_1 + F_3$$

(Abb. 53)

Beispiel:

Am vorstehenden in Ruhe befindlichen Hebel betragen $F_1 = 8$ kp, $l_1 = 3$ m, $F_2 = 6$ kp. Wie groß sind l_2 und F_3?

Gegeben: $F_1 = 8$ kp, $l_1 = 3$ m, $F_2 = 6$ kp

Gesucht: l_2, F_3

Lösung: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

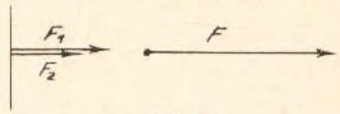
$$l_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{F_2} = \frac{8 \cdot 3}{6} = \underline{\underline{4\ \text{m}}}$$

$$F_3 = F_1 + F_2 = 8 + 6 = \underline{\underline{14\ \text{kp}}}$$

Der Hebelarm beträgt $l_2 = 4$ m, die Kraft $F_3 = 14$ kp.

14.5. Zusammenwirken mehrerer Kräfte

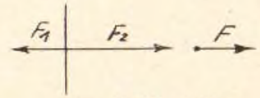
Greifen in einem Punkt zwei Einzelkräfte (F_1 und F_2) in der **gleichen Richtung** an, dann ist die Gesamtkraft F gleich der **Summe der Einzelkräfte.** Diese Gesamtkraft wird auch Resultante, Resultierende oder Mittelkraft genannt.



(Abb. 54)

$$F = F_1 + F_2$$

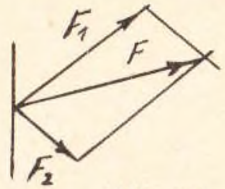
Wirken zwei Einzelkräfte in entgegengesetzter Richtung, so ergibt sich die Gesamtkraft als **Differenz** dieser Teilkräfte.



(Abb. 55)

$$F = F_1 - F_2$$

Greifen die Kräfte F_1 und F_2 **unter einem Winkel an,** dann ist die Resultierende auch von dem Winkel abhängig, unter dem diese Kräfte angreifen. Die Ermittlung der Resultierenden erfolgt zeichnerisch durch Zusammensetzen der Kräfte zu einem **Kräfteparallelogramm.** In diesem Parallelogramm ist die vom Angriffspunkt ausgehende Diagonale die Resultierende nach Größe und Richtung.

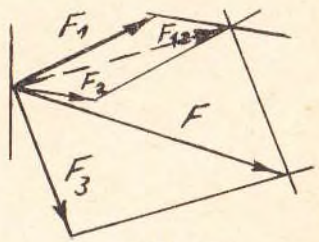


(Abb. 56)

$F = F_1 + F_2$

$+$ = räumliche Zusammensetzung

Greifen mehrere Kräfte unter verschiedenen Winkeln an, so kann man jeweils zwei Kräfte zu einem Parallelogramm zusammenfassen. Die so gefundenen Resultierenden werden wieder zusammengefaßt.



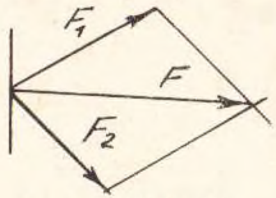
(Abb. 57)

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

fernmeldelehrling.de

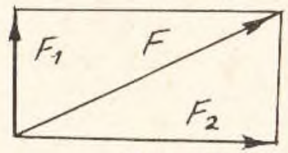
Umgekehrt läßt sich eine Gesamtkraft mit Hilfe des Kräfteparallelogramms zerlegen, wenn z. B. die Richtungen der Einzelkräfte (oder auch Richtung und Größe einer Einzelkraft) bekannt sind.

$F_2 = F - F_1$



(Abb. 58)

Rechtwinklig zueinander gerichtete Kräfte werden quadratisch zusammengesetzt.



(Abb. 59)

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

15. Bewegung der Körper

15.1. Allgemeines

Man spricht von „Bewegung" eines Körpers, wenn dieser seine Lage gegenüber seiner Umgebung ändert.

15.1.1. Trägheitsgesetz

Jeder Körper beharrt in seinem jeweiligen Zustand (Zustand der Ruhe oder Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung), solange er nicht von äußeren Kräften gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern. Ein Körper kann also weder von selbst in Bewegung geraten, noch seinen Bewegungszustand von selbst ändern (**Trägheit** oder **Beharrungsvermögen**).

15.1.2. Reibung

Soll ein Körper auf seiner Unterlage fortbewegt werden, tritt ein die Bewegung hemmender Widerstand auf. Diesen Widerstand nennt man Reibung oder Reibungskraft. Zur Überwindung dieser Reibung ist eine bestimmte Mindestkraft erforderlich.

Die **Reibung** hängt ab vom **Druck** des gleitenden oder rollenden Gegenstandes auf die Unterlage sowie vom Werkstoff, von der **Oberflächenbeschaffenheit** und von der **Schmierung.**

Soll ein Körper aus dem Ruhestand in Bewegung gebracht werden, ist die „Haftreibung" zu überwinden. Um den Bewegungszustand zu erhalten, ist die etwas kleinere „Gleitreibung" zu überwinden.

Rollende Reibung ist wesentlich kleiner als gleitende Reibung. Deshalb schiebt man runde Stangen (Walzen) unter schwere Gegenstände, um diese fortzubewegen. An einem Wagen bringt man Räder an und verlegt damit die gleitende Reibung in das Lager der Welle, wo man sie durch Schmiermittel wesentlich herabsetzen kann.

15.2. Trägheitskraft

Die Trägheitskraft eines beschleunigten Körpers ist nicht immer gleich der Antriebskraft. Nur zu Beginn der Beschleunigung, wenn der Körper aus dem Ruhezustand herausgebracht wird, trifft das zu. Ein beschleunigter Körper erfährt zwei Gegenkräfte: a) die Trägkeitskraft und b) die Reibungskraft. Die Summe dieser beiden Kräfte ist gleich der Antriebskraft. Wird die Bewegung gleichförmig, so ist die Reibungskraft gleich der Antriebskraft und die Trägheitskraft gleich Null. Bei Verzögerungen kehrt sich dieser Vorgang um.

15.3. Gleichförmige Bewegung

Die Bewegung eines Körpers ist gleichförmig, wenn der Körper in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt.

Die **Geschwindigkeit** v ist die Größe, die angibt, **wie schnell ein Körper seinen Ort** (seine Stellung im Raum) **verändert.** Die **Geschwindigkeit** v ist bei gleichförmiger Bewegung der **Weg** s, den ein Körper in einer **Zeiteinheit** t zurücklegt.

Legt ein Körper in 12 s einen Weg von 72 m zurück, so legt er in 1 s $\frac{72}{12}$ $= 6$ m zurück; seine Geschwindigkeit beträgt $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Geschwindigkeit v eines Körpers wird also gefunden, indem der Weg s durch die Zeit t geteilt wird:

fernmeldelehrling.de

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

$$v = \frac{s}{t} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

Die **Einheit der Geschwindigkeit** wird aus den **Grundgrößen** der **Zeit** und der **Länge** abgeleitet und ist Meter je Sekunde.

Für schnelle Bewegungen wird als Geschwindigkeitsmaß der Weg benutzt, der in einer willkürlich gewählten Zeitspanne, z. B. in einer Minute, in einer Stunde oder in einem Jahr zurückgelegt wird (wie Kilometer je Stunde).

Durch Umstellen der Gleichung lassen sich der Weg und die Zeit berechnen.

$$\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

$$s = v \cdot t \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}\right]$$

$$\text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

$$t = \frac{s}{v} \left[\frac{\text{m} \cdot \text{s}}{\text{m}} = \text{s}\right]$$

Beispiel:

Mit einem Fahrrad wird eine Entfernung von 55 km in $3\frac{1}{2}$ Std. zurückgelegt. Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Gegeben: $s = 55$ km
$t = 3{,}5$ h

Gesucht: $v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

Lösung: $v = \frac{s}{t}$

$= \frac{55\ \text{km}}{3{,}5\ \text{h}}$

$v = 15{,}72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\,720\ \frac{\text{m}}{\text{h}} = \underline{\underline{4{,}37}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Beispiel:

Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ einer Riemenscheibe von 160 mm, Durchmesser bei der Drehzahl 1450 $\frac{1}{\text{min}}$?

Gegeben: $d = 160$ mm

$n = 1450\ \frac{1}{\text{min}}$

Gesucht: $v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

Lösung: $v = d \cdot \pi \cdot n$

$= \frac{160\ \text{mm} \cdot 3{,}14 \cdot 1450 \cdot 1}{\text{min}}$

$\underline{\underline{v}} = 728\,000\ \frac{\text{mm}}{\text{min}} = 728\ \frac{\text{m}}{\text{min}} = \underline{\underline{12{,}1}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

15.4. Kreisbewegung

Auch eine **Kreisbewegung (Drehbewegung)** kann eine gleichförmige Bewegung sein. Man spricht dann von der Umfangsgeschwindigkeit; das ist der Weg, den ein Punkt auf einer Kreisbahn in einer Zeiteinheit zurücklegt.

Sind bei einer Drehbewegung der Durchmesser der Kreisbahn „d" und die Drehzahl „n" (Zahl der **Umdrehung je Minute** oder **je Sekunde**) bekannt, so läßt sich die Umfangsgeschwindigkeit „v" berechnen:

Nach einer Umdrehung hat ein Punkt auf dem sich drehenden Teil einen Weg zurückgelegt, der gleich dem Kreisumfang ($d \cdot \pi$) ist. Nach „n"-Umdrehungen ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg, also die **Umfangsgeschwindigkeit:**

$$\boxed{v = d \cdot \pi \cdot n}$$

Die Maßeinheit für die Umfangsgeschwindigkeit hängt von den Maßeinheiten für den Durchmesser und für die Drehzahl ab. Sie ergibt sich aus der Dimensionsgleichung.

Nach dem Trägheitsgesetz bewegt sich ein Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradeaus, solange keine Kraft auf ihn einwirkt. Soll er sich auf einer Kreisbahn bewegen, so muß auf den Körper dauernd eine Kraft einwirken, die ihn zwingt, die Kreisbahn einzuhalten. Diese nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete Kraft heißt **Zentripetalkraft** oder Zentralkraft. Die Kraft, die einen auf einer Kreisbahn bewegten Körper nach außen zieht, wird **Zentrifugalkraft** oder Fliehkraft genannt.

fernmeldelehrling.de

15.5. Ungleichförmige Bewegung

Eine Bewegung ist nur selten wirklich gleichförmig, z. B. wird ein Radfahrer beschleunigt oder verzögert fahren, wenn Gefälle oder Steigungen, Kurven oder Hindernisse vorhanden sind, der Wegzustand ihn also zu Geschwindigkeitsänderungen zwingt.

Die Bewegung eines Körpers ist ungleichförmig, wenn der Körper **in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten ungleiche Wege** zurücklegt. Die Bewegung gilt als **ungleichförmig beschleunigt,** wenn die zurückgelegten Wege in gleichen aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten größer werden (Geschwindigkeitszuwachs); sie ist **ungleichförmig verzögert,** wenn die zurückgelegten Wege in gleichen aufeinanderfolgenden Zeiten kleiner werden (Geschwindigkeitsabnahme).

Die **Beschleunigung** a einer Bewegung ist gegeben durch das **Verhältnis des Geschwindigkeitsunterschieds** $\Delta v = v - v_0$*) **und der Zeit** t, in der sie erfolgt.

$$\boxed{\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsunterschied}}{\text{Zeitunterschied}} \qquad a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v_0}{t}}$$

In der Gleichung ist Δv der **Geschwindigkeitsunterschied,** der sich aus der Differenz $v - v_0$ errechnet, worin v die **Endgeschwindigkeit** (am Ende der Meßzeit t) und v_0 die **Anfangsgeschwindigkeit** (am Anfang der Meßzeit t) ist.

Beispiel:

Ein D-Zug erreicht seine Höchstgeschwindigkeit von $v = 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $t = 3$ min. Wie groß ist die Beschleunigung des Zuges?

Gegeben: $v_0 = 0$, $v = 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t = 3$ min

Gesucht: a

Lösung: $a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{140 \cdot 1000 - 0}{3 \cdot 60 \cdot 3600} = \frac{1{,}4 \cdot 10^5}{6{,}46 \cdot 10^5} = \underline{\underline{0{,}216 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$

Die Beschleunigung des Zuges beträgt $a = 0{,}216 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

*) Δ = Delta, großer griechischer Buchstabe, mathematisches Kurzzeichen für „Differenz"; lesen Sie hier: Δv = Geschwindigkeitsunterschied.

16. Arbeit und Leistung

16.1. Arbeit

Zum Verrichten einer Arbeit muß eine Kraft aufgewendet werden (Muskelkraft, Maschinenkraft u. a.).

Beispiel:

3 Arbeiter tragen je 50 kp in die 5., 4. bzw. 3. Etage eines Hauses. Wer muß mehr arbeiten?

3 Arbeiter tragen 50 kp, 40 kp bzw. 30 kp in die 5. Etage. Wer muß mehr arbeiten?

Merke:

> Je größer die aufgewendete Kraft und je länger der Weg, desto größer ist die Arbeit!

Als Einheit der mechanischen Arbeit dient die Arbeitsmenge, die erforderlich ist, um 1 kp um 1 m zu heben.

Diese Arbeitsmenge wird ein Kilopondmeter genannt (kpm).

Wird eine Last **senkrecht gehoben,** ist also die Arbeit gleich **Gewicht mal Höhe:**

$$\boxed{A = G \cdot h \text{ (kpm)}}$$

Wird eine Last auf einer waagerechten oder schrägen Bahn **gezogen oder geschoben,** so ist die Arbeit gleich **Kraft mal Weg:**

$$\boxed{A = F \cdot s \text{ (kpm)}}$$

Beispiel:

Zum Bewegen eines beladenen Wagens ist eine Kraft von 30 kp erforderlich. Welche Arbeit wird auf einer Strecke von 500 m verrichtet?

Gegeben: $F = 30$ kp, $s = 500$ m

Gesucht: A

Lösung:
$$A = F \cdot s = 30 \text{ kp} \cdot 500 \text{ m}$$
$$\underline{\underline{A = 15\,000 \text{ kpm}}}$$

fernmeldelehrling.de

16.2. Leistung

Im allgemeinen kommt es nicht nur darauf an, daß eine Arbeit verrichtet wird; von großer Bedeutung ist auch, wie schnell man mit der Arbeit fertig wird.

Führen z. B. zwei Arbeiter die gleiche Arbeit aus und benötigt der eine für diese Arbeit 5 Stunden und der zweite Arbeiter arbeitet daran 10 Stunden, dann haben zwar beide ihre Arbeit ausgeführt, aber der erste war schneller damit fertig. Man sagt: „Der erste Arbeiter leistet mehr."

Will man nun Arbeitskräfte, Maschinen usw. miteinander vergleichen, so vergleicht man ihre **Leistung,** das **ist die in einer Sekunde verrichtete Arbeit.**

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Leistung} &= \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} \\ P &= \frac{A}{t}\left(\frac{\text{kpm}}{\text{s}}\right) \end{aligned}}$$

Neben der Maßeinheit kpm/s wird noch 1 PS als größere Einheit für die Leistung verwendet:

$$\boxed{\begin{aligned} 1\ \text{PS} &\triangleq 75\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \\ 1\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} &\triangleq 0{,}0133\ \text{PS} \end{aligned}}$$

1 PS wird z. B. dann geleistet, wenn 75 kp innerhalb 1 Sekunde 1 Meter hoch gehoben werden.

Beispiele:

Eine Last von 1,5 t soll in 50 s 18 m gehoben werden. Welche Mindestleistung in $\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ und PS muß der eingesetzte Kran haben?

Gegeben: $F = 1500$ kp

$t = 50$ s

$s = 18$ m

Gesucht: $P = ?$

Lösung:

$$P = \frac{A}{t}$$

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

$$P = \frac{1500 \cdot 18}{50}$$

$$\underline{\underline{P = 540\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}}}$$

Lösung nach der Einheitengleichung:

$$1\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \triangleq 0{,}0133\ \text{PS}$$

$$540\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \triangleq 540 \cdot 0{,}0133 = 7{,}182\ \text{PS}$$

$$\underline{\underline{P \approx 7{,}2\ \text{PS}}}$$

16.3. Energie

Jeder Körper (fest, flüssig oder gasförmig), der die Fähigkeit besitzt, Arbeit zu verrichten, besitzt Energie. Diese Energie ist mit einem Arbeitsvorrat oder gespeicherter Arbeit vergleichbar. Sie kommt in verschiedenen Energieformen vor (mechanische Energie, Wärmeenergie, Schallenergie, magnetische Energie, elektrische Energie, Lichtenergie, chemische Energie, Atomenergie).

Bei den Vorgängen in der Natur oder in der Technik erfolgt eine Umwandlung der Energieformen, z. B.:

	Erzeugt wird u. a.	**Verbraucht wird**
Elektromotor	mechanische Energie	elektrische Energie
Elektroherd	Wärmeenergie	elektrische Energie
Gasherd	Wärmeenergie	chemische Energie
Glühlampe	Lichtenergie	elektrische Energie
Dampfmaschine	mechanische Energie	chemische Energie

Bei sämtlichen Energieumwandlungen ist nun die erzeugte Energie stets genauso groß wie die verbrauchte Energie **(Gesetz von der Erhaltung der Energie).**

16.4. Wirkungsgrad

Die bei den Energieumwandlungen erzeugte Energie besteht z.T. aus **nutzloser** Energie, die der technischen Anwendung verlorengeht, z.B.

fernmeldelehrling.de

a) Bei der Dampfmaschine verschwindet Wärmeenergie mit den heiß abziehenden Gasen; Wärmeverluste entstehen durch Reibung in den Lagern.

b) Beim Elektromotor entsteht Lager- und Luftreibung; die Wicklungen erwärmen sich; es entstehen Magnetisierungsverluste.

Aus diesem Grunde ist bei jedem technischen Vorgang, also auch bei jeder Maschine (z.B. Pumpe, Winde, Motor) die abgegebene Leistung (Nutzleistung) immer kleiner als die zugeführte Leistung (Antriebsleistung).

Das Verhältnis der abgegebenen Nutzleistung zur zugeführten Leistung heißt Wirkungsgrad η (Eta) der Maschine:

$$\boxed{\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \text{bzw. sinngemäß } \eta = \frac{A_{ab}}{A_{zu}}}$$

Der Wirkungsgrad ist stets kleiner als 1, weil die abgegebene Arbeit nicht größer als die zugeführte Arbeit sein kann.

Der Wirkungsgrad ist dimensionslos; er wird als Dezimalbruch (z.B. 0,8) oder in Prozenten (z.B. 80%) ausgedrückt.

Beispiel:

Eine Pumpe mit einem Wirkungsgrad von 0,7 fördert in jeder Sekunde 20 Liter Wasser auf 21 *m* Höhe. Welche Antriebsleistung ist erforderlich?

Gegeben: $G = 20\,\text{kp}$, $h = 21\,\text{m}$, $t = 1\,\text{s}$, $= 0{,}7$

Gesucht: P_{zu}

Lösung:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

$$P_{ab} = \frac{A}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{20\,\text{kp} \cdot 21\,\text{m}}{1\,\text{s}}$$

$$P_{ab} = 420\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$$

$$= \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

$$P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta} = \frac{420\,\text{kpm}}{0{,}7\,\text{s}}$$

$$P_{zu} = 600\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 8\,\text{PS}$$

16.5. Wiederholungsfragen zu den Abschnitten 14. bis 16.

1. Welche Wirkungen können durch eine Kraft erzeugt werden? 2. Was ist der Schwerpunkt eines Körpers? 3. Was ist das Gewicht eines Körpers? 4. Was gibt das spezifische Gewicht an? 5. Wie kommt es, daß eine Federwaage das Gewicht, nicht aber die Masse eines Körpers wiegt? 6. Zwei Kräfte von $F_1 = 12\,kp$ und $F_2 = 8\,kp$ greifen im Winkel von $\alpha = 45°$ an einem Punkt an. Wie groß ist die Gesamtkraft und welche Richtung hat sie? 7. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein Körper sich im Gleichgewicht befindet? 8. Was ist ein Drehmoment? 9. Wie lautet das Hebelgesetz? 10. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit ein Körper nicht umkippt? 11. Was ist Geschwindigkeit? 12. Erklären Sie den Unterschied zwischen gleichförmiger und ungleichförmiger Bewegung. 13. Was ist Umfangsgeschwindigkeit? 14. Erklären Sie die Begriffe Zentrifugal- und Zentripetalkraft. 15. Was ist mechanische Arbeit? 16. Was ist Energie? 17. Was ist mechanische Leistung? 18. Was ist 1 *PS*? 19. Was gibt der Wirkungsgrad an?

17. Einfache Maschinen

17.1. Allgemeines

Goldene Regel der Mechanik:

> **„Was man an Kraft spart, muß man an Weg zugeben; was man an Weg spart, muß man an Kraft zugeben.“**

Diese Regel gilt für sämtliche einfachen Maschinen (z.B. Hebel, schiefe Ebene, Rolle, Flaschenzug).

Die „Goldene Regel der Mechanik“ besagt, daß Arbeit nicht gespart, sondern umgeformt werden kann.

Die Größe der Arbeit, also das Produkt aus Kraft und Weg, ist konstant ($A = F \cdot s$). Bei einer Drehbewegung ist die Antriebskraft (das Drehmoment), also das Produkt aus Kraft und Radius, konstant ($M = F \cdot r$).

17.2. Der Hebel

Der Hebel ist eine einfache Vorrichtung zum Heben einer Last. Er besteht aus einer **festen Stange, die um einen Punkt drehbar gelagert ist.**

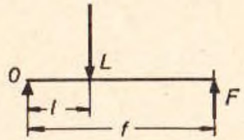
Nach den Angriffspunkten der Last und der Kraft werden **einseitige und zweiseitige Hebel** unterschieden.

fernmeldelehrling.de

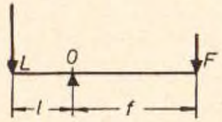
Greifen Kraft und Last auf derselben Hebelseite vom Drehpunkt 0 aus an, ist es ein **einseitiger Hebel** (Abb. 60).

Greifen Kraft und Last auf verschiedenen Hebelseiten an, ist es ein **zweiseitiger Hebel** (Abb. 61).

Der Abstand der **Kraft** F vom Drehpunkt 0 ist der **Kraftarm** f; der der **Last** L vom Drehpunkt 0 der **Lastarm** l.



(Abb. 60)



(Abb. 61)

Für den Hebel gelten folgende **Gleichgewichtsbedingungen:**

Kraftmoment = Lastmoment
Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm
$F \cdot f = L \cdot l$

Je länger der Kraftarm ist, um so geringer kann die Kraft sein.

Die verrichtete Arbeit bleibt, unabhängig von der Länge des Kraftarms, gleich groß:

$$A = F \cdot s = \text{konstant.}$$

Durch den Hebel wird nur die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflußt, Arbeit wird nicht eingespart.

Durch den gleicharmigen zweiseitigen Hebel wird nur die Richtung der Kraft geändert.

17.3. Das Seil und die Rolle

Mit einem Seil (Drahtseil, Tau, Schnur, Kette usw.) kann man den **Angriffspunkt** einer Kraft **verlegen.**

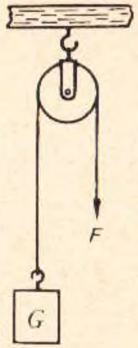
Zieht man das Seil durch einen Ring oder um einen Pfahl herum, so kann man infolge der Biegsamkeit des Seils die **Zugrichtung** beliebig **ändern.** Um die dabei auftretende Reibung zu verringern, kann man eine Rolle verwenden.

Feste Rolle:

Bei einer **festen** Rolle greift die **Last** G an dem **einen** und die **Kraft** F am **anderen** Ende des Seils an.

Wenn man die Reibung vernachlässigt, ist

$$\boxed{F = G \text{ [kp]}}$$



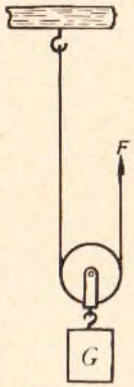
(Abb. 62)

Lose Rolle:

Bei einer **losen** Rolle wirkt die Last G an der Rolle. Die **Kraft** F greift an dem nach **oben** führenden Ende des Seils an. Das **andere** Ende des Seils ist mit einem festen Punkt verbunden. Beide parallelen Seilstücke tragen je die **Hälfte** der Last G, so daß bei Vernachlässigung der Reibung die Last mit der Kraft

$$\boxed{F = \frac{G}{2} \text{ [kp]}}$$

hochgezogen werden kann.



(Abb. 63)

Dieser Kraftersparnis um die Hälfte steht ein doppelt so großer Weg der Kraft gegenüber. Vgl. „Goldene Regel der Mechanik".

17.4. Der Flaschenzug

Ein Flaschenzug ist eine Zusammensetzung aus **festen** und **losen** Rollen. Dabei verteilt sich die Last gleichmäßig auf sämtliche Seilstücke zwischen den festen und losen Rollen. Da die Zahl der Seilstücke der Zahl der Rollen (n) entspricht, wird eine Last mit der Kraft

$$\boxed{F = \frac{G}{n}}$$

hochgezogen.

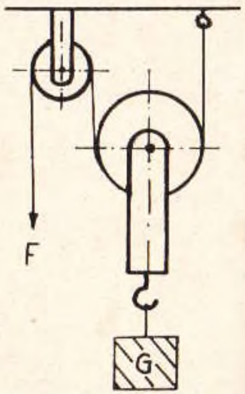
fernmeldelehrling.de

Da es sich auch hier um eine Umformung der mechanischen Arbeit handelt, muß die Kraftersparnis mit einem längeren Weg erkauft werden.

Bei einem Falschenzug mit einer losen Rolle ergibt sich, wie bereits unter 17.4. erwähnt:

$$\boxed{F = \frac{G}{2}}$$

(Reibung und Gewicht der losen Rolle vernachlässigt)

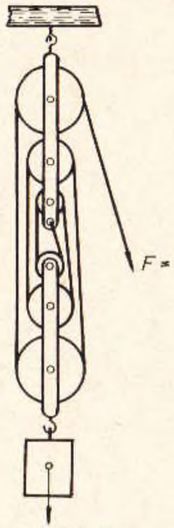


(Abb. 64)

Bei einem Flaschenzug mit 3 losen Rollen ergibt sich:

$$\boxed{F = \frac{G}{6}}$$

(Reibung und Gewicht der losen Rollen vernachlässigt)



(Abb. 65)

Beispiel:

Eine Last von 240 *kp* soll mit einem Flaschenzug aus je 2 festen und losen Rollen hochgezogen werden. Die losen Rollen wiegen zusammen 4 *kp*. Welche Kraft ist aufzuwenden?

Gegeben: $G = 244$ kp, $n = 4$ Rollen

Gesucht: F

Lösung: $F = \frac{G}{n} = \frac{244 \text{ kp}}{4} = \underline{\underline{61 \text{ kp}}}$

17.5. Übertragen von Drehbewegungen

Oft wird eine drehende Bewegung von einer Welle auf eine andere Welle übertragen. Diese „Übersetzung" kann durch Riemengetriebe und durch Zahnradgetriebe erfolgen. **Zweck der Übersetzung** ist in der Regel eine **Drehzahlregelung.** Das Verhältnis der Drehzahl der treibenden Scheibe (bzw. des treibenden Zahnrades) zur Drehzahl der getriebenen Scheibe (bzw. des getriebenen Zahnrades) wird **Übersetzungsverhältnis** genannt:

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{n_1}{n_2}}$$

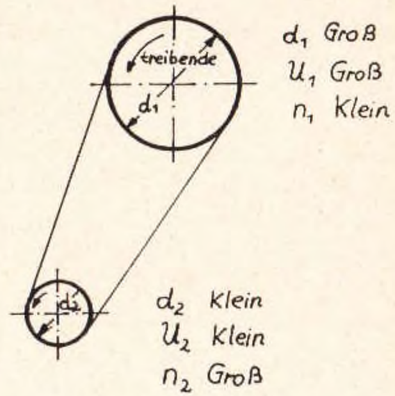
17.5.1. Übersetzung durch Riemenscheiben

In einer bestimmten Zeit läuft die gleiche Länge des gemeinsamen Riemens über den Umfang der treibenden wie der getriebenen Scheibe. Dabei muß sich die Scheibe mit dem kleineren Durchmesser häufiger drehen als die Scheibe mit dem größeren Durchmesser. Die Umfangsgeschwindigkeit ist jedoch auf beiden Scheiben gleich groß:

$$v_1 = v_2$$
$$d_1 \cdot \pi \cdot n_1 = d_2 \cdot \pi \cdot n_2$$
$$d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2$$

Somit ergibt sich

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}}$$



(Abb. 66)

Beispiel:

Ein Motor mit der Drehzahl $n_1 = 1500$ *U/min* hat eine Riemenscheibe mit dem Durchmesser $d_1 = 60$ *mm*. Welche Drehzahl n_2 hat die von dem Motor angetriebene Maschine, wenn die Riemenscheibe dieser Maschine einen Durchmesser $d_2 = 300$ *mm* hat?

Gegeben: $d_1 = 60$ mm

$d_2 = 300$ mm

$n_1 = 1500 \frac{\text{U}}{\text{min}}$

Gesucht: n_2

fernmeldelehrling.de

Lösung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$$\frac{d_1 \cdot n_1}{d_2} = n_2$$

$$n_2 = \frac{d_1 \cdot n_1}{d_2}$$

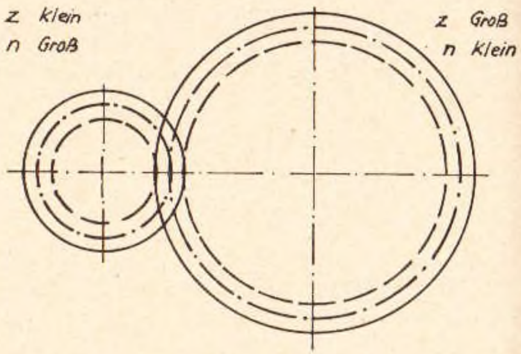
$$= \frac{60 \cdot 1500}{300}$$

$$\underline{\underline{n_2 = 300 \frac{\text{U}}{\text{min}}}}$$

17.5.2. Übersetzung durch Zahnräder

Die Radgrößen der Zahnräder werden in der Regel nicht durch den Umfang oder durch den Durchmesser, sondern durch die Zähnezahlen bestimmt. Somit lautet die Gleichung für das Übersetzungsverhältnis:

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}}$$



(Abb. 67)

Beispiel:

Ein Zahnrad mit 110 Zähnen macht 200 U/min und treibt ein Zahnrad mit 40 Zähnen an. Wie groß ist die Drehzahl des getriebenen Rades?

Gegeben: $z_1 = 110$ Zähne

$n_1 = 200 \frac{\text{U}}{\text{min}}$

$z_2 = 40$ Zähne

Gesucht: n_2

Lösung:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{z_1 \cdot n_1}{z_2} = n_2$$

$$n_2 = \frac{z_1 \cdot n_1}{z_2}$$

$$= \frac{110 \cdot 200}{40}$$

$$\underline{\underline{n_2 = 550 \text{ U/min}}}$$

17.6. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 17.

1. Wie heißt die „Goldene Regel der Mechanik"? 2. Beschreiben Sie den Unterschied zwischen einem einseitigen und einem zweiseitigen Hebel. 3. Wozu dient eine feste Rolle? 4. Wozu dient eine lose Rolle? 5. Wozu dient ein Flaschenzug? 6. Wie verhalten sich bei einem Riemenantrieb die Umdrehungszahlen der Riemenscheiben zueinander? 7. Wie heißt das Übersetzungsverhältnis eines Zahnradantriebs? 8. Wozu dient eine schiefe Ebene?

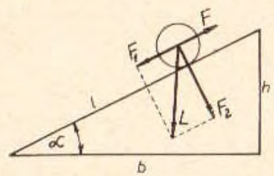
18. Schiefe Ebene

18.1. Allgemeines

Schwere Lasten sind leichter zu heben oder herabzulassen, wenn zwei oder mehrere Bohlen schräg vom Boden an die Umladerampe oder an den Wagen gelegt werden. Die **Kraft,** die jetzt aufzuwenden ist, **ist kleiner als das Gewicht der Last;** ihre Größe hängt von der **Steigung der geneigten Bahn ab. Durch die schiefe Ebene wird die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflußt, Arbeit wird nicht eingespart.**

Die **Kraftersparnis an der geneigten Bahn** kommt **durch** die **Kraftzerlegung** zustande. Die Kraft kann in verschiedenen Richtungen an der Last angreifen.

Das lotrecht nach unten wirkende Gewicht L einer Last kann in **zwei Teilkräfte** F_1 und F_2 zerlegt werden (Abb. 68). Die Teilkraft F_1 hat das Bestreben, den Körper längs der Ebene abwärts zu bewegen (Hangabtrieb), während die Teilkraft F_2 senkrecht auf die Bahn drückt (Druckkraft). Die Größe der Teilkraft F_1 gibt an, wie groß die Gegenkraft F sein muß, um der Last das Gleichgewicht zu halten, wenn F parallel zur Bahn wirkt.



(Abb. 68)

fernmeldelehrling.de

Das Kräftedreieck aus L, F_1 und F_2 ist dem Dreieck der geneigten Bahn ähnlich: die Last L entspricht der Länge l, die Druckkraft F_2 der Grundlinie b und der Hangabtrieb F_1 der Höhe h, der Steigungswinkel α ist gleich dem Winkel, der durch L und F_2 eingeschlossen ist. Wird in die Gleichung für die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt:

Kraft	$= F$	(Hangabtrieb)
Kraftarm	$= l$	(geneigte Bahn)
Last	$= L$	(Gewicht der Last)
Lastarm	$= h$	(Höhe)

so ergibt sich:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}$$
$$F \cdot l = L \cdot h$$

Die aufzuwendende Kraft F errechnet sich demnach an der schiefen Ebene zu:

$$F = L \cdot \frac{h}{l}$$

Die aufzuwendende Kraft F wird also mit länger werdender Bahn l kleiner.

Die **Steigung** einer geneigten Bahn ist das **Verhältnis** der **Höhe** h zur **Länge** l:

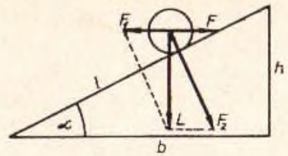
$$\text{Steigung} = \frac{h}{l} = \sin \alpha$$

Wirkt die Kraft parallel zur geneigten Bahn, ist die aufzuwendende Kraft gleich dem Produkt aus Last und Steigung:

$$F = L \cdot \frac{h}{l} = L \cdot \sin \alpha$$

Anders liegen die Kraftverhältnisse, wenn die Kraft parallel zur Grundlinie b angreift (Abb. 69), wie es bei einem Keil und einer Schraube der Fall ist.

Das Kräftedreieck aus L, F_1 und F_2 ist auch hier dem Dreieck der geneigten Bahn ähnlich: die Last L entspricht hier der Grundlinie b, die Druckkraft F_2 der Länge l und die Kraft F (gleich F_1) der Höhe h, der Neigungswinkel α ist gleich dem Winkel, der durch L und F_2 einge-



(Abb. 69)

schlossen ist. Wird in die Gleichgewichtsgleichung eingesetzt:

Kraft	$= F$	
Kraftarm	$= b$	(Grundlinie)
Last	$= L$	(Gewicht der Last)
Lastarm	$= h$	(Höhe)

so ergibt sich:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}$$
$$F \cdot b = L \cdot h$$

Es ist dann:

$$F = L \cdot \frac{h}{b}$$

Die aufzuwendende Kraft F wird also mit länger werdender Grundlinie b kleiner.

Die **Neigung** einer geneigten Bahn ist das **Verhältnis** der **Höhe** h zur **Grundlinie** b:

$$\text{Neigung} = \frac{h}{b} = \tan \alpha$$

Wirkt die Kraft parallel zur Grundlinie der geneigten Bahn, ist die aufzuwendende Kraft gleich dem Produkt aus Last und Neigung:

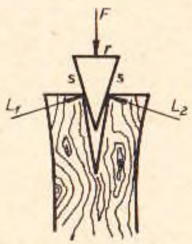
$$F = L \cdot \frac{h}{b} = L \cdot \tan \alpha$$

18.2. Der Keil

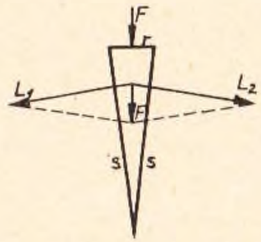
Der Keil ist von der schiefen Ebene abgeleitet worden. **Durch den Keil wird die Größe der aufzuwendenden Kraft beeinflußt;** er wird in der Form von Messer, Meißel, Beil, Stemmeisen, Sense, Spaten usw. angewendet.

fernmeldelehrling.de

Der **Keil** ist ein **dreiseitiges Prisma,** dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist. Der **Keilwinkel** wird von den Seitenflächen (Seiten s) eingeschlossen und ist ein **spitzer Winkel.** Wird auf den Rücken r des Keils die **Kraft** F ausgeübt, **zerlegt** sie sich **in zwei gleich große Seitenkräfte** L (L_1 und L_2), deren Wirkungslinien senkrecht auf beiden Seitenflächen s des Keils stehen.



(Abb. 70)



(Abb. 71)

Das Kräfteparallelogramm, das beim Zerlegen der Kraft F entsteht, zeigt, daß das **Keildreieck dem Teildreieck der Kräfte ähnlich** ist (Abb. 71). Auf Grund dieser ähnlichen Dreiecke gilt die Verhältnisgleichung:

$$F : L = r : s$$

$$\boxed{\frac{F}{L} = \frac{r}{s}}$$

Die aufzuwendende Kraft F errechnet sich demnach beim Keil wie folgt:

$$\boxed{F = L \cdot \frac{r}{s}}$$

Die Seitenkräfte L eines Keiles sind um so größer, je kleiner der Bruch $\frac{r}{s}$ ist, d.h. je kleiner der Keilwinkel ist.

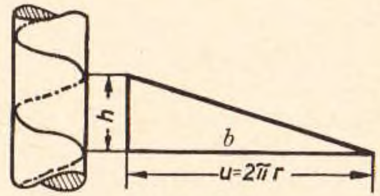
Infolge der an den Seitenflächen auftretenden Reibung sitzt der Keil so fest, daß er auch dann in seiner Lage gehalten wird, wenn die Kraft F nicht mehr wirkt. Anwendung: Befestigen von Riemenscheiben auf Wellen, Verkeilen von Rädern.

18.3. Die Schraube

Die Schraube ist wie der Keil eine Art schiefe Ebene. Bei der Schraube ist die schiefe Ebene um einen zylindrischen Dorn herumgewickelt worden. So entsteht eine Schraubenlinie, wenn um einen Zylinder, dessen Grundfläche den Radius r hat, ein rechtwinkliges aus Papier geschnittenes

Dreieck herumgewickelt wird, dessen Grundlinie b dem Kreisumfang des Zylinders $U = 2\pi r$ entspricht (Abb. 72). Die Höhe h des Dreieckes ist die Ganghöhe der Schraube. Weil die Kraft F bei der Schraube parallel zur Grundlinie am Umfang der Schraubenspindel angreift, gilt die Gleichung:

$$F = L \cdot \frac{h}{b}$$



(Abb. 72)

Bei der Schraube muß in diese Gleichung für die Grundlinie b der Umfang der Schraubenspindel U eingesetzt werden:

$$F = L \cdot \frac{h}{U}$$

In der Technik wird aber selten der Umfang einer Schraube angegeben, üblich ist die Angabe des Schraubendurchmessers d. Da $U = d \cdot \pi$ ist, folgt:

$$\boxed{F = L \cdot \frac{h}{d \cdot \pi}}$$

h ist **die Ganghöhe der Schraube** und d **der Schraubendurchmesser.**

Die Wirkung der Schraube kann vergrößert werden, wenn die Kraft an einem Hebelarm (Kurbel, Schraubenschlüssel oder Flügelschraube) angreift; als **Durchmesser** d ist dann der **doppelte Abstand von Schraubenmitte und Angriffspunkt der Kraft** einzusetzen.

Durch die Schraube wird die Größe der aufzuwendenden Kraft verkleinert; Arbeit wird nicht eingespart, weil mit kleiner werdender Kraft der Kraftweg größer wird.

Schrauben werden in der Technik häufig verwendet:

a) in Pressen, um einen großen Druck mit einer kleinen Kraft auszuüben (Hobelbank, Schraubzwinge, Schraubstock),

b) zum Heben von Lasten (Hebeböcke) und

c) zum Bewegen von Land-, Wasser- und Luftfahrzeugen (Schiffsschraube und Luftschraube).

fernmeldelehrling.de

An den Flanken der Schraube tritt eine Reibung auf, daß die Schraube wie der Keil auch dann festsitzt, wenn keine Kraft mehr wirkt; die Schraube wird daher häufig als Befestigungsmittel verwendet.

Beispiele:

Mit welcher Kraft zieht ein Fahrzeug abwärts, das auf einer Straße mit einer Steigung 1 : 30 steht und ein Gewicht von 1200 kp hat?

Gegeben: $L = 1200\ \text{kp}$

$h : l = 1 : 30$

Gesucht: $F = ?$

Lösung: $F = L \cdot \frac{h}{l}$

$= 1200 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1200}{30}$

$\underline{\underline{F = 40\ \text{kp}}}$

Mittels einer Keilpresse soll ein Widerstand von 360 kp überwunden werden. Auf den Rücken des Keils soll dabei eine Kraft von 40 kp wirken. Wie groß muß das Verhältnis Rücken r zur Seite s und wie groß muß der Keilwinkel φ *(Phi)* sein?

$\frac{r}{s} = \frac{F}{L}$

$\frac{r}{s} = \frac{40}{360}$

$\underline{\underline{\frac{r}{s} = \frac{1}{9}}}$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{s} = \frac{r}{2s}$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{18} = 0{,}0556$

Nach Tabelle für sin-Funktionen:

$\frac{\varphi}{2} = 3°\ 12$

$\underline{\underline{\varphi = 2 \cdot \frac{\varphi}{2} = 6°\ 24}}$

19. Der Schall

19.1. Die Schallerregung

Alles was wir mit dem Gehör wahrnehmen, nennt man Schall (Sprache, Rauschen des Waldes, Klingeln des Weckers usw.).

Ein Schall entsteht durch schnelle aufeinanderfolgende **Schwingungen eines elastischen Körpers** (Stimmgabel, Stimmbänder, Musikinstrumente, Membran eines Lautsprechers oder Fernhörers).

Je nach Art der Schwingungen unterscheidet man:

a) Den **Ton**; er entsteht durch regelmäßige Schwingungen. Töne erscheinen meist als **Klang**, das ist ein Gemisch mehrerer in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehender Töne.

b) Das **Geräusch**; es entsteht durch mehrere unregelmäßige Schwingungen.

c) Den **Knall**; er entsteht durch kurze und heftige Schwingungen.

19.2. Die Schallausbreitung

Der **Schall** muß vom **Schallerreger** zum **Schallempfänger** übertragen werden. Die Schwingungen des Schallerregers versetzen die Luft in seiner Umgebung in Schwingungen; die dabei entstehenden **Verdichtungen und Verdünnungen der Luft** werden als **Schallwellen** bezeichnet.

Der Schall breitet sich, von Luftmolekül zu Luftmolekül fortpflanzend, **nach allen Seiten hin gleichmäßig aus,** bis er auf den Schallempfänger trifft, z.B. im Gehörgang des Ohres auf das Trommelfell. Das Trommelfell gerät dadurch in Schwingungen und leitet den Schall in das innere Ohr weiter.

Zur **Übertragung des Schalles** vom Schallerreger auf das Ohr ist also die **Luft als Schallträger** nötig. Selbstverständlich können auch **feste, flüssige** oder andere **gasförmige Stoffe** als **Schallträger** wirken und Schallwellen übertragen.

Der Schall wird von elastischen Körpern besser übertragen als von plastischen. Plastische Körper, wie Watte, Asche, Filz, Wolle, Torfmull, eignen sich daher **zur Schallabdichtung.**

In luftleeren Räumen (im Vakuum) vermag sich eine Schallwelle nicht fortzupflanzen, weil dort keine Schallträger vorhanden sind.

Die **Schallgeschwindigkeit** wird ermittelt, indem die **Entfernung** zwischen **Schallerreger und Schallempfänger** und die **Zeit** gemessen wird, die der Schall benötigt, um diese Entfernung zu durchlaufen.

Auch hier kann die Gleichung

$$v = \frac{s}{t} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

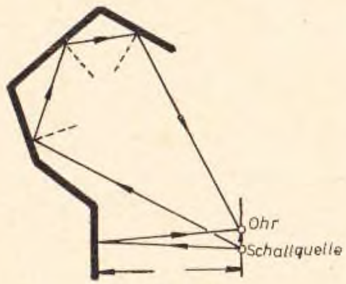
angewendet werden:

In ruhiger Luft pflanzt sich der Schall bei einer Temperatur von 0°C mit einer Schallgeschwindigkeit von **331,3** $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und **bei 15°C** mit einer Schallgeschwindigkeit von **340** $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ **fort.** Für eine Temperaturzunahme von 1° C nimmt die Schallgeschwindigkeit in Luft um etwa 0,6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu.

fernmeldelehrling.de

Die Schallgeschwindigkeit ist abhängig von der Elastizität des Schallträgers. **Feste und flüssige Körper leiten daher den Schall** im allgemeinen **besser als Luft,** d. h. die Schallgeschwindigkeit ist in festen und flüssigen Körpern größer als in gasförmigen Körpern. In Eisen beträgt sie etwa $5000 \frac{m}{s}$, in Wasser $1450 \frac{m}{s}$. Die Reichweite einer Schallwelle hängt von der Größe der Schallenergie und von der Beschaffenheit des Schallträgers ab.

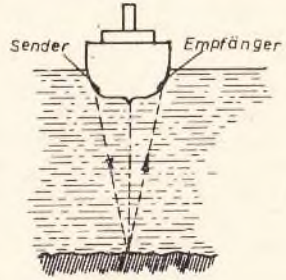
Treffen Schallwellen auf eine elastische Wand, werden sie zurückgeworfen. Den **zurückgeworfenen Schall** bezeichnen wir als **Echo.** An unser Ohr gelangen also zweimal Schallwellen, die von ein und demselben Schallerreger herrühren; einmal kommen die Schallwellen unmittelbar von dem schwingenden Körper selbst, zum anderen durch Zurückwerfen (Reflexion) von der Wand. Damit beide Schalleinwirkungen, der unmittelbare Schall und das Echo, von unserem Ohr getrennt wahrgenommen werden können, muß zwischen ihrem Empfang ein Zeitraum von mindestens $\frac{1}{10}$ Sekunde liegen. In $\frac{1}{10}$ Sekunde legen die Schallwellen einen Weg von 34 m zurück, die reflektierende Wand muß somit mindestens 17 m entfernt sein. Ein **deutliches Echo** wird bei wesentlich größeren Entfernungen vernommen. Ein **mehrfaches Echo** ist zu hören, wenn derselbe Schall **mehrmals als Echo an das Ohr gelangt** (Abb. 73).



(Abb. 73)

Nachhall entsteht, wenn in einem geschlossenen Raum der Schallweg von der Schallquelle zur Wand kleiner als 17 m ist. Ein Echo kann dann wegen des kleinen Zeitunterschiedes nicht wahrgenommen werden, die reflektierten Schallwellen stören aber die unmittelbaren Schallwellen. In eingerichteten Räumen oder mit Menschen gefüllten Sälen ist ein Nachhall nicht vorhanden, weil plastische Körper die Schallwellen nicht zurückwerfen. In Theatern, Konzerträumen und Kirchen wird der Nachhall als störend empfunden und wird daher von den Bauakustikern mit allen verfügbaren Mitteln (Raumgestaltung und Verwendung plastischer Stoffe) bekämpft.

Die Reflexion des Schalles wird beim **Echolot** benutzt (Abb. 74), um die Tiefe von Gewässern zu bestimmen. An einer Wand des Schiffes wird durch einen Schallsender ein starker gerichteter Schall erzeugt. Die Schallwellen dringen in die Tiefe, werden vom Meeresboden zurückgeworfen (reflektiert) und von einem Empfänger im Schiff wieder aufgefangen. Aus der Zeit und der Schallgeschwindigkeit läßt sich dann auf einfache Weise der Schallweg ermitteln, der gleich der doppelten Wassertiefe ist:



(Abb. 74)

$$\text{Wassertiefe} = \frac{\text{Schallgeschwindigkeit} \cdot \text{Ausbreitungszeit}}{2}$$

In ähnlicher Weise wird mit dem Echolot die Höhe von Luftfahrzeugen bestimmt.

Durch Trichter, Glasplatten, Hohlspiegel kann der Schall abgelenkt, gerichtet und zusammengefaßt (gebündelt) werden (Sprachrohr, Hörrohr).

19.3. Der Schallempfang

Jede Vorrichtung, die die Energie einer auftreffenden Schallwelle in eine andere Energieform verwandelt, ist ein **Schallempfänger.**

Zum Empfang von Schallwellen eignen sich besonders gut **Membranen.** Sie sind dünne Häutchen wie das Trommelfell oder auch dünne Scheiben aus Eisen, Kohle oder anderen Werkstoffen. **Membranen besitzen** entweder **keine Eigenschwingung** oder eine, die nur einer tiefen Frequenz entspricht, und können durch Schallwellen in Schwingungen versetzt werden, in sogenannte **erzwungene Schwingungen.** Die bekanntesten **Schallempfänger** sind das **menschliche Ohr** und die **Mikrophone. Durch das Mikrophon wird die auftreffende Schallenergie in elektromagnetische Energie umgeformt,** die in der Fernmeldetechnik besondere Bedeutung erlangt hat, weil sie in einfacher Weise verstärkt werden kann.

fernmeldelehrling.de

Die vom Ohr aufgefangenen Schallwellen führen nicht in jedem Falle zu einer Schallempfindung. Die **Schallempfindung** erfolgt **nur,** wenn die **Frequenz der Schallwellen** zwischen **etwa 20 Hz und etwa 20000 Hz liegt.** Der Frequenzbereich, den das menschliche Ohr aufnehmen kann, wird jedoch im Alter schlechter; mit zunehmendem Alter werden Töne über 10000 Hz kaum noch wahrgenommen.

Schallwellen mit der **Frequenz oberhalb 20000 Hz** werden von Menschen nicht mehr gehört und als **Ultraschall** bezeichnet.

Die **Stärke des Schalles,** der unser Ohr trifft, ist von der **Energie der Schallwelle** abhängig. Die Schallstärke, die soeben noch eine **Lautempfindung** hervorruft, heißt **Reizschwelle oder Schwellenwert.** Die **Schallstärke** ist also von der Stärke der Empfindung, der **Lautstärke, zu unterscheiden. Die Lautstärke wächst langsamer als die Schallstärke;** wird die Schallstärke um das Zehn- bzw. Hundertfache verstärkt, wächst die Lautstärke nur auf den doppelten oder dreifachen Betrag an*).

Trifft eine Schallwelle, die von einem Schallsender bestimmter Eigenfrequenz ausgeht, auf einen Schallsender, einen Schallempfänger oder einen schwingfähigen Körper mit der gleichen Eigenfrequenz, versetzt sie diesen Körper ebenfalls in Schwingungen. Dieses **Mitschwingen** wird **Resonanz** genannt. Wird die Frequenz des Senders oder die Eigenfrequenz des Empfängers verändert, wird das Mitschwingen mehr oder weniger aufgehoben. Durch derartige **auf Resonanz abgestimmte Empfänger** können schwache Schallwellen bestimmter Frequenz wahrnehmbar gemacht werden.

19.4. Die Schallaufzeichnung

Schallwellen können aufgezeichnet oder gespeichert werden, wobei der zeitliche Schwingungsvorgang entweder **mechanisch** in den **Rillen einer Schallplatte, optisch** auf dem **Filmstreifen des Tonfilms** oder **magnetisch** auf **Stahldrähten** sowie **eisenhaltigen** oder ferromagnetischen **Bändern** festgehalten wird. Die erstarrte Form ist jederzeit wieder in die ursprüngliche Gestalt der Schallwellen umwandelbar.

19.5. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 19.

1. Was ist Schall? 2. Was ist ein Ton? 3. Was ist ein Geräusch? 4. Woraus entsteht ein Knall? 5. Wovon ist die Höhe eines Tones abhängig? 6. Was ist Frequenz? 7. Was ist ein Hertz? 8. Wovon ist die Lautstärke eines Tones abhängig? 9. Welche Einheit hat die Lautstärke? 10. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Luft? 11. Was ist ein Echo? 12. Wann entsteht ein Nachhall? 13. Wie groß ist der Hörbereich des menschlichen Ohres? 14. Welche Schallsender kennen Sie? 15. Welche Schallempfänger kennen Sie? 16. Welche Schallaufzeichnungsverfahren gibt es?

*) Schallstärke und Lautstärke stehen im „Logarithmischen Verhältnis".

20. Die Wärme

20.1. Wärmeempfindung, Temperatur und Temperaturmessung

Durch unser Gefühl können wir unterscheiden, ob ein Körper **warm** oder **kalt** ist. Dieses Urteil über den **Wärmegrad eines Körpers,** über **seine Temperatur,** ist jedoch ungenau und kann beträchtlichen Täuschungen unterworfen sein. Wir empfinden z. B. Wasser mit Zimmertemperatur als warm, wenn wir vorher die probende Hand in Eiswasser getaucht haben, dagegen das Wasser mit der gleichen Temperatur als kalt, wenn die Hand vorher in heißem Wasser war. Um ein **zuverlässiges Urteil über die Temperatur** eines Körpers zu erhalten, wird die **Veränderung eines Körpers bei Änderung des Wärmegrades** beobachtet. Von besonderer Bedeutung ist dabei die **Wärmeausdehnung der Körper.**

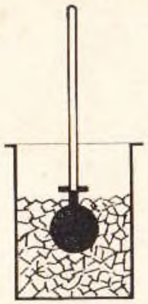
Fast alle Körper dehnen sich aus, wenn sie erwärmt werden, und ziehen sich zusammen, wenn sie sich abkühlen.

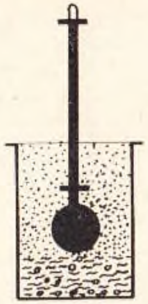
Temperaturen werden daher häufig **gemessen,** indem festgestellt wird, wie sich gewisse **Flüssigkeiten** unter dem Einfluß einer Temperaturänderung **ausdehnen oder zusammenziehen.** Flüssigkeiten werden zum Temperaturmessen verwendet, weil sie sich unter dem Einfluß einer Temperaturerhöhung wesentlich mehr ausdehnen als feste Stoffe und besser zu handhaben sind als Gase. Füllen wir eine Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, in eine Glaskugel, die sich nach oben in einer engen Glasröhre fortsetzt, können wir anhand der Flüssigkeitssäule die Volumenausdehnung ablesen. Ein solches Gerät ist ein **Thermometer.**

Die **Skalenteilung des Thermometers geht von zwei festen Punkten aus, dem Schmelzpunkt und dem Siedepunkt des Wassers.** Das Thermometer wird in schmelzendes Eis (Abb. 75a) und anschließend in siedendes Wasser (Abb. 75b) gesetzt, wobei der jeweilige Stand der Flüssigkeitssäule durch einen Strich am Glasrohr markiert wird (Abb. 75c). Die Temperaturen, bei denen Eis schmilzt und Wasser siedet, sind bei gleichen Druckverhältnissen stets dieselben. Bei der **Celsius-Skala** (Abb. 75c) ist der Abstand zwischen den beiden Markierungen (Schmelzpunkt und Siedepunkt) in hundert gleiche Teile eingeteilt. **Der Temperaturunterschied zwischen zwei Teilstrichen ist 1 Wärmegrad,** bei der Celsius-Skala **1 Grad Celsius** (1 °C).

Die Celsius-Skala ist heute fast ausschließlich üblich. Gelegentlich ist im Ausland noch die Skala Réaumur zu finden, bei der der Temperatur-

fernmeldelehrling.de

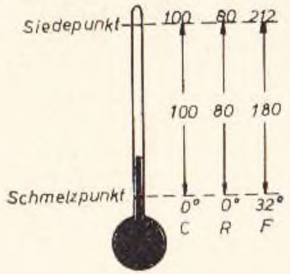

(Abb. 75a)


(Abb. 75b)

(Abb. 75c)

unterschied zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt in **80° R** eingeteilt ist (Abb. 104).

Bei der Skala nach Fahrenheit, die noch in Amerika und England verwendet wird, dient eine Kältemischung aus Eis und Salz zur Bestimmung des Nullpunktes. Der **Schmelzpunkt des Eises liegt bei der Fahrenheitskala bei 32° F und der Siedepunkt des Wassers bei 212° F** (Abb. 76).

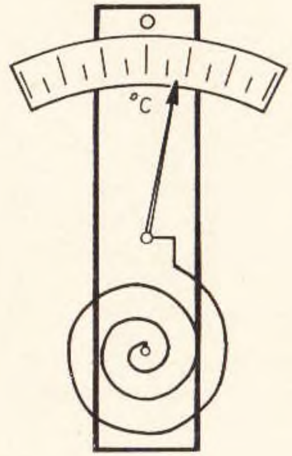


(Abb. 76)

Die gleichmäßige Teilung der Skala kann bei Bedarf unter dem Eispunkt (Minus-Grade) und über dem Siedepunkt fortgesetzt werden.

Bei allen Flüssigkeitsthermometern wird der **Temperaturmeßbereich bestimmt durch den Erstarrungs- und Siedepunkt der verwendeten Flüssigkeit,** weil durch die Zustandsänderung auch andere Volumenänderungen eintreten. So kann das gewöhnliche Quecksilberthermometer nur für Temperaturmessungen zwischen —39° C und +200° C angewandt werden. Neben den Flüssigkeitsthermometern, vor allem **oberhalb und unterhalb ihrer Meßbereiche,** werden **Bimetallthermometer, Thermoelemente, Widerstandsthermometer** und für sehr hohe Temperaturen **Strahlungsthermometer** benutzt. Beim Bimetallthermometer beruht die Temperaturmessung auf der verschieden großen Wärmeausdehnung von Metallen. Ein Bimetallstreifen besteht aus zwei (zwei = bi) Metallstreifen, die eine unterschiedliche Wärmeausdehnung haben und mechanisch

fest miteinander verbunden sind. Bei Erwärmung biegt sich daher der Bimetallstreifen durch. Die Durchbiegung ist ein Maß für die Temperatur, die durch einen Zeiger auf einer Skala angezeigt wird (Abb. 77). Je länger der Bimetallstreifen ist, um so größer wird die Durchbiegung und somit der Zeigerausschlag je Wärmeeinheit; damit ein möglichst großer Zeigerausschlag erzielt wird, ist der Bimetallstreifen zu einer Spirale aufgewickelt.



(Abb. 77)

(Abb. 78)

Thermoelemente bestehen aus zwei Streifen verschiedener Metalle; die beiden Streifen sind an einem Ende mechanisch miteinander verbunden (Abb. 78). Wird die Verbindungsstelle erhitzt oder abgekühlt, tritt zwischen den freien Enden der beiden Metallstreifen eine geringe elektrische Spannung auf, deren Größe von der Temperaturänderung abhängig ist. Die Enden der Metallstreifen sind mit einem empfindlichen Millivoltmeter verbunden, dessen Skala jedoch nicht in Millivolt, sondern in Grad Celsius (°C) geeicht ist.

Die Eigenschaft elektrischer Leiter, bei Temperaturänderung auch den elektrischen Widerstand zu ändern, wird beim **Widerstandsthermometer** ausgenutzt. Ein empfindliches Galvanometer zeigt die Stromänderung an, die bei konstanter Spannung infolge der Widerstandsänderung auftritt, die durch die Temperaturänderung hervorgerufen wird. Die Skala des Galvanometers ist ebenfalls in °C geeicht. Beim **Strahlungspyrometer**

fernmeldelehrling.de

wird die empfangene Strahlungswärme auf ein Thermoelement geleitet, das dadurch erwärmt wird und, wie bereits erläutert, die Temperatur anzeigt.

20.2. Absoluter Nullpunkt und absolute Temperatur

Im vorigen Abschnitt wurde gesagt, daß sich fast alle Stoffe ausdehnen, wenn sie erwärmt werden, und sich zusammenziehen, wenn sie sich abkühlen. Das trifft auch auf die gasförmigen Stoffe zu. Bei festen und flüssigen Stoffen ist der Ausdehnungskoëffizient*) eine echte Stoffkonstante, also von der Art des Stoffes abhängig und je Stoff verschieden. Dagegen ist der **Ausdehnungskoëffizient für alle Gase nahezu gleich groß; das Volumen aller Gase steigt je Grad Celsius Temperaturerhöhung fast um den gleichen Betrag.** Wird Gas unter gleichbleibendem Druck von 0° C auf 100° C erwärmt, steigt das Volumen von 100% (bei 0° C) auf 136,6% (bei 100° C), d.h. je 100° C nimmt das Volumen des Gases um 36,6% zu, je 1° C um $0{,}366\% = 0{,}00366 = \frac{366}{100\,000} = \frac{1}{273}$, bezogen auf das Volumen bei 0° C. Wird ein Gas abgekühlt, nimmt das Volumen – immer gleichbleibender Druck vorausgesetzt – je Grad Celsius um $\frac{1}{273}$ des Volumens bei 0° C ab.

Das bedeutet, daß **bei einer Temperatur von −273° C ein Gas keinen Raum mehr einnehmen würde;** diese Temperatur von **−273° C** wird als **der absolute Nullpunkt** bezeichnet.

Die Temperatur, die vom absoluten Nullpunkt an gezählt, also **auf den absoluten Nullpunkt bezogen** wird, ist **die absolute Temperatur** T.

Die absolute Temperatur wird in Grad Kelvin (°K) gemessen. Die Einheit „Grad Kelvin" ist dieselbe Einheit wie „Grad Celsius", beide Einheiten beziehen sich jedoch auf verschiedene Nullpunkte:

die **Grad Kelvin** werden auf den **absoluten Nullpunkt,**

die **Grad Celsius** auf den **Schmelzpunkt** des Eises bezogen.

Da der absolute Nullpunkt um −273° C niedriger als der Schmelzpunkt des Eises liegt, wird die **absolute Temperatur** T ermittelt aus der **Celsius-Temperatur** t **plus 273° C:**

$$\boxed{T = t + 273\,°\mathrm{C}}$$

*) Der Doppelpunkt über dem e ist ein Trema; das Trema besagt, daß das o und das e getrennt ausgesprochen werden sollen.

Besondere Bedeutung haben der absolute Nullpunkt und die absolute Temperatur bei der **Ausdehnung von Gasen und bei der Berechnung elektrischer Widerstände.** Der elektrische Widerstand von Leitern nimmt mit sinkender Temperatur sehr schnell ab und wird fast Null bei der absoluten Temperatur = −273° C. Der **Zustand elektrischer Leiter beim absoluten Nullpunkt** wird mit **Supraleitfähigkeit** bezeichnet. **Der absolute Nullpunkt,** die unterste Grenze der Temperatur, **wird niemals unterschritten noch erreicht werden können.**

20.3. Die Wärmemenge

Zwei Körper sind im sogenannten **thermischen Gleichgewicht,** wenn sie **dieselbe Temperatur** haben. Berühren sich beide Körper, hat keiner das Bestreben, die Temperatur zu ändern. Berühren sich aber zwei Körper verschiedener Temperatur, gibt der wärmere Körper **„Wärme"** an den kälteren ab. Dabei kühlt sich der wärmere Körper ab, während sich der kältere erwärmt, bis der thermische Gleichgewichtszustand hergestellt ist, d.h. bis beide Körper dieselbe Temperatur haben. **Bei** derartigen **Temperaturänderungen** durch Zufuhr oder Entzug von Wärme sind **Art und Menge der beteiligten Stoffe wesentlich.**

Die Wärmemenge ist der Energieinhalt bei bestimmter Temperatur.

Eine **Temperaturerhöhung** bei Wasser hängt z.B. von der **zugeführten Wärmemenge** Q und dem **Gewicht** G der Wassermenge ab.

Die Einheit der Wärmemenge ist die Kalorie (cal)$_a$ **1000 cal = 10^3 cal sind eine Kilokalorie (kcal).**

Eine Kalorie ist die Wärmemenge, die 1 g Wasser um 1° C (genau von 14,5 auf 15,5° C) **erwärmt.**

Durch Versuche wurde festgestellt, daß die Wärmemenge Q, die erforderlich ist, um 1 g eines Stoffes um 1° C zu erwärmen, bei jedem Stoff verschieden ist.

Die Wärmemenge, die ein Stoff je Gramm aufnehmen muß, damit seine Temperatur um 1° C steigt, wird die spezifische Wärme c **eines Stoffes genannt.** Die spezifische Wärme c wird in **Kalorien je Grad Celsius und je Gramm** $\left(\frac{\mathrm{cal}}{°\mathrm{C} \cdot \mathrm{g}}\right)$ oder in **Kilokalorien je Grad Celsius und je Kilogramm** $\left(\frac{\mathrm{kcal}}{°\mathrm{C} \cdot \mathrm{kg}}\right)$ gemessen. In nachstehender Tabelle ist die spezifische Wärme c einiger fester und flüssiger Stoffe angegeben:

fernmeldelehrling.de

Stoff	c in $\frac{\text{cal}}{{}^\circ\text{C} \cdot \text{g}}$
Wasser	1,0
Öl	0,45
Schwefelsäure	0,34
Aluminium	0,22
Nickel	0,11
Stahl	0,11
Konstantan	0,098
Kupfer	0,093
Silber	0,057
Quecksilber	0,033
Blei	0,031

Soll 1 g eines Stoffes um 1 °C erwärmt werden, sind nach der Tabelle c cal nötig.

Soll 1 g desselben Stoffes um eine Temperaturänderung von Δt*) erwärmt werden, wird eine Wärmemenge Q von $c \cdot \Delta t$ benötigt.

Es gilt allgemein:

$$Q = G \cdot c \cdot \Delta t \text{ [cal]}$$
$$Q = G \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \text{ [cal]}$$

Die zur Temperaturerhöhung notwendige Wärmemenge wird entweder einem anderen Körper entzogen oder durch **Energieumwandlung** erzeugt. So entsteht aus **1 kWh****) **elektrische Energie** eine **Wärmemenge von 860 kcal.** Wird **chemische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, entstehen durch Verbrennen von 1 kg Öl etwa 10000 kcal. Eine mechanische Energie von 427 mkg kann in eine Wärmemenge von 1 kcal umgewandelt werden.**

Beispiele:

Welche Wärmemenge ist notwendig, um 10 l Wasser von 15 °C auf 95 °C zu erwärmen?

10 l Wasser ≙ 10 kg Wasser;
c von Wasser = 1

$$\begin{aligned} Q &= G \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \\ &= 10 \cdot 1 \cdot (95 - 15) \\ &= 10 \cdot 1 \cdot 80 \\ Q &= \underline{\underline{800 \text{ kcal}}} \end{aligned}$$

Welche Wärmemenge nimmt ein 10 kg schweres Stahlstück von einer Ausgangstemperatur von 15 °C auf, wenn es auf 95 °C erhitzt werden soll?

c von Stahl = 0,11

$$\begin{aligned} Q &= G \cdot c \cdot \Delta t & \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 10 \cdot 0{,}11 \cdot 80 & \Delta t &= 95 - 15 = \underline{80\,^\circ\text{C}} \\ Q &= \underline{\underline{88 \text{ kcal}}} \end{aligned}$$

Wieviel *cal* sind notwendig, um einen Lötkolben aus Kupfer von 300 g Gewicht von 20 °C auf 320 °C zu erwärmen?

c von Kupfer = 0,093

$$\begin{aligned} Q &= G \cdot c \cdot \Delta t & \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= 300 \cdot 0{,}093 \cdot 300 & \Delta t &= 320 - 20 = \underline{300\,^\circ\text{C}} \\ Q &= \underline{\underline{8370 \textit{ cal} = 8{,}37 \text{ kcal}}} \end{aligned}$$

20.4. Wärme als Molekularbewegung

Der englische **Botaniker Brouwn** beobachtete 1827, daß sich sehr kleine Teilchen fester Körper in einer Flüssigkeit bewegen, und zwar um so schneller, je kleiner die Teilchen sind. Die kleinsten mechanischen Teilchen eines Stoffes sind die Moleküle. Daher ist festzustellen, daß sich diese Moleküle dauernd bewegen **(Molekularbewegung).** Jedoch unterscheiden sich die Molekularbewegungen fester, flüssiger und gasförmiger Körper wesentlich voneinander.

Die Wärme kann auch als Bewegungsenergie der Moleküle **(Energie der Molekularbewegung)** aufgefaßt werden. Da die Moleküle fester Körper – bedingt durch die herrschenden Kohäsionskräfte*) – ihren Platz jedoch nicht verändern können, schwingen sie um eine Gleichgewichtslage hin und her. Wird dem festen Körper **Wärme zugeführt,** erhalten die Moleküle eine **größere Bewegungsenergie,** sie schwingen daher weiter aus ihrer Gleichgewichtslage heraus, das **Gefüge** des Körpers **wird** dadurch **gelockert,** und **der Körper dehnt sich aus.**

Wird dem festen Körper immer mehr Wärme zugeführt, so wird die **Bewegungsenergie der Moleküle schließlich so groß,** daß die Moleküle **nicht mehr im Gleichgewicht** bleiben. Die Kohäsionskraft, die bis jetzt

*) Temperaturänderung Δt = Differenz zwischen Endtemperatur t_2 und Ausgangstemperatur t_1 ($\Delta t = t_2 - t_1$).

**) 1 kWh = eine Kilowattstunde (Einheit der elektrischen Arbeit).

*) Kohäsion – die Kraft, die die Moleküle eines Körpers zusammenhält; sie ist bei festen Körpern groß, bei flüssigen gering und bei Gasen kaum vorhanden.

fernmeldelehrling.de

die Moleküle in ihrer Gleichgewichtslage hielten, reichen nicht mehr aus, das feste Gefüge des Körpers aufrechtzuerhalten: **Der feste Körper wird flüssig.** Die Kohäsionskräfte sind gegenüber der Energie der Molekularbewegung nur noch in geringem Umfang wirksam; die Kohäsionskräfte erhalten der Flüssigkeit zwar noch ein bestimmtes Volumen, aber keine feste Gestalt mehr.

Bei weiterem **Temperaturanstieg** nimmt die Bewegungsenergie der Moleküle weiter zu. Die Geschwindigkeit der Moleküle ist unterschiedlich. **Sehr schnelle Moleküle durchstoßen die Flüssigkeitsoberfläche und entweichen nach außen: Die Flüssigkeit verdampft.** Die Dichte der Körper wird während der Wärmezufuhr immer geringer, die Kohäsionskräfte sind kaum noch wirksam, daher bleibt dem Körper auch ein bestimmtes Volumen nicht mehr erhalten: **Der flüssige Körper wird gasförmig.**

20.5. Ausdehnung der Körper beim Erwärmen

Alle Körper dehnen sich aus, wenn sie erwärmt werden, und ziehen sich zusammen, wenn sie sich abkühlen. Das Maß der Ausdehnung ist **abhängig** von der **Art des Stoffes** und von seinem **Aggregatzustand.**

Je nach der Form der Körper macht sich die **Volumenänderung** beim Erwärmen oder Abkühlen in einer Änderung der **Längen-, Flächen- oder Raumausdehnung** bemerkbar. In den folgenden Abschnitten soll die Volumenänderung der Körper in ihren drei Aggregatzuständen untersucht werden.

Die Ausdehnung fester Körper infolge Temperaturänderung ist im Vergleich zu flüssigen und gasförmigen Körpern gering. Die einzelnen Stoffe verhalten sich dabei jedoch verschieden. Der **Längenzuwachs,** den ein **Stab** eines bestimmten Stoffes von **1 m Länge** beim Erwärmen **von 0° C auf 1° C** erfährt, ist die **Längenausdehnungszahl** α oder der **Ausdehnungskoëffizient** α des Stoffes:

Ein Stab von 1 m Länge verlängert sich beim Erwärmen um 1° C um α m. Beträgt die Stablänge l m, dehnt sich der Stab beim Erwärmen um 1° C aus um

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot 1 \text{ [m]}$$

Wird der Stab von der Temperatur t_1 auf die Temperatur t_2 erwärmt, beträgt also der Temperaturunterschied

$$\Delta t = t_2 - t_1 \text{ [°C]}$$

ist die **Gesamtausdehnung:**

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta l &= l \cdot \alpha \cdot \Delta t \text{ [m]} \\ \Delta l &= l \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) \text{ [m]} \end{aligned}}$$

Innerhalb eines bestimmten Temperaturbereiches ist die **Ausdehnung eines Stabes** beim Erwärmen von 0° C ausgehend auf eine bestimmte Temperatur t_2 **der Temperaturzunahme proportional:**

Beim Abkühlen ist die Temperaturänderung Δt negativ einzusetzen. Der Stab verkürzt sich dann gegenüber der Ausgangslänge l:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad / \qquad t_1 < t_2$$
$$\Delta t = -(t_1 - t_2)$$

Δt **ist negativ**

Beim Abkühlen, d.h. bei negativer Temperaturänderung, **ist die Länge l_t des Stabes kleiner als die Ausgangslänge l.** Die Verlängerung oder Verkürzung infolge Temperaturänderung ist oft recht beträchtlich und darf nicht vernachlässigt werden. Freileitungen hängen z.B. im Sommer stark durch, im Winter dagegen können sie infolge der Verkürzung so straff gespannt sein, daß sie u.U. reißen. Auch bei Brücken, Eisenbahnschienen, Pendeluhren usw. muß die Dehnung durch Erwärmen beachtet werden. Sind Geräte aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzt, ist darauf zu achten, daß durch die verschiedenen Ausdehnungskoëffizienten keine Spannungen entstehen, die den Körper zerstören könnten.

In nachfolgender Tabelle sind die Längenausdehnungszahlen α für einige Stoffe zusammengestellt:

Längenausdehnungszahlen einiger Stoffe:

Stoff	α je °C
Hartgummi	0,000080
Aluminium	0,000024
Bronze	0,000018
Kupfer	0,000017
Zement	0,000014
Eisen, Stahl	0,000011
Platin	0,000009
Glas	0,000006
Holz	0,000003
Porzellan	0,000003

Beim Erwärmen dehnt sich ein fester Körper nicht nur in seiner Länge aus, sondern auch in seiner Breite und Höhe. **Die Fläche und das Volumen werden größer.**

fernmeldelehrling.de

Beispiele:

Eine Kupferleitung hat bei $t_1 = 10°$ C eine Länge $l = 500$ m. Wie groß ist die Längenausdehnung Δl bei $t_{21} = 30°$ C und bei $t_{22} = -20°$ C?

Lösung:

α für Kupfer $= 0{,}000017$

$$t_{21} = 30°\ \mathrm{C}$$
$$\Delta t_1 = t_{21} - t_1 = 30 - 10$$
$$\Delta t_1 = 20°\ \mathrm{C}$$
$$\Delta l_1 = l \cdot \alpha \cdot \Delta t_1 = 500 \cdot 0{,}000017 \cdot 20 = 0{,}0085 \cdot 20$$
$$\underline{\underline{\Delta l = 0{,}17\ \mathrm{m}}}$$

Die Verlängerung der Leitung beträgt 0,17 m = 17 cm

$$t_{22} = -20°\ \mathrm{C}$$
$$\Delta t_2 = t_{22} - t_1 = -20 - 10$$
$$\Delta t_2 = -30°\ \mathrm{C}$$
$$\Delta l_2 = l \cdot \alpha \cdot \Delta t_2 = 500 \cdot 0{,}000017 \cdot (-30) = 0{,}0085 \cdot (-30)$$
$$\underline{\underline{\Delta l = -0{,}255\ \mathrm{m}}}$$

Die Verkürzung der Leitung beträgt 0,255 m = 25,5 cm

Die Erde hat am Äquator einen Umfang von rund 40000 km. Ein um den Erdumfang gelegter Eisenring wird um $\Delta t = 1°$ C erwärmt. Wie weit steht der Ring jetzt von der Erdoberfläche ab?

Lösung:

α für Eisen $= 0{,}000011 = 11 \cdot 10^{-6}$

$$l = 40 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 40\,000\,000\ \mathrm{m}$$
$$\Delta t = 1°\mathrm{C}$$
$$l_t = l\,(1 + \alpha \cdot \Delta t) = 40 \cdot 10^6\,(1 + 0{,}000011 \cdot 1) = 40 \cdot 1{,}000011 \cdot 10^6$$
$$l_t = 40{,}00044 \cdot 10^6 = 40\,000\,440\ \mathrm{m}$$
$$U = 2\pi r$$
$$r = \frac{U}{2\pi}$$
$$r_k = \frac{U}{2\pi} = \frac{40\,000\,000}{6{,}28}$$
$$r_k = 6\,369\,426{,}75\ \mathrm{m}$$
$$r_w = \frac{U}{2\pi} = \frac{40\,000\,440}{6{,}28}$$
$$r_w = 6\,369\,496{,}81\ \mathrm{m}$$
$$\Delta r = r_w - r_k = 6\,369\,469{,}81 - 6\,369\,426{,}75$$
$$\underline{\underline{\Delta r = 70{,}06\ \mathrm{m}}}$$

Der Eisenring steht 70,06 m von der Erdoberfläche ab.

20.6. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 20.

1. Was ist Wärme? 2. Was ist die Temperatur? 3. Was ist 1° C? 4. Beschreiben Sie die Wirkungsweise des Thermoelements! 5. Was verstehen Sie unter absoluter Temperatur? 6. Was ist die Wärmemenge? 7. Was ist 1 kcal? 8. Was gibt die

spezifische Wärme an? 9. Wieviel kcal können durch 1 kWh erzeugt werden? 10. Wie wird die Längenausdehnung eines Stabes berechnet? 11. Was gibt die Längenausdehnungszahl an?

21. Die Stoffkunde

21.1. Aufgabe der Stoffkunde

Untersuchen der verschiedensten Stoffe hinsichtlich ihrer Bestandteile nach Art und Menge **(Analyse).**

Aufbau neuer Stoffe aus zwei oder mehreren Bestandteilen **(Synthese).**

Untersuchen der Eigenschaften und Veränderungen der Stoffe sowie der Ursachen hierfür.

21.2. Chemische Grundstoffe

21.2.1. Allgemeines

In den unzählig vielen verschiedenen Stoffen, die auf der Erde vorkommen, wurden 92 verschiedene Grundstoffe (Elemente) gefunden, die chemisch nicht weiter in andersartige Stoffe zerlegt werden können. Daneben ist es gelungen, eine Reihe weiterer Elemente (etwa 10) durch Atomumwandlung aufzubauen.

21.2.2. Atom und Molekül

Man nimmt an, daß jeder Körper aus unter sich gleichen Bausteinen besteht, deren Größe allerdings weit unter der Sichtbarkeitsgrenze liegt. Man nennt solche kleinsten Teilchen **Moleküle.** Die Kraft, welche die Moleküle eines Stoffes zusammenhält, nennt man **Kohäsion** (Zusammenhangskraft). Da alle Stoffe mit chemischen Mitteln in ihre Grundstoffe zerlegbar sind, muß das auch bei den Molekülen möglich sein. Die auf chemischem Wege erreichbaren Teile eines Moleküls nennt man **Atome.**

21.2.3. Chemische Zeichen

Man hat für jedes Element ein international geltendes Zeichen eingeführt, das aus ein oder zwei Buchstaben besteht und von dem wissenschaftlichen Namen abgeleitet wurde.

fernmeldelehrling.de

Deutscher Name	Wissensch. Name	Ordnungszahl	Chem. Zeichen
Wasserstoff	Hydrogenium	1	*H*
Kohlenstoff	Carboneum	6	*C*
Stickstoff	Nitrogenium	7	*N*
Sauerstoff	Oxygenium	8	*O*
Natrium	Natrium	11	*Na*
Aluminium	Aluminium	13	*Al*
Schwefel	Sulfur	16	*S*
Chlor	Chlorum	17	*Cl*
Kalium	Kalium	19	*K*
Kalzium	Calzium	20	*Ca*
Eisen	Ferrum	26	*Fe*
Kupfer	Cuprum	29	*Cu*
Silber	Argentum	47	*Ag*
Zinn	Stannum	50	*Sn*
Blei	Plumbum	82	*Pb*

21.3. Chemische Verbindungen

Die verschiedensten zusammengesetzten Stoffe (chemischen Verbindungen) sind aus den Grundstoffen nach bestimmten Gesetzen aufgebaut. Eine wesentliche Rolle beim Aufbau der Welt spielen allerdings nur etwa 20 Elemente.

Um auszudrücken, aus welchen Grundstoffen eine chemische Verbindung besteht, werden die Zeichen der Elemente, die an der Verbindung beteiligt sind, nebeneinandergesetzt. Die Anzahl der zu einem Molekül gehörenden Atome schreibt man dabei etwas tiefer als die Zeichen der Elemente.

Beispiele:

Wasser hat die Formel H_2O, d.h. ein Molekül Wasser besteht aus zwei Atomen Wasserstoff und einem Atom Sauerstoff.

Schwefelsäure hat die Formel H_2SO_4, d.h. ein Molekül Schwefelsäure besteht aus zwei Atomen Wasserstoff, einem Atom Schwefel und vier Atomen Sauerstoff.

Bei der chemischen Verbindung des Wassers verbinden sich stets 2 Atome Wasserstoff mit 1 Atom Sauerstoff. Wasserstoff wird als einwertig bezeichnet, weil es sich mit **einem** Atom Sauerstoff verbindet; Sauerstoff wird als zweiwertig bezeichnet, weil es sich mit **zwei** Atomen Wasserstoff verbindet. Die **Wertigkeit eines Stoffes** gibt also die Anzahl der Atome eines anderen Stoffes an, mit der sich der Stoff chemisch verbinden kann.

Die chemische Umwandlung von Stoffen wird **chemischer Prozeß** genannt. Solch ein chemischer Prozeß kann durch eine Gleichung dargestellt werden; z.B. bedeutet die Gleichung

$$HCl + NaOH = NaCl + H_2O$$

(andere Schreibweise $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$),

daß Salzsäure und Natronlauge durch einen chemischen Prozeß in Kochsalz und Wasser verwandelt werden. Die vor dem chemischen Prozeß vorhandenen Grundstoffe oder chemischen Verbindungen werden stets auf die linke Seite der Gleichung gesetzt. Auf der rechten Seite erscheinen die neu entstandenen Grundstoffe und Verbindungen.

Damit aus zwei oder mehreren Stoffen eine neue chemische Verbindung entsteht, müssen die Atome in den Molekülen durch äußere physikalische Einwirkungen gelockert werden (z.B. durch Licht, hohe Temperatur, elektrischen Strom).

Die Neigung der Stoffe, sich mit anderen Stoffen chemisch zu verbinden, ist bei verschiedenen Stoffen sehr unterschiedlich. Eisen z.B. verbindet sich wesentlich stärker mit dem Sauerstoff als es bei den Edelmetallen (Gold, Platin usw.) der Fall ist. Diese Neigung der Stoffe zueinander, untereinander eine chemische Verbindung einzugehen, wird **Affinität** (chemische Verwandtschaft) genannt. Die Affinität von Edelgasen ist z.B. Null (Unbrennbarkeit von Helium), weil sie sich mit keinem anderen Stoff und auch untereinander chemisch nicht verbinden.

Wasser ist eine der wichtigsten chemischen Verbindungen. Durch elektrischen Strom kann man Wasser, dem eine geringe Menge Salz, Säure oder Lauge zugesetzt wurde, in Wasserstoff und Sauerstoff zersetzen. Solche Flüssigkeiten, die durch den elektrischen Strom chemisch zersetzt werden, heißen **Elektrolyte.** Die durch den elektrischen Strom erzwungene Zersetzung von Flüssigkeiten wird **Elektrolyse** genannt.

Wasserstoff wird zum autogenen Schneiden, Schweißen und Löten verwendet. Mischt man Wasserstoff und Sauerstoff miteinander, so entsteht Knallgas, das bei Entzündung Temperaturen über 2000° C erzeugt. (Vgl. Azetylen – C_2H_2 – 3100° C und Propan – C_3H_8 – bis 2750° C.)

Sauerstoff hat die Eigenschaft, sich mit fast allen Elementen zu verbinden, d.h. die Affinität des Sauerstoffs ist sehr groß. Diesen Vorgang nennt man **Oxydation.** Die Verbindungen, die bei der Oxydation entstehen, nennt man **Oxyde.**

Reduktion ist das Gegenteil von Oxydation (Entziehen von Sauerstoff), z.B. Gewinnung von Eisen aus den Eisenerzen (das sind Eisenoxyde) im Hochofen:

Fe_2O_3	+	$3\,C$	=	$2\,Fe$	+	$3\,CO$
Eisenoxyd (Eisenerz)		Kohlenstoff (Koks)		Eisen (Metall)		Kohlenoxyd (Gichtgas)

fernmeldelehrling.de

Säuren sind saure ätzende Flüssigkeiten, von denen Metalle angegriffen bzw. aufgelöst werden. Sie entstehen durch Vereinigung von Nichtmetallen mit Wasserstoff. Sauerstoff kann hinzutreten. Blauer Lackmusfarbstoff wird durch Säuren rot gefärbt. Salzsäure (HCl), Schwefelsäure (H_2SO_4), Kohlensäure (H_2CO_3).

Laugen oder Basen sind seifige, ebenfalls ätzende Flüssigkeiten, die viele Stoffe zerstören. Es sind Verbindungen von (vor allem) Metallen mit Hydroxyl-(OH)Gruppen.

Roter Lackmusfarbstoff wird durch Laugen blau gefärbt. Natronlauge ($NaOH$), Kalilauge (KOH).

Salze entstehen, wenn man Säuren und Laugen zusammenbringt (Metall und Säurerest bilden das Salz).

21.4. Gemisch

Ein Gemisch (Gemenge) entsteht, wenn Moleküle von Stoffen zusammengebracht werden, ohne daß sie dabei eine chemische Verbindung eingehen (z.B. Kupferfeilspäne und Zinkfeilspäne, Edelgase untereinander usw.).

21.5. Legierungen

Legierungen entstehen, wenn man zwei oder mehrere Metalle zusammenschmilzt. Sie haben im Vergleich zu den unvermischten Bestandteilen andere Eigenschaften (größere Festigkeit, kleinerer Schmelzpunkt, größerer elektrischer Widerstand u.a.), z.B.

Weichlote (Legierung aus Blei und Zinn),
Bronzedraht (Legierung aus Kupfer und Zinn),
Konstantan (Legierung aus Kupfer und Nickel),
Woodsches Metall (Legierung aus Wismut, Blei, Kadmium, Zinn).

21.6. Wiederholungsfragen zum Abschnitt 21.

1. Was bedeutet Analyse? 2. Was ist eine Synthese? 3. Was ist ein Element? 4. Was ist eine Verbindung? 5. Was ist ein Gemenge? 6. Nennen Sie die chemischen Kurzzeichen von Kupfer, Eisen, Aluminium, Blei, Schwefelsäure, Sauerstoff und Wasserstoff! 7. Was ist eine Legierung? 8. Was bedeutet Affinität? 9. Was bedeutet die Wertigkeit eines Stoffes? 10. Was ist ein chemischer Prozeß? 11. Was ist das Kennzeichen für eine Säure? 12. Was ist das Kennzeichen einer Lauge? 13. Was geschieht, wenn Säuren und Laugen miteinander gemischt werden? 14. Was ist eine Oxydation? 15. Was ist eine Elektrolyse?

Band C 1 — **Werkstoffkunde und Werkstoffbearbeitung**
Werkstoffe der Fernmeldetechnik und ihre Bearbeitung — Werkzeuge und Werkzeugmaschinen — Werkstoffprüfung — Oberflächenschutz der Metalle — Nichtmetallische Werkstoffe — Isolierstoffe — Kunststoffe

Band C 2 — **Der oberirdische Linienbau**
FBG und FBZ im oberirdischen Linienbau — Planung und Bau oberirdischer Anschluß- und Fernlinien — Installationskabel und Luftkabel

Band C 3 — **Der unterirdische Linienbau**
Gestaltung der Fernmeldenetze — Fernmeldekabel — Aufgaben und Aufbau der Bauteile im Anschlußnetz — Schaltungen in Verzweigungseinrichtungen — Druckluftprüfeinrichtungen

Band C 4 — **Fernsprechapparate und Zusatzeinrichtungen**
Aufbau, Schaltung und Wirkungsweise der Fernsprechapparate und Zusatzeinrichtungen

Band C 5 — **Die Wählvermittlungstechnik**
Grundzüge der Wählvermittlungstechnik — Bauelemente und ihre Verwendung — Gliederung und Aufbau der Ortswählvermittlungen — Vorfeldeinrichtungen — Stromversorgung und Erdungsanlagen

Band C 6 (mit Beiheft) — **Die Nebenstellenanlagen**
Zweck der Nebenstellenanlagen — Baustufen — Stromversorgung — Schaltungsaufbau der kleinen Nebenstellenanlagen; Reihenanlagen und kleine Schrankanlagen — Grundaufbau der mittleren und großen Wählernebenstellenanlagen

Band C 7 — **Der Sprechstellenbau**
Bauauftrag — Einrichtungs- und Änderungsgebühren — Teilnehmereinrichtungen — Fernmeldebauzeug — Bauausführung

Umfang je Band rund 140 Seiten

Wichtig zur Vorbereitung
auf Eignungsfeststellungen und Prüfungen

Deutschlehre (mit Beiheft)
Rechtschreibung — Wortlehre — Satzlehre — Zeichensetzung — Stil- und Aufsatzkunde — Übungsaufgaben — Übungsdiktate — Lösungen
Umfang rund 200 Seiten — Preis 5,— DM

Rechenlehre
Rechnen — Raumlehre — Sortenverwandlung — Übungs- und Prüfungsaufgaben — Lösungsheft
Umfang rund 190 Seiten — Preis 3,50 DM

— Weitere Lehrbücher siehe 2. und 4. Umschlagseite —

fernmeldelehrling.de

Handbuch der Fernmeldetechnik *)

— Buchreihe BFt —

15 wichtige Lehr- und Lernwerke zur Vorbereitung auf den Grundlehrgang Ft 2, die verschiedenen Aufbaulehrgänge BFt und den Abschlußlehrgang BFt

Band A/B — **Allgemeine Berufskunde** (3 Teile)

Band G — **Grundlagen der Fernmeldetechnik** (2 Teile)

Band E — **Fachbereich Entstörungstechnik** (2 Teile)

Band L — **Fachbereich Linientechnik**

Band V — **Fachbereich Vermittlungstechnik** (3 Teile)

Band T — **Fachbereich Telegraphentechnik** (2 Teile)

Band Ü — **Fachbereich Übertragungstechnik**

Band Fu — **Fachbereich Funktechnik**

Umfang je Band etwa 180 Seiten

*) Frühere Bezeichnung „Handbuch für den mittleren fernmeldetechnischen Dienst"

— Weitere Lehrbücher siehe 2. und 3. Umschlagseite —

Sämtliche Lehrwerke können bestellt werden bei

Deutsche Postgewerkschaft, Verlag GmbH

6 Frankfurt — Savignystraße 29