Schüler-Hilfen

Die wichtigsten Formeln

aus der

Mathematik und Physik

zum Gebrauch an Gymnasien und Realschulen

zusammengestellt

von

Mathias Wagner,
Oberstudienrat in Würzburg

Dritte verbesserte Auflage.

Bamberg
C. C. Buchners Verlag
1928.

Algebra.

I. Die einfachsten Gleichungen 1. Grades.

a) Aus $x + a = b$ folgt $x = b - a$
$x - a = b$ ⟶ $x = b + a$
$a - x = b$ ⟶ $x = a - b$

b) Aus $x \cdot a = b$ folgt $x = b : a$
$x : a = b$ ⟶ $x = b \cdot a$
$a : x = b$ ⟶ $x = a : b$

II. Die vier Grundrechnungsarten.

a)

1. und 2. Art.	3. und 4. Art.
$a + (b + c) = a + b + c$	$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
$a + (b - c) = a + b - c$	$a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$
$a - (b + c) = a - b - c$	$a : (b \cdot c) = a : b : c$
$a - (b - c) = a - b + c$	$a : (b : c) = a : b \cdot c$

b) Regeln des Bruchrechnens.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x} \qquad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

c) Verbindung von vier Rechnungsarten

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$$
$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$$

$$(a \pm b) \cdot (c \pm d) = a \cdot c \pm a \cdot d \pm b \cdot c + b \cdot d$$
$$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a b + b^2$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 a^2 b + 3 a b^2 \pm b^3$$

Vorzeichenregel: $(+ a) \cdot (- b) = - a b$;
$(- a) \cdot (- b) = + a \cdot b$

d) Besondere Quotienten.

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - a \cdot b + b^2$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + a \cdot b + b^2$$

$\frac{a^n + b^n}{a + b}$ ist ohne Rest teilbar, wenn n eine ungerade Zahl ist.

$\frac{a^n - b^n}{a - b}$ ist ohne Rest teilbar für jede ganze Zahl n.

III. Die Proportionen.

a) Die Verhältnisgleichung (Proportion)

$$a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ist richtig, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

b) $\frac{a \pm b}{a \,(\text{oder})\, b} = \frac{c \pm d}{c \,(\text{oder}\ d)}$, $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$ sind wieder richtige Proportionen. (Summen- und Differenzensatz.)

c) Aus den zwei Proportionen $a : b = x : y$
und $b : c = y : z$

bildet man eine fortlaufende Proportion

$$a : b : c = x : y : z \quad \text{oder} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

IV. Arithmetisches und geometrisches Mittel.

a) Wenn $a - x = x - b$ ist, so heißt

$$x = \frac{a + b}{2}$$

das arithmetische Mittel zu a und b.

b) Wenn $a : x = x : b$ ist, so heißt

$$x = \sqrt{a \cdot b}$$

das geometrische Mittel zu a und b.

V. Die Gleichung zweiten Grades

in der Form $x^2 + px + q = 0$ wird ergänzt zu

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

und gibt aufgelöst

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$$

woraus $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ folgt, ferner $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

VI. Die 5 Potenzsätze. Die 4 Wurzelsätze.

1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
5) $(a^x)^y = a^{xy}$

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3) $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nx]{a^{px}}$
4) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

Definitionen: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$; $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt{-a}$ ist keine reelle Zahl (imaginär).

$\sqrt{-1} = i$, imaginäre Einheit, $i^2 = -1$.

VII. Die 4 Logarithmensätze.

Definition: ${}^{b}\!\log a = x$ heißt soviel als $b^x = a$.

1) $\log(a \cdot c) = \log a + \log c$
2) $\log\left(\frac{a}{c}\right) = \log a - \log c$
3) $\log(a^n) = n \cdot \log a$
4) $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$. Merke auch: ${}^{b}\!\log a = \frac{{}^{c}\!\log a}{{}^{c}\!\log b}$

Besondere Werte: ${}^{10}\!\log 1000 = 3$; $\log 1 = 0$;

${}^{10}\!\log 0{,}01 = -2$; $\log 0 = -\infty$.

VIII. Reihen, Zinseszins und Renten.

a) Für die arithmetische Reihe $(a, a + d, a + 2d \ldots)$ mit n Gliedern ist das letzte Glied $z = a + (n - 1) \cdot d$ und die Summe aller Glieder $s = n \cdot \frac{a + z}{2}$.

b) Für die geometrische Reihe $(a, aq, aq^2 \ldots)$ mit n Gliedern ist das letzte Glied $z = a \cdot q^{n-1}$ und die Summe aller Glieder $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (steigende Reihe)

oder $s = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ (fallende Reihe).

Für $|q| < 1$ und $n = \infty$ (fallende unendliche Reihe) bleibt $s = \frac{a}{1 - q}$ endlich.

c) Ein Kapital c erreicht mit Zinseszins zu $p\%$ in n Jahren den Schlußwert $s = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = c \cdot q^n$.

d) Eine jährliche Zahlung (Rente) r hat mit $p\%$ Zinseszins in n Jahren bei Nachzahlung den Schlußwert $s = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

und den Barwert (Kaufwert) $b = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

bei Vorauszahlung den Schlußwert $s = rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

und den Barwert (Kaufwert) $b = \frac{rq}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$q = 1 + \frac{p}{100}$

Planimetrie.

I. Der Satz des Pythagoras. Kathetensatz. Höhensatz.

Im rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten a und b sei h die Höhe auf die Hypotenuse c und

$\left.\begin{matrix}p\\q\end{matrix}\right\}$ die Projektion von $\left\{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ auf c, dann ist

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$a^2 = c \cdot p$; $b^2 = cq$; $h^2 = p \cdot q$.

Im beliebigen Dreieck mit den Seiten a, b, c sei p die Projektion von a auf b, dann ist

$c^2 = a^2 + b^2 - 2bp$ wenn $\gamma < 90^0$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2bp$ wenn $\gamma > 90^0$.

II. Flächenberechnung. In- und Umkreis des Dreiecks.

Fläche des Quadrates $= a^2$; Diagonale $= a\sqrt{2}$

des Rechtecks = Länge · Breite

des Parallelogramms = Grundlinie · Höhe

des Trapezes = Mittellinie · Höhe $= \frac{a + b}{2} \cdot h$; $(a \parallel b)$

des Dreiecks $= \frac{1}{2} \cdot$ Grundlinie · Höhe

Fläche des gleichseitigen $\triangle = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$; Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Heronische Formel: $\Delta = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

wenn $s = \frac{a + b + c}{2}$.

Radius des Umkreises $r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\Delta}$.

Radius des Inkreises $\varrho = \frac{\Delta}{s}$.

Radius eines Ankreises $\varrho_a = \frac{\Delta}{s - a}$.

III. Regelmäßige Vielecke. Kreis.

	Im Kreis von Radius r	um den Kreis
Seite des Vierecks	$= r\sqrt{2}$	$2r$
Achtecks	$= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$2r(\sqrt{2} - 1)$
Sechsecks	$= r$	$\frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{3}$
Zwölfecks	$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$2r \cdot (2 - \sqrt{3})$

Zehnecks $= \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ aus $r : x = x : (r - x)$;
($\sphericalangle 36^0$! Stetige Teilung von r; goldener Schnitt!)

Fünfecks: $= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Kreisumfang $= 2r\pi$; Kreisfläche $= r^2 \cdot \pi$

$\pi = 3{,}14159$.

Kreisbogen $= 2r\pi \cdot \frac{\gamma}{360^0}$ (γ Mittelpunktswinkel)

Fläche des Kreissektors $= \frac{1}{2}$ Bogen · Radius $= r^2\pi \frac{\gamma}{360^0}$.

Fläche des Ringsektors $= \frac{1}{2}$ Bogensumme · Bogenabstand

oder $= (R^2 - r^2)\pi \cdot \frac{\gamma}{360^0}$.

Stereometrie.

Oberflächen (O) und Rauminhalte (V) der wichtigsten Körper.

Würfel (Kante a)	$O = 6a^2$	$V = a^3$	Diagonale $= a\sqrt{3}$
Quader (Kanten a, b, c),	$O = 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$	$V = a \cdot b \cdot c$	Diag. $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Prisma	$O = 2 \cdot$ Grdfl. + Summe d. Seitenfl.	$V =$ Grdfl. · Höhe $= G \cdot h$	
Gerader Kreiszylinder (Radius r, Höhe h)	$O = 2 \cdot$ Grdfl. + Mantel $= 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h$	$V = r^2\pi \cdot h$	
Pyramide	$O = G +$ Summe der Seitendreiecke	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	
Tetraeder	$O = a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$	
Oktaeder	$O = 2a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	
Gerader Kreiskegel (Höhe h, Seitenlinie s)	$O = G +$ Mantel (Sektor) $= r^2\pi + r\pi s$	$V = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot h$	

Pyramidenstumpf	$O = G + g +$ Summe d. Seitenfl. (Trapeze)	$V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$
Kegelstumpf	$O = G + g$ + Mantel (Ringsektor) $= R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\pi s$	$V = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$
Kugelzone (Haube)	$O = 2r\pi h$ (r Kugelradius, h Zonenhöhe)	
Kugel	$O = 4r^2\pi$	$V = \frac{4}{3} r^3\pi$
Kugelsektor	$O =$ Kegelmantel + Kugelhaube	$V = \frac{1}{3}$ Haube · Kugelradius $= \frac{1}{3} \cdot 2r\pi h \cdot r$
Kugelsegment	$O =$ Kreis + Kugelhaube	$V =$ Kugelsektor − Kegel $= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$

Ebene Trigonometrie.

I. Die vier Funktionen eines Winkels zwischen 0° und 90°.

a) Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und dem spitzen Winkel α ist

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Anliegende Kathete}} = \frac{a}{b} = \text{cotg}\,(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{Anliegende Kathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} = \text{tang}\,(90^\circ - \alpha)$$

b) $\sin\alpha$ nimmt mit wachsendem α zu (von 0 bis 1),
$\text{tang}\,\alpha$ nimmt mit wachsendem α zu (von 0 bis ∞),
$\cos\alpha$ nimmt mit wachsendem α ab (von 1 bis 0),
$\text{cotg}\,\alpha$ nimmt mit wachsendem α ab (von ∞ bis 0).

c) Besondere Werte.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\text{tang}\,\alpha$	$\text{cotg}\,\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

II. Die vier Funktionen eines Winkels zwischen 90° und 360°.

a) Für $180^\circ > \alpha > 90^\circ$ (α im 2. Quadranten) ist

	Beispiel:
$\sin\alpha = +\sin(180^\circ - \alpha)$	$\sin 100^\circ = +\sin 80^\circ$
$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$	$\cos 115^\circ = -\cos 65^\circ$
$\text{tang}\,\alpha = -\text{tang}\,(180^\circ - \alpha)$	$\text{tang}\,148^\circ = -\text{tang}\,32^\circ$
$\text{cotg}\,\alpha = -\text{cotg}\,(180^\circ - \alpha)$	$\text{cotg}\,161^\circ = -\text{cotg}\,19^\circ$

b) Für $270^\circ > \alpha > 180^\circ$ (α im 3. Quadranten) ist

	Beispiel:
$\sin\alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ)$	$\sin 250^\circ = -\sin 70^\circ$
$\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180^\circ)$	$\cos 227^\circ = -\cos 47^\circ$
$\text{tang}\,\alpha = +\text{tang}\,(\alpha - 180^\circ)$	$\text{tang}\,205^\circ = +\text{tang}\,25^\circ$
$\text{cotg}\,\alpha = +\text{cotg}\,(\alpha - 180^\circ)$	$\text{cotg}\,194^\circ = +\text{cotg}\,14^\circ$

c) Für $360^\circ > \alpha > 270^\circ$ (α im 4. Quadranten) ist

	Beispiel:
$\sin\alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$	$\sin 320^\circ = -\sin 40^\circ$
$\cos\alpha = +\cos(360^\circ - \alpha)$	$\cos 291^\circ = +\cos 69^\circ$
$\text{tang}\,\alpha = -\text{tang}\,(360^\circ - \alpha)$	$\text{tang}\,343^\circ = -\text{tang}\,17^\circ$
$\text{cotg}\,\alpha = -\text{cotg}\,(360^\circ - \alpha)$	$\text{cotg}\,302^\circ = -\text{cotg}\,58^\circ$

d) Für negative Winkel (α mit verkehrtem Drehungssinn) ist

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\text{tang}\,(-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha$
$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$ $\quad$ $\text{cotg}\,(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

In all diesen Formeln treten nur Vorzeichenwechsel auf, die Funktion bleibt immer dieselbe.

e) Vorzeichenfolge in den 4 Quadranten.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\text{tang}\,\alpha$	$\text{cotg}\,\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	—	—	—
III	—	—	+	+
IV	—	+	—	—

III. Zusammenhangsgleichungen.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha; \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$$

$\text{tang}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha = 1$; $\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Pythagoräer!)

IV. Funktionen von Winkelsummen und Differenzen

a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$$

b) Für $\beta = \alpha$ wird $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}; \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}.$$

V. Summen und Differenzen von Funktionen.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (!)$$

VI. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

a) Gegeben 1 Seite und 2 Winkel
oder 2 Seiten und 1 gegenüberliegender Winkel.
Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

b) Gegeben 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel (a, b, γ).
Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$; daraus c!

oder Tangentensatz: $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

daraus $\alpha - \beta$; und $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$.

c) Gegeben 3 Seiten.

Kosinussatz: $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

oder Kotangentensatz: $$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

wenn $s = \frac{a+b+c}{2}$.

VII. Dreiecksfläche, Um- und Inkreis.

Dreiecksfläche: $$\triangle = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{bc}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{ca}{2}\sin\beta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$= \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Radius des Umkreises: $$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

Radius des Inkreises: $$\varrho = (s-a)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$$

$$= (s-b)\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = (s-c)\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}.$$

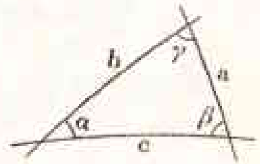
Sphärische Trigonometrie.

a, b, c seien die Kantenwinkel eines Dreikants oder die „Seiten" eines sphärischen Dreiecks.
α, β, γ seien die Flächenwinkel eines Dreikants oder die „Winkel" eines sphärischen Dreiecks.

I. Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

a) Der Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$
wird angewendet, wenn es sich um 2 Seiten und die 2 gegenüberliegenden Winkel handelt.

b) Der Cosinussatz für die Seiten
$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cdot\cos\alpha$
wird angewendet, wenn es sich um 3 Seiten und 1 Winkel handelt.



c) Der Cosinussatz für die Winkel

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cdot\cos a$$

wird angewendet, wenn es sich um 3 Winkel und 1 Seite handelt.

d) Der Kotangentensatz

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha$$

wird angewendet, wenn es sich um 4 aufeinanderfolgende Stücke (Seite, Winkel, Seite, Winkel) handelt.

Mathematische Geographie.

φ = Polhöhe oder geogr. Breite des Beob.-Ortes

$\left.\begin{array}{l} h = \text{südliche Kulminationshöhe} \\ \delta = \text{Deklination} \\ t = \text{Stundenwinkel} \\ a = \text{Azimut} \end{array}\right\}$ eines Gestirnes

Für südliche Breiten ist δ gegen den Südpol und h von Norden aus zu zählen.

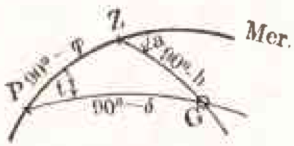
I. Kulmination der Gestirne.

$$h = 90^0 - \varphi + \delta.$$

Für $\delta \geq 90^0 - \varphi$ ist ein Stern zirkumpolar,
für $90^0 - \varphi \geq \delta \geq \varphi - 90^0$ geht er auf und unter,
für $\delta < \varphi - 90^0$ ist er unsichtbar.

Hat ein Zirkumpolarstern die nördlichen Kulminationshöhen h_1 und h_2, so ergibt sich $\varphi = \dfrac{h_1 + h_2}{2}$.

II. Beliebige Stellung eines Gestirnes.



Im sphärischen Dreieck Zenit-Pol-Gestirn sind die Seiten

$$ZP = 90^0 - \varphi$$
$$ZG = 90^0 - h$$
$$PG = 90^0 - \delta$$

Der Winkel bei P ist t, der Außenwinkel bei Z ist a.

III. Zeit und Ort des Auf- und Unterganges.

$$\cos t = -\operatorname{tang}\delta\cdot\operatorname{tang}\varphi$$

$$\cos a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

III. Zeitbestimmung.

Sternzeit = Rektaszension + Stundenwinkel[1]).

1^h mittl. So. Zeit $= (1^h + 9{,}856^s)$ Sternzeit,
1^h Sternzeit $= (1^h - 9{,}83^s)$ mittl. So. Zeit.

Mittlere Zeit = Wahre Zeit + Zeitgleichung $(m = w + z)$
Mitteleurop. E. Zeit = Mittlere Zeit $+ (15 - \lambda)\cdot 4^m$,
wenn λ die geogr. Länge des Ortes (in Grad) ist.

Analytische Geometrie.

I. a) Sind P_1 und P_2 **zwei Punkte** mit den rechtwinkl. Koord. x_1, y_1 und x_2, y_2 so ist ihr Abstand

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

b) Ist O der Achsenschnittpunkt, so wird

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 2\cdot\triangle OP_1P_2.$$

c) Ist $P_3(x_3, y_3)$ ein dritter Punkt, so wird

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 2\cdot\Delta P_1P_2P_3.$$

d) Teilt P_3 die Strecke P_1P_2 im Verhältnis

$$P_3P_1 : P_3P_2 = \lambda, \text{ so ist}$$

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

für $\lambda = +1$ wird P_3 die Mitte von P_1P_2
$\lambda = -1$ rückt P_3 ins Unendliche
$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ erhält man zwei harmonische Punkte zu P_1 und P_2.

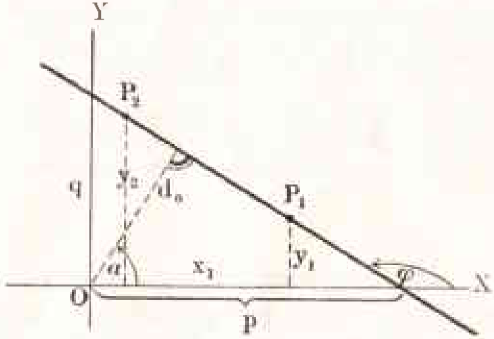
---

[1]) Die Rektaszension wird im Sinne der jährlichen Sonnenbewegung (vom Frühlingspunkte aus) positiv gezählt, der Stundenwinkel dagegen im Sinne der täglichen Sonnenbewegung (vom Meridian aus).

II. Die lineare Gleichung $ax + by + c = 0$ **stellt immer** eine Gerade dar. Besondere Formen dieser Gleichung sind

1) $y = x \cdot \operatorname{tang} \varphi + q$ | $\operatorname{tang} \varphi = -\frac{a}{b}$

2) $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$ | $p = -\frac{c}{a}$; $q = -\frac{c}{b}$



3) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \operatorname{tang} \varphi$ (1 Punkt und die Richtung gegeben)

4) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2 Punkte gegeben)

5) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d_0 = 0$ (Normalform)

$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $d_0 = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

c und $\sqrt{a^2 + b^2}$ haben ungleiches Vorzeichen!

Der Abstand des Punktes P_3 von der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d_0 = 0$ ist

$d_3 = x_3 \cos \alpha + y_3 \sin \alpha - d_0$

d_3 wird positiv, wenn die Gerade den Punkt P_3 von O trennt.

III. Zwei Geraden

$$\left.\begin{array}{l} y = x \operatorname{tang} \varphi_1 + q_1 \\ y = x \operatorname{tang} \varphi_2 + q_2 \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}\right.$$

sind parallel, wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ist,

senkrecht, wenn $\operatorname{tang} \varphi_1 \cdot \operatorname{tang} \varphi_2 = -1$ oder

$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{b_2}{a_2}$ ist.

Sie schneiden sich im allgemeinen unter dem Winkel $\pm \vartheta = \varphi_1 - \varphi_2$, wobei $\operatorname{tang} \vartheta = \pm \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$ wird.

Der Schnittpunkt $P_0 (x_0 y_0)$ der beiden Geraden genügt beiden Gleichungen $\left\{\begin{array}{l} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{array}\right.$

Durch ihn gehen alle Geraden von der Form

$(a_1 x + b_1 y + c_1) + \lambda (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$

(Büschelgleichung).

IV. a) **Der Kreis** mit Mittelpunkt O und Radius r hat die Gleichung $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

seine Tangente ist $x x_1 + y \cdot y_1 - r^2 = 0$

(Berührpunkt x_1, y_1).

b) **Der Kreis** mit den Mittelpunktskoord. x_0, y_0 hat die Gleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$

oder $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$,

wobei $A = -2x_0$; $B = -2y_0$

und $C = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ ist,

seine Tangente im Berührpunkt (x_1, y_1) ist

$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0) \cdot (y_1 - y_0) - r^2 = 0.$

c) Sind zwei Kreise durch ihre Gleichungen

$K_1 = x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$K_2 = x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

gegeben, so stellt jede Gleichung

$K_1 + \lambda K_2 = 0$

wieder einen Kreis dar (Büschelgleichung).

Für $\lambda = -1$ erhält man

$(A_1 - A_2) x + (B_1 - B_2) y + C_1 - C_2 = 0$

die Potenzlinie (Chordale) der beiden Kreise.

V. Die drei Kegelschnitte.

1. a) Gleichung der Ellipse auf die Hauptachsen bez.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$,

Brennpunktseigenschaft: $r_1 + r_2 = 2a$; $e^2 = a^2 - b^2$
$x = a \cos \lambda$; $y = b \sin \lambda$ Gleichung in Parameterform.

b) Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1)

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0.$$

c) Gleichung der Normalen im Punkte (x_1, y_1)

$$y - y_1 = \frac{a^2 \cdot y_1}{b^2 \cdot x_1} (x - x_1).$$

2. a) Gleichung der Hyperbel bez. auf die Hauptachsen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Brennpunktseigenschaft: $r_1 - r_2 = \pm 2a$; $e^2 = a^2 + b^2$

b) Gleichungen der Asymptoten

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

c) Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1)

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0.$$

d) Gleichung der Normalen im Punkte (x_1, y_1)

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

e) Gleichung der gleichseitigen Hyperbel bezogen auf die Asymptoten

$$x \cdot y = \frac{1}{2} a^2.$$

f) Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1)

$$x \cdot y_1 + y \cdot x_1 = \alpha^2$$

3. a) Scheitelgleichung der Parabel (Achse $\| X$)

$$y^2 = 2\,px.$$

b) Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1)

$$y \cdot y_1 = p\,(x + x_1).$$

c) Gleichung der Normalen im Punkte (x_1, y_1)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{y_1}{p}.$$

d) Die Funktion $y = x^2 + ax + b$ stellt immer eine Parabel dar, deren Achse parallel zu Y ist.

Infinitesimalrechnung.

I. Ist $y = a \cdot x^n$, so wird $\lim\limits_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = n \cdot a \cdot x^{n-1}$,

ist $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = 3 a x^2 + 2 b x + c,$$

ist $y = \sin x$, so wird $\frac{dy}{dx} = \cos x$,

ist $y = \cos x$, so wird $\frac{dy}{dx} = -\sin x$.

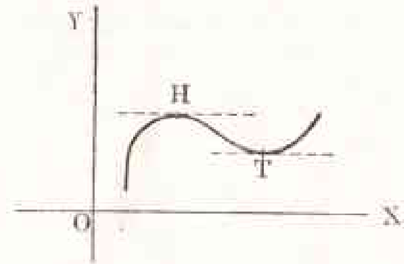
Die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkte (x_1, y_1) hat die Gleichung $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1}$.

II. In einem Punkte der Kurve, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist (wagrechte Tangente!), hat die Kurve $y = f(x)$ einen Tiefstwert, falls

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} > 0 \text{ ist},$$

einen Höchstwert, falls

$$\frac{d^2 y}{dx^2} < 0 \text{ ist}.$$



III. Ist $\frac{d\,f(x)}{dx} = \varphi(x)$, so wird $\int \varphi(x) \cdot dx = f(x) + C$.

Ist $y = a \cdot x^n$, so wird $\int a \cdot x^n \cdot dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$,
ist $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, so wird

$$\int y \cdot dx = \frac{a}{4} x^4 + \frac{b}{3} x^3 + \frac{c}{2} x^2 + d \cdot x + K,$$

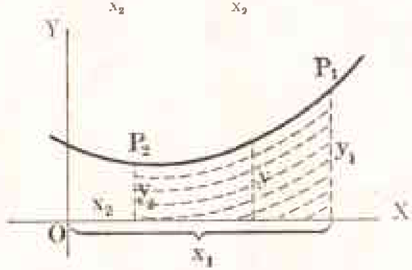
ist $y = \sin x$, so wird

$$\int y\, dx = \int \sin x \cdot dx = -\cos x + C,$$

ist $y = \cos x$, so wird $\int y\, dx = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$.

IV. Das Flächenstück zwischen dem Kurvenbogen $P_1 P_2$, der X-Achse und den Ordinaten y_1 und y_2 wird, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve ist,

$$F = \int_{x_2}^{x_1} y \cdot dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\, dx.$$



Das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des obigen Flächenstückes um die X-Achse entsteht, ist

$$V = \int_{x_2}^{x_1} y^2 \cdot \pi \cdot dx.$$

Physik.

I. Mechanik.

a) Einheit der Kraft 1 kg; absol. 1 Dyn $= \frac{1}{981}$ g
Einheit der Arbeit 1 mkg; absol. 1 Dyn · 1 cm = 1 Erg

Einheit des Effektes 1 P.S. $= \frac{75 \text{ mkg}}{\text{sec}}$;
absol. 1 Erg pro sec.

$$10^7 \text{ Erg} = 1 \text{ Watt.} = \frac{1}{9{,}81} \text{ mkg.}$$

b) Drei Kräfte P_1, P_2, P_3, die in einer Ebene in einem Punkte angreifen, sind im Gleichgewicht, wenn

$$\frac{P_1}{\sin(P_2 P_3)} = \frac{P_2}{\sin(P_3 P_1)} = \frac{P_3}{\sin(P_1 P_2)} \text{ ist.}$$

(Kräfteparallelogramm!)

c) Auf der schiefen Ebene vom Neigungswinkel α ist
Normaldruck = Last · $\cos \alpha$
Hangabtrieb = Last · $(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$
wenn μ der Reibungskoeffizient ist.

d) Spez. Gew. $= \frac{\text{Gew. (kg)}}{\text{Vol. (dm}^3)} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Auftrieb in Wasser}}$

e) Luftdruck pro qcm = Barometerhöhe (in cm) · 13,6 (gr).

II. Wärmelehre.

$$\left.\begin{array}{ll} l_t = l_0 (1 + \alpha t) & \text{Längen-} \\ F_t = F_0 (1 + 2\alpha t) & \text{Flächen-} \\ V_t = V_0 (1 + 3\alpha t) & \text{Raum-} \end{array}\right\}$$

Ausdehnung fester Körper bei Erwärmung. α Ausdehnungskoeffizient.

$V_t = V_0 (1 + \beta t)$ Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten, Wasser ausgenommen.

Ausdehnungskoeffizient aller Gase $\gamma = \frac{1}{273}$

$P.V = P_0 \cdot V_0 \left(1 + \frac{1}{273} \cdot t\right)$ Zustandsgleichung der Gase. (Gay-Lussac-Mariotte.)

1 Kalorie (kg-cal) = 424 mkg, Wärmeäquivalent.

III. Elektrizität.

a) $K = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ (Gesetz von Coulomb).

m_1 u. m_2 elektr. Ladungsmengen (oder magn. Polstärken), r Entfernung der Mittelpunkte (in cm). K in Dynen.

b) Einheit der Elektrizitätsmenge

1 Coulomb (C) $= 3 \cdot 10^9$ e. s. Lad. Einh.

Einheit der Spannung 1 Volt (V) $= \frac{1}{300}$ Erg.

Einheit der Stromstärke 1 Ampère (A), wenn 1 Coul. pro sec. durch den Querschnitt des Leiters fließt.

1 A scheidet pro min 7 cm^3 Wasserstoff oder 10,44 cm^3 Knallgas } normal oder $\frac{1}{50}$ g Kupfer aus.

Einheit des Widerstandes 1 Ohm (Ω) d. i. der Widerstand eines Quecksilberfadens von 1 mm^2 Querschnitt und 1,063 m Länge bei 0° C.

c) $\text{Stromstärke} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Widerstand}}\left(J = \frac{E}{R}, \text{Gesetz v. Ohm.}\right)$

$$\text{Widerstand eines Leiters} = c \cdot \frac{\text{Länge (in m)}}{\text{Querschnitt (in mm}^2\text{)}}$$

Der Gesamtwiderstand R einer Stromverzweigung genügt der Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$$

Stromwärme (in t Sek.) $= 0{,}24 \cdot J^2 \cdot R \cdot t$ (cal)

1 Volt $\cdot$ 1 Amp. $=$ 1 Watt $= \frac{1}{9{,}81}$ mkg (pro sec.)

IV. Akustik.

a) Für jede fortschreitende Wellenbewegung gilt die Glchg. Wellenlänge $\cdot$ Schwingungszahl $=$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder $\lambda \cdot n = v$, auch $\lambda = v \cdot T$

wobei $T = \frac{1}{n}$ die Dauer einer Schwingung ist.

b) Verhältnis der Schwingungszahlen für einfache Tonintervalle:

Prim : Terz : Quint : Oktave $= 4 : 5 : 6 : 8$.

V. Optik.

a) Beleuchtung der Flächeneinheit (cm^2) in der Entfernung r (m) von der Lichtquelle mit der Stärke J (Normalkerzen), wenn die Strahlen mit dem Lot zur Fläche den Winkel φ bilden:

$$B = \frac{J}{r^2} \cdot \cos\varphi \text{ (Meterkerzen).}$$

Photometerformel: $J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2$.

b) Wenn a die Gegenstandsweite, b die Bildweite, f die Brennweite bezeichnet, so gilt

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ für Hohlspiegel und Sammellinsen,

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$ für Konvexspiegel und Zerstreuungslinsen,

$\frac{\text{Gegenstand}}{\text{Bild}} = \frac{a}{b}$ für beides.

c) Vergrößerungsformeln:

$\text{Vergr.} = \frac{\text{Deutliche Sehweite}}{\text{Brennweite}} = \frac{25\text{ cm}}{f}$ für die Lupe,

$\text{Vergr.} = \frac{\text{Brennw. des Objektivs}}{\text{Brennw. des Okulars}} = \frac{f_1}{f_2}$ für die Fernrohre.

VI. Dynamik.

a) Gleichförmige Bewegung auf gerader (oder kreisförmiger) Bahn.

Weg $=$ Geschwindigkeit $\cdot$ Zeit

$$s = v \cdot t.$$

b) Gleichförmig beschleunigte Bewegung auf gerader Bahn, verursacht durch eine konstante Kraft.

$$\left.\begin{aligned} v &= at \\ s &= \frac{a}{2} t^2 \end{aligned}\right\} \text{ohne Anfangsgeschwindigkeit,}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 \pm at \\ s &= v_0 t \pm \frac{a}{2} t^2 \end{aligned}\right\} \text{mit Anfangsgeschwindigkeit.}$$

Durch Elimination der Zeit ergibt sich

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \pm ma \cdot s,$$

d. h. Gewinn an kinetischer Energie $=$ Verlust an potentieller E. und umgekehrt.

$$\text{Beschleunigung } a = \text{Kraft} : \text{Masse} = \frac{P}{m}.$$

$a = g = 9{,}81$ m pro sec beim freien Fall,
$a = 9{,}81 \cdot \sin\alpha$ auf der schiefen Ebene ohne Reibung,
$a = 9{,}81 (\sin\alpha \mp \mu \cdot \cos\alpha)$ „ „ mit Reibung, (abwärts bzw. aufwärts)

$a = 9{,}81 \cdot \dfrac{p}{p + 2q}$ bei der Fallmaschine Atwoods, (p Übergewicht, 2 q die bewegten Gewichte).

c) Schiefer Wurf (ohne Luftwiderstand), Elevation α. Rechtwinklige Koordinaten eines Bahnpunktes (y aufwärts gezählt)

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Komponenten der Bahngeschwindigkeit

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Gesamte Bahngeschwindigkeit $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Wurfhöhe $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; die zugehörige Zeit folgt aus

$$v_y = 0$$

Wurfweite $w = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; die zugehörige Zeit folgt aus

$$y = 0$$

Für den wagrechten Wurf ist $\alpha = 0$ zu setzen und y abwärts zu zählen.

d) Bei gleichförmiger Kreisbewegung (Geschw. v, Umlaufszeit T) ist die Schwungkraft (Zentrifugalkraft)

$$Z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \frac{4 r \pi^2}{T^2} = m \cdot 4 r \pi^2 \cdot n^2, \text{ wobei } n = \frac{1}{T} \text{ ist.}$$

e) Dauer der Halbschwingung eines Fadenpendels (Länge l)

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Länge des Sekundenpendels $L = \dfrac{g}{\pi^2}$.

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.