

RECHENLEHRE



RECHNEN – RAUMLEHRE SORTENVERWANDLUNG

ÜBUNGSAUFGABEN
ANGEWANDTE AUFGABEN
LÖSUNG SHEFT

VERLAG: DEUTSCHE POSTGEWERKSCHAFT-VERLAG GMBH.
6 FRANKFURT — SAVIGNYSTRASSE 29

Handbuch für den einfachen Postdienst

(zur Vorbereitung auf die Prüfung für den einfachen Postdienst)

6 wichtige und preiswerte Lehr- und Lernwerke für Pfarb, Pjb und PSchAw

- Band 1 a** — Postabgangs- und Posteingangsdienst
Postabgangsdienst; Postbeförderung, Leitbehelfe, Postumschlag; Brief-
eingangsdienst; Fragen und Antworten
- Band 1 b** — Der Zustelldienst
Die Zustellung der Postsendungen im allgemeinen; Tätigkeit vor Beginn
der Zustellung; Vorschriften über die Aushändigung von Postsendungen;
Zu- und Rückschritt; Fragen und Antworten
- Band 1 c** — Besondere Zustellvorschriften
Brief- und Geldzustellung; Paketzustellung; Telegramm- und Eilzu-
stellung- Landzustellung; Zeitungsgelder und Rundfunkgebühren;
Briefe mit ZU und Postaufträge; Fragen und Antworten
- Band 1 d** — Paketannahme — Eingangspackkammer — Paketausgabe — Prüfungs-
arbeiten
Paketannahmedienst; Packkammerdienst und Paketausgabeschalter;
Fingerzeige für das Anfertigen schriftlicher Prüfungsarbeiten; Muster-
ausarbeitungen; Fragen und Antworten
- Band 2** — Versandvorschriften und Formblattsammlung (mit Beiheft)
Versandvorschriften einschl. Gebührenkunde; Sonderbehandlungen
für Postsendungen; allgemeine Hinweise zum Anlegen der Formblatt-
sammlung und zu den einzelnen Formblättern; Fragen und Antworten
- Band 3** — Allgemeine Berufskunde und sonstiges Wissenswertes
Die Ausbildung im einfachen Postdienst; Die Prüfung für den einfachen
Postdienst; Allgemeine Berufskunde, und zwar
- | | |
|--|--|
| 1. Aufbau der DBP | 6. Arbeitsverhältnis der
Postfacharbeiter |
| 2. Postgesetz | 7. Folgen der Dienstpflicht-
verletzungen |
| 3. Haftung für Postsendungen | 8. Grundzüge des Staatsaufbaus |
| 4. Postgeheimnis und Amts-
verschwiegenheit | 9. Grundrechte und -pflichten
des Staatsbürgers |
| 5. Dienstverhältnis der
Postbeamten | 10. Posterkunde |
- Fragen und Antworten

Umfang je Band etwa 136 Seiten

Preis je Band 4,— DM

— Weitere Lehr- und Lernwerke siehe 3. und 4. Umschlagseite —

RECHENLEHRE



RECHNEN – RAUMLEHRE SORTENVERWANDLUNG

ÜBUNGSAUFGABEN
ANGEWANDTE AUFGABEN
LÖSUNG SHEFT

9. VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

VERLAG: DEUTSCHE POSTGEWERKSCHAFT-VERLAG GMBH.
6 FRANKFURT — SAVIGNYSTRASSE 29

HINWEIS

Der Band „Rechenlehre“ wird durch ein Lösungsheft ergänzt, das die Lösungen der gestellten Übungsaufgaben und angewandten Aufgaben enthält.

Die Fachschule der DPG e. V. hat zur fachlichen Weiterbildung der an ihrem beruflichen Fortkommen interessierten Postangehörigen zahlreiche fachliche Lehr- und Lernwerke herausgebracht, die aus der Praxis für die Praxis geschrieben worden sind. Über die wichtigsten dieser Lehrbücher, die sich allgemeiner Beliebtheit erfreuen, unterrichten Sie die Angaben auf der 2., 3. und 4. Umschlagseite. Nähere Auskunft über diese Lehr- und Lernmittel, die bei der Verlag GmbH in 6 Frankfurt, Savignystrasse 29, bestellt werden können, sowie über die verschiedenen Bundesfernlehrgänge erteilt Ihnen gerne:

Fachschule der DPG e. V.

28 **Bremen 1**

Bahnhofstr. 10

Druck: Juni 1963

Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

A. DAS RECHNEN

I. Allgemeines

Seite

6

II. Römische Zahlen

7

III. Ganze Zahlen und Brüche

8

1. Ganze Zahlen

8

2. Brüche

9

IV. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Zehnerbrüchen (Dezimalbrüchen)

13

1. Das Zuzählen oder Addieren

13

2. Das Abziehen oder Subtrahieren

18

3. Das Malnehmen oder Multiplizieren

22

4. Das Teilen oder Dividieren

27

5. Angewandte Aufgaben

32

V. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen

33

1. Einführung in die gewöhnliche Bruchrechnung

33

2. Primzahlen — zusammengesetzte Zahlen — Teilbarkeitsregeln

38

3. Der größte gemeinsame Teiler

39

4. Das kleinste gemeinsame Vielfache (Hauptnenner)

39

5. Das Zuzählen (Addieren) von gewöhnlichen Brüchen

42

6. Das Abziehen (Subtrahieren) von gewöhnlichen Brüchen

44

7. Das Malnehmen (Multiplizieren) von gewöhnlichen Brüchen

47

8. Das Teilen (Dividieren) von gewöhnlichen Brüchen

49

9. Angewandte Aufgaben

52

VI. Die Dreisatzrechnung

53

1. Der einfache Dreisatz mit geradem Verhältnis

54

2. Der einfache Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis

58

3. Der zusammengesetzte Dreisatz

60

4. Lösung der Dreisatzaufgaben nach der Formel

61

VII. Die Prozent- und Promillerechnung

66

1. Die Prozentrechnung

66

2. Die Promillerechnung

76

VIII. Die Brutto-, Netto-, Tararechnung

78

IX. Die Gewinn- und Verlustrechnung

78

X. Die Rabatt- und Skontorechnung

79

XI. Die Zins- und Diskontrechnung

80

XII. Die Verhältnis- und Gesellschaftsrechnung	Seite 93
XIII. Die Durchschnitts- und Mischungsrechnung	95
B. DIE RAUMLEHRE	99
I. Flächenberechnung	99
1. Grundbegriffe	99
2. Linien	99
3. Winkel	100
4. Geradlinige Flächen: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboid, Dreieck, Trapez, Trapezoid, Vieleck	101
5. Der Kreis	118
6. Das Quadratwurzelziehen	123
7. Der pythagoreische Lehrsatz	131
II. Körperberechnung	133
1. Der Würfel	133
2. Das Prisma	138
3. Die Walze	141
4. Die Pyramide	143
5. Der Kegel	145
6. Die Kugel	148
C. DIE SORTENVERWANDLUNG	
I. Maße, Gewichte und Münzen	150
1. Längenmaße	150
2. Flächenmaße	151
3. Körpermaße	151
4. Hohlmaße	152
5. Gewichte	152
6. Zählmaße	152
7. Papiermaße	153
8. Zeitmaße	153
9. Technische Maße	153
10. Münzen (Währungen)	154
II. Das Verwandeln der Maße und Gewichte	155
III. Übersicht über das metrische Maß- und Gewichtssystem	155

EINFÜHRUNG

Diese „Rechenlehre“ soll dem, der sich beruflich weiterbilden oder auf eine Eignungsfeststellung bzw. auf eine Fachprüfung vorbereiten will, die Möglichkeit geben, seine vorhandenen Kenntnisse wieder aufzufrischen und zu vertiefen. Das Buch will außerdem dem Fortgeschrittenen eine wertvolle Hilfe bei der Vervollkommenung seiner mathematischen Kenntnisse sein.

Das Buch ist so aufgebaut, daß es sowohl als Lehrbuch für den Unterricht in den Fachschulen als auch für den Selbstunterricht benutzt werden kann. Es umfaßt im einzelnen folgende Abschnitte:

Rechnen	Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, Zehnerbrüchen, gewöhnlichen Brüchen, Dreisatzrechnung, Prozentrechnung, Zinsrechnung usw.
Raumlehre	Flächen- und Körperberechnung
Sortenverwandlung	Maße, Gewichte und Münzen

Das sind im wesentlichen die Gebiete der Rechenlehre, deren Kenntnis von einem Volksschüler verlangt wird, der die Abschlußklasse erfolgreich besucht hat.

Für den Selbstunterricht ist das Buch besonders geeignet, da es die einzelnen Rechenarten klar, anschaulich und ausführlich behandelt und allgemeinverständlich erläutert. Eine große Zahl von Übungsaufgaben und angewandten Aufgaben ermöglicht es jedem, selbst festzustellen, inwieweit er die betreffende Rechnungsart verstanden hat. Besonders wertvoll wird das Buch dadurch, daß **die Lösungen sämtlicher Aufgaben** im beigelegten **Lösungsheft** enthalten sind. Zweckmäßig ist es, die Aufgaben auf einem Blatt Papier zu lösen und dann — anhand der Lösungen — zu überprüfen, ob die jeweilige Aufgabe richtig gelöst wurde.

Damit können sich alle Kolleginnen und Kollegen des einfachen und des mittleren Dienstes eingehend und umfassend auf eine bevorstehende Eignungsfeststellung bzw. Prüfung auf dem Gebiet der Rechenlehre vorbereiten.

A. DAS RECHNEN

I. Allgemeines

Wir rechnen nach dem **Zehnersystem**, d. h. nach einem Zahlensystem, bei dem sich alles auf die **Zahl 10** bezieht.

Man nennt diesen Zahlenaufbau auch **dekadisches Zahlensystem** (deka = 10fach).

Die Stellenwerte unserer Zahlen lauten von rechts nach links:

Einer (E), Zehner (Z), Hunderter (H), Tausender (T), Zehntausender (Zt), Hunderttausender (Ht), Millionen (M).

Über 1 Million hinaus gibt es noch:

10 Millionen

100 Millionen

1 000 Millionen oder 1 Milliarde

10 Milliarden

100 Milliarden

1 000 Milliarden oder 1 Billion

und weiter: 1 000 Billionen = 1 Billiarde

1 000 Billiarden = 1 Trillion

1 000 Trillionen = 1 Trilliard usw.

Diese großen Zahlen über Milliarden hinaus nennt man **astronomische Zahlen**; sie kommen im bürgerlichen Rechnen nicht vor.

10 Einheiten der niederen Ordnung bilden im Zehnersystem **1 Einheit der höheren Ordnung**; demnach sind

10 Einer = 1 Zehner

10 Zehner = 1 Hunderter

10 Hunderter = 1 Tausender

10 Tausender = 1 Zehntausender usw.

Man unterscheidet Ziffern und Zahlen.

Ziffern sind die Zeichen für die Zahlen **0 bis 9**.

Zahlen setzen sich aus Ziffern zusammen (z. B. 6453; 48,25).

Es gibt also unendlich **viele Zahlen**, aber nur **zehn Ziffern**.

Bei den Ziffern unterscheiden wir:

arabische Ziffern (1, 2, 3, 4, 5 usw.) und

römische Ziffern (I, II, III, IV, V) usw.

Die Schreibweise vielstelliger Zahlen

Ganze Zahlen mit mehr als vier Stellen werden **von rechts nach links** durch kleine Zwischenräume (nicht durch Punkte!) in **Dreiergruppen** aufgeteilt:

also: **4368795** (nicht: 4368795 und nicht: 4.368.795).

Diese Schreibweise erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das richtige Lesen der Zahlen.

Bei **Dezimalzahlen** werden die **Dezimalstellen** nach dem **Komma** nicht in **Dreiergruppen** aufgeteilt (z. B. 27,589214; 1418206,3124932).

Bei **Dezimalzahlen** werden die Dezimalstellen (die Brüche) von den ganzen Zahlen durch ein **Komma** (nicht durch einen Punkt) getrennt (z. B. 36,25 DM).

Volle Markbeträge schreibt man: 6 DM oder 6,00 DM oder 6,— DM.

Die Zahlen werden eingeteilt in

1. ganze Zahlen:	316	495	24519
2. Brüche, und zwar			
a) Dezimalbrüche:	0,75	3,68	12,346
b) gewöhnliche Brüche:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
3. unbenannte Zahlen:	367	1456	27495
4. benannte Zahlen:	8,25 DM	36,28 m	45,368 kg

Bei den **benannten Zahlen** bedeuten:

deka = 10fach,

hekto = 100fach,

kilo = 1000fach;

dezi = $\frac{1}{10}$,

zenti = $\frac{1}{100}$,

milli = $\frac{1}{1000}$.

Also: 1 Dekameter = 10 m; 1 Hektoliter = 100 l; 1 Kilogramm = 1000 g;

1 Dezimeter = $\frac{1}{10}$ m; 1 Zentiliter = $\frac{1}{100}$ l; 1 Milligramm = $\frac{1}{1000}$ g.

II. Römische Zahlen

Unsere Zahlen schreiben wir heute meist in **arabischen Ziffern**: 1, 2, 3, 4, 5 usw. Die arabischen Ziffern lernten die Europäer durch die Araber kennen, die sie gegen Ende des 9. Jahrhunderts von den Indern übernahmen.

Die alten Römer verwendeten sieben Zahlzeichen (Buchstaben), aus denen die **römischen Zahlen** zusammengestellt wurden. An Bauwerken, alten Stadttoren usw. finden wir häufig das Baujahr in römischen Zahlen angegeben, z. B. „A. D. MCDLVI“, d. h. Anno domini (im Jahre des Herrn) 1456. Auch die Dienstanzweisungen der DBP sind zum Teil mit römischen Zahlen bezeichnet, z. B. ADA V, 1; VIII, 1; VI, 3 A usw.

Die Schreibweise der römischen Zahlen

Man schreibt **römische Zahlen** mit **Buchstaben**:

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

Aus diesen sieben Zahlzeichen lassen sich Zahlen beliebig zusammenstellen.

Es bedeuten:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC			
16	17	18	19	20	30	40	50	60	70	80	90			
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M					
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000					

Merke:

1. Nebeneinandergestellte Zahlzeichen von gleichem Wert werden zusammengezählt:
XX = 20; CCC = 300;
2. Mehr als drei gleiche Zahlwerte dürfen nicht aufeinander folgen;
nicht: XXXX, sondern: XL; nicht: DCCC, sondern: CD;
3. Kleinere Zahlen rechts neben einer größeren werden zugezählt:
VI = 5 + 1 = 6; XV = 10 + 5 = 15; LX = 50 + 10 = 60;
CX = 100 + 10 = 110;
4. Kleinere Zahlen links neben einer größeren werden abgezogen:
IV = 5 - 1 = 4; XL = 50 - 10 = 40; IC = 100 - 1 = 99;
CM = 1000 - 100 = 900;
Links von der größeren Zahl darf nur eine kleinere Zahl stehen;
nicht: IXXX, sondern: XVIII;
5. Bei doppeldeutigen Zahlen verwendet man die kleinere Form:
nicht: XCIX (100 - 10 + 9 = 99), sondern: IC (100 - 1 = 99).

Beispiele:

$$\text{DCCLXVIII} = 768 \quad \text{MCDXCII} = 1492 \quad \text{MCMLXII} = 1962$$

Übungsaufgabe 1

Schreibe als römische Zahlen: 864, 1273, 1648, 1787, 1871, 1999.

III. Ganze Zahlen und Brüche

Man unterscheidet ganze Zahlen, Zehnerbrüche und gewöhnliche Brüche.

1. Ganze Zahlen

Der Wert einer Ziffer ist abhängig von der Stelle, an der sie innerhalb einer Zahl steht; wir nennen diesen Wert **Stellenwert**.

Stellenwerte der ganzen Zahlen

Millionen	Hundert-tausender	Zehn-tausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
7. Stelle	6. Stelle	5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle

Wir zerlegen in Stellenwerte:

$$24 = 4 \text{ Einer, } 2 \text{ Zehner}$$

$$436 = 6 \text{ Einer, } 3 \text{ Zehner, } 4 \text{ Hunderter}$$

$$2405328 = 8 \text{ Einer, } 2 \text{ Zehner, } 3 \text{ Hunderter, } 5 \text{ Tausender, } 0 \text{ Zehntausender, } 4 \text{ Hunderttausender, } 2 \text{ Millionen.}$$

Lies und gib die Stellenwerte folgender Zahlen an:

5364	967085	18960473
6204086004	638007340901	23406023198503

Übungsaufgabe 2

Schreibe folgende Zahlen mit Ziffern nieder:

siebentausendfünf; dreiundvierzigtausendsiebzehn; vierhundertzweitausendneunhundertacht; acht Millionen neuntausendfünfzig; vierzig Millionen achthundertsiebentausendvierunddreißig.

2. Brüche

Im täglichen Leben rechnet man nicht nur mit ganzen Zahlen, sondern auch mit Teilen von ganzen Zahlen, mit **Brüchen**. Diese können **Dezimalbrüche (Zehnerbrüche)** oder **gewöhnliche Brüche** sein.

a) Dezimalbrüche

Dezimalbrüche sind Brüche, deren Nenner durch eine 10, 100, 1000 usw. gebildet werden und ein **Komma** (nicht einen Punkt!) enthalten.

$$1,1 \quad 2,03 \quad 4,005$$

Links vom Komma stehen die **Ganzen**, rechts die Teile der Ganzen, die **Brüche**.

Der **Zähler** des Dezimalbruches kann jede beliebige Zahl sein.

Der **Nenner** wird nicht niedergeschrieben, sondern durch die Anzahl der Stellen rechts vom Komma bezeichnet.

Beim Lesen eines Dezimalbruches (3,75) liest man zuerst die **Ganzen** links vom Komma (3), dann die Zahl rechts vom Komma als **Zähler** (75), zum Schluß gibt die Anzahl der Stellen hinter dem Komma den **Nenner** des Dezimalbruches (Hundertstel) an;

$$\text{also: } 3,75 = \text{drei, fünfundsiebzig Hundertstel.}$$

Man kann den Dezimalbruch 3,75 auch lesen: **drei Komma sieben fünf**.

So wie die ganzen Zahlen werden auch die Dezimalbrüche nach dem **Zehnersystem** geordnet.

Stellenwerte der Zehnerbrüche

Komma						
Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	Zehn-tausendstel	Hundert-tausendstel	Millionstel
1. Stelle	1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle	5. Stelle	6. Stelle

Wir zerlegen in Stellenwerte

0,36 = 0 Einer, 3 Zehntel, 6 Hundertstel
 2,458 = 2 Einer, 4 Zehntel, 5 Hundertstel, 8 Tausendstel
 9,375186 = 9 Einer, 3 Zehntel, 7 Hundertstel, 5 Tausendstel, 1 Zehntausendstel, 8 Hunderttausendstel, 6 Millionstel

Merke:

Fehlt bei Dezimalzahlen ein Stellenwert (z. B. die Zehntel-Stelle bei 27,06), so wird an dessen Stelle eine 0 gesetzt. Fehlen die Ganzen (z. B. 0,25), so setzt man an deren Stelle ebenfalls eine 0.

Lies und gib die Stellenwerte folgender Dezimalzahlen an:

0,3	0,45	2,304	3,7025
5,00346	8,005904	6,008007	0,000003

Übungsaufgabe 3

Schreibe folgende Zahlen mit Ziffern nieder:

4 Zehntel; 25 Hundertstel; 604 Tausendstel; 23 Tausendstel; 465 Zehntausendstel; 627 Hunderttausendstel; 9 Millionstel.

Das Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen der Dezimalbrüche

Das Erweitern:

$0,4 \text{ km} = 0,40 \text{ km} = 0,400 \text{ km} = 0,4000 \text{ km}$ usw.

Regel:

Man erweitert einen Dezimalbruch, indem man Nullen anhängt, und zwar beliebig viele, der Wert ändert sich dadurch nicht.

Das Kürzen:

$0,4000 \text{ km} = 0,400 \text{ km} = 0,40 \text{ km} = 0,4 \text{ km}$

Regel:

Man kürzt einen Dezimalbruch, indem man Nullen abstreicht, der Wert ändert sich ebenfalls nicht.

Das Gleichnamigmachen:

$3,4 \text{ km} + 4,25 \text{ km} + 5,376 \text{ km} = 3,400 \text{ km} + 4,250 \text{ km} + 5,376 \text{ km}$

Regel:

Man macht Dezimalbrüche gleichnamig, indem man ihnen als Nenner die gleiche Anzahl der Stellen hinter dem Komma gibt.

Das Auf- und Abrunden der Dezimalbrüche

Das Aufrunden:

$4,6753 = 4,68$ $8,38264 = 8,383$

Im ersten Beispiel ist die erste weggelassene Ziffer eine 5, im zweiten eine 6; im ersten Beispiel wurde aus der 7 eine 8, im zweiten aus der 2 eine 3.

Merke:

Ist die erste weggelassene Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird die vorhergehende um 1 erhöht.

Das Abrunden:

$4,6735 = 4,67$ $8,38627 = 8,386$

Im ersten Beispiel ist die erste weggelassene Ziffer eine 3, im zweiten eine 2; die 7 und die 6 bleiben unverändert.

Merke:

Ist die erste weggelassene Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird die vorhergehende nicht erhöht.

Das Auf- oder Abrunden von Ergebnissen

Beim Rechnen werden Ergebnisse mit vielstelligen Dezimalbrüchen auf- oder abgerundet, und zwar:

DM-Beträge und Maße mit der Verwandlungszahl 100 auf 2 Stellen:

16,75 DM 6,15 m 5,36 qm 2,98 hl

Maße und Gewichte mit der Verwandlungszahl 1000 auf 3 Stellen:

23,465 km 14,375 kg 2,545 cbm 3,547 t

Siehe hierzu den Abschnitt „Sortenverwandlung“ sowie das Vorwort zum Lösungsheft!

Übungsaufgabe 4

a) Runde auf 2 Stellen ab oder auf!

7,368 DM	8,063 hl	3,406 ha	6,123 m ²
5,632 DM	4,709 hl	1,762 ha	9,407 m ²

b) Runde auf 3 Stellen ab oder auf!

3,4475 kg	7,20433 km	5,743806 m ²	2,164237 t
8,4132 kg	6,04216 km	4,068315 m ²	9,237906 t

b) Gewöhnliche Brüche

Gewöhnliche Brüche sind Zahlenteile, die einen **Bruchstrich** haben.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}$$

Sie bestehen aus 3 Teilen: aus einem **Zähler**, einem **Bruchstrich** und einem **Nenner**.

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 \quad \frac{2}{3} = 2 : 3 \quad \frac{3}{4} = 3 : 4$$

Der **Bruchstrich** ist für das **Teilungszeichen** (:) gesetzt und bedeutet ebenfalls: **geteilt durch**.

Die Zahl, die über dem Bruchstrich steht, heißt **Zähler**,
die Zahl, die unter dem Bruchstrich steht, heißt **Nenner**.

Merke:

Der **Zähler** steht über dem Bruchstrich und zählt die Bruchteile,
der **Nenner** steht unter dem Bruchstrich und benennt die Brüche.

Arten der gewöhnlichen Brüche

Man unterscheidet:

Scheinbrüche:

sie sind nur scheinbar Brüche
und haben den Wert von Ganzen;

$$\frac{2}{2} = 1 \quad \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{8}{4} = 2$$

Stammbrüche:

der Zähler ist immer 1;

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$$

echte Brüche:

ihr Wert ist kleiner als ein Ganzes;

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5}$$

unechte Brüche:

ihr Wert ist größer als ein Ganzes;

$$\frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{7}{4}$$

gleichnamige Brüche:

sie haben den gleichen Nenner;

$$\frac{2}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{8}$$

ungleichnamige Brüche:

sie haben ungleiche Nenner;

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6}$$

gemischte Zahlen:

sie bestehen aus Ganzen und Brüchen.

$$1\frac{2}{3} \quad 2\frac{3}{4} \quad 3\frac{4}{5}$$

IV. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Zehnerbrüchen (Dezimalbrüchen)

1. Das Zuzählen oder Addieren (Die Addition)

$$\begin{array}{r} 2384 \\ + 1476 \\ \hline 3860 \end{array}$$

Posten	oder	Summand
+ Posten		+ Summand
= Summe		= Summe

Zahlen, die zugezählt werden sollen, nennt man **Posten** oder **Summanden**.

Das Ergebnis bezeichnet man mit **Summe**.

Das Zeichen für das Zuzählen ist das **Pluszeichen** (+).

$$9 + 6 + 5 = 20$$

$$6 + 5 + 9 = 20$$

$$5 + 6 + 9 = 20$$

Merke:

Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

a) Das Rechnen mit ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen

Beispiele:

35982	15,64 DM
6409	8,27 DM
346	34,06 DM
5021	7,63 DM
46564	24,18 DM
7328	17,32 DM
<u>101650</u>	<u>107,10 DM</u>

Merke:

Schreibe deutliche Ziffern!

Schreibe die Zahlen genau untereinander!

Einer unter Einer usw.

Zehntel unter Zehntel usw.

Komma unter Komma!

Bilde Zahlengruppen zu je drei Stellen!

23456; 468395; 6235748.

Das Zuzählen von ganzen Zahlen

Erklärung des 1. Beispiels :

Wir addieren von unten nach oben zuerst die Einer:

$$8 + 4 + 1 + 6 + 9 + 2 = 30 \text{ Einer (3 Z, 0 E).}$$

Die 0 Einer schreiben wir als Ergebnis unter die Einerreihe;

die 3 Zehner merken wir bei den Zehnern vor und addieren:

$$3 + 2 + 6 + 2 + 4 + 0 + 8 = 25 \text{ Zehner (2 H, 5 Z).}$$

Die 5 Zehner schreiben wir als Ergebnis unter die Zehnerreihe;

die 2 Hunderter merken wir bei den Hundertern vor und addieren:

$$2 + 3 + 5 + 0 + 3 + 4 + 9 = 26 \text{ Hunderter (2 T, 6 H).}$$

Das Addieren der Tausender usw. geschieht dann in gleicher Weise, bis das Ergebnis 101 650 feststeht.

Das Zuzählen von Dezimalbrüchen

Erklärung des 2. Beispiels:

Dezimalbrüche werden wie ganze Zahlen zugezählt.

Wir schreiben die Dezimalbrüche richtig untereinander:

Komma unter Komma!

Wir addieren in der gleichen Weise wie bei ganzen Zahlen:

zuerst die Hundertstel, dann die Zehntel, die Einer und die Zehner, bis das Ergebnis 107,10 DM feststeht.

Merke:

Beim Zuzählen von Dezimalbrüchen muß auch im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

b) Die Längs- und die Queraddition

Wir unterscheiden eine **Längs-** und eine **Queraddition**.

Bei der **Längsaddition** stehen die **Posten untereinander**,

bei der **Queraddition** stehen sie **nebeneinander**.

Probe einer Längs- und Queraddition:

				Summe
6436	5084	2384	4560	18464
2027	1203	4506	3025	10761
4308	3475	1087	2406	11276
3570	2860	3450	5870	15750
5683	3027	5879	2346	16935
Summe:	22024	15649	17306	18207
				<u><u>73186</u></u>

Erklärung:

Wie errechnen zuerst die vier **Längssummen**.

Dann errechnen wir die fünf **Quersummen**.

Zum Schluß addieren wir die **Längs-** und die **Quersummen**.

Merke:

Die Summe der Längsadditionen ist gleich der Summe der Queradditionen.

c) Das Rechnen mit Rechenvorteilen

Beim Zuzählen fassen wir zwei oder mehrere Zahlen zu „Zehnerpäckchen“ zusammen:

$$3 + 4 + 6 + 5 + 8 + 4 + 2 + 9 + 6 + 3 + 1 + 7 = 58$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{3+4} & \boxed{6+5} & \boxed{8+4} \\ \hline 4+6=10 & 8+2=10 & 6+3+1=10 \\ \hline \end{array}$$

Wir rechnen nun:

$$3 + 10 + 5 + 10 + 4 + 9 + 10 + 7 = 58$$

Fasse ebenso bei senkrechten Additionen zu „Zehnerpäckchen“ zusammen!

d) Rechenproben beim Zuzählen

Um festzustellen, ob wir auch richtig gerechnet haben, machen wir **beim schriftlichen Rechnen** stets eine **Probe**.

Die Additionsprobe:

Bei **Längsadditionen** rechnen wir einmal **von unten nach oben** und einmal in umgekehrter Richtung **von oben nach unten**. Kommen wir dabei zu demselben Ergebnis, so dürfen wir annehmen, daß das Ergebnis richtig ist.

Die Stellenwertprobe:

3486		
2705	Summe der Einer	= 28
4673	Summe der Zehner	= 30
5879	Summe der Hunderter	= 26
6185	Summe der Tausender	= 20
<u>22928</u>		<u>22928</u>

Erklärung der Stellenwertprobe:

Wir schreiben die **Summen** der Einer, Zehner, Hunderter und Tausender in der vorstehenden Form **untereinander** und **addieren** die Summen. Wir müssen dann zu demselben Ergebnis kommen wie bei der üblichen Addition.

Die Neunerprobe:

7823602	Quersumme = 28	Neunerrest = 1	} = 6
+ 6758913	Quersumme = 39	+ Neunerrest = 3	
+ 2875862	Quersumme = 38	+ Neunerrest = 2	
<u>17458377</u>	Quersumme = 42	Neunerrest = 6	
8489265	Quersumme = 42	Neunerrest = 6	} = 13
+ 3764124	Quersumme = 27	+ Neunerrest = 0	
+ 5238709	Quersumme = 34	+ Neunerrest = 7	
<u>17492098</u>	Quersumme = 40	Neunerrest = 4	= Neunerrest 4

Erklärung der Neunerprobe:

Wir suchen zunächst die **Quersumme** und den **Neunerrest** der Summanden.

Man findet die **Quersumme** einer Zahl, indem man, ohne auf den Stellenwert zu achten, die einzelnen **Ziffern** der Zahl **zusammenzählt**,

$$\text{z. B. } 7259136 = 7 + 2 + 5 + 9 + 1 + 3 + 6 = 33$$

Man findet den Neunerrest, indem man die Quersumme durch 9 teilt:
also $33: 9 = 3$, Rest 6.

Merke:

Den Rest, der beim Teilen einer Zahl durch 9 übrigbleibt, nennt man den Neunerrest.

Der Neunerrest kann auch 0 sein, z. B. $87534 = \text{Quersumme } 27 = \text{Neunerrest } 0$.

Vereinfachtes Errechnen des Neunerrestes

Das Errechnen des Neunerrestes wird einfacher, wenn man **jede 9** der Zahl und auch die Zahlen, die **zusammen 9** ergeben, austreicht:

Beispiel: Der Neunerrest von 7259136 ist 6.

Wir streichen die 7 und die 2, die zusammen 9 ergeben, aus.

Wir streichen die 9 aus.

Wir streichen die 3 und die 6, die zusammen 9 ergeben, aus.

Nun verbleiben noch 5 und 1.

Die Summe von $5 + 1$ ergibt den **Neunerrest 6**.

Rechenvorgang bei der Neunerprobe

Wir suchen zunächst die **Quersumme** und den **Neunerrest** der Summanden.

Im ersten Beispiel ist die Summe der Neunerreste $(1 + 3 + 2) = 6$.

Dieser Neunerrest (6) muß gleich dem Neunerrest der Summe (6) sein.

Im zweiten Beispiel ist die Summe der Neunerreste $(6 + 0 + 7) = 13$, und der Neunerrest von 13 ist 4.

Dieser Neunerrest (4) muß gleich dem Neunerrest der Summe (4) sein.

Merke:

Die Neunerreste der Summanden sind zusammen gleich dem Neunerrest der Summe.

Zusammenfassung:

Die umständliche **Neunerprobe** beim **Zuzählen** ist nur als Vorbereitung für die beim schriftlichen Malnehmen und Teilen gebräuchliche Neunerprobe gedacht.

Von den drei Proben beim schriftlichen Zuzählen ist die **Additionsprobe** die einfachste und zweckmäßigste.

e) Das Zuzählen von benannten Zahlen mit gleicher Benennung

Benannte Zahlen mit gleicher Benennung werden nach der Regel:

Komma unter Komma! Benennung unter Benennung!

untereinandergeschrieben und zusammengezählt.

Übungsaufgabe 5

Setze die waagerechten Zahlenreihen untereinander und addiere:

- a) $2364 \text{ DM} + 725 \text{ DM} + 1043 \text{ DM} + 64 \text{ DM} + 308 \text{ DM} + 2370 \text{ DM} =$
- b) $3207 \text{ m} + 1025 \text{ m} + 673 \text{ m} + 2008 \text{ m} + 75 \text{ m} + 840 \text{ m} =$
- c) $384,20 \text{ DM} + 76,45 \text{ DM} + 3,92 \text{ DM} + 406,30 \text{ DM} + 17,03 \text{ DM} =$
- d) $234,376 \text{ km} + 75,083 \text{ km} + 104,309 \text{ km} + 16,003 \text{ km} + 317,385 \text{ km} =$

f) Das Zuzählen von benannten Zahlen mit ungleicher Benennung

Benannte Zahlen mit ungleicher Benennung kann man erst zusammenzählen, wenn man die **ungleichen Benennungen in gleiche Benennungen umgewandelt** hat. Dieses Umwandeln von Sorten nennt man **Sortenverwandlung**.

Im Abschnitt „Sortenverwandlung“ sind die verschiedenen Sorten:

Maße, Gewichte und Münzen aufgezeigt, und es wird erklärt, wie man bei **Längen-, Flächen-, Hohl-, Körper- und Zählmaßen** sowie bei **Gewichten größere Einheiten in kleinere** und umgekehrt **kleinere Einheiten in größere** verwandelt.

Dieser Abschnitt „Sortenverwandlung“ muß zunächst gründlich durchgearbeitet werden, da Aufgaben mit Sortenverwandlungen in allen bürgerlichen Rechnungsarten vorkommen.

Wenn die Übungen und Aufgaben des Abschnitts „Sortenverwandlung“ fließend gerechnet werden können, dann machen auch die folgende **Übungsaufgabe 6** und die vielen **angewandten Aufgaben** des Rechenbuches, in denen **ungleiche Benennungen** vorkommen, keine Schwierigkeiten mehr.

Übungsaufgabe 6

Verwandle die ungleichen Benennungen in gleiche Benennungen, setze die waagerechten Zahlenreihen untereinander und addiere:

- a) $15,40 \text{ DM} + 35 \text{ Pfg} + 327 \text{ DM} + 4 \text{ DM } 60 \text{ Pfg} + 8 \text{ Pfg} + 23,07 \text{ DM} =$
- b) $3,45 \text{ m} + 76 \text{ cm} + 45 \text{ dm} + 227 \text{ m } 16 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 123 \text{ dm} =$
- c) $24,70 \text{ ha} + 225 \text{ qm} + 37 \text{ a} + 43,5 \text{ ha} + 375 \text{ a} + 304 \text{ qm} =$
- d) $35,720 \text{ km} + 750 \text{ m} + 6,809 \text{ km} + 63 \text{ m} + 124,023 \text{ km} + 9 \text{ m} =$
- e) $4,8 \text{ m}^3 + 675 \text{ dm}^3 + 59,3 \text{ m}^3 + 305 \text{ dm}^3 + 23,076 \text{ m}^3 =$
- f) $7,348 \text{ t} + 17 \text{ kg} + 600 \text{ kg} + 8,03 \text{ dz} + 0,40 \text{ t} + 1503 \text{ kg} =$

Angewandte Aufgaben

7. Bei einem Postamt betragen die Postspareinlagen:

an Schalter I	3046,60 DM,	an Schalter II	2940,07 DM,
an Schalter III	2970,23 DM,	an Schalter IV	3008,40 DM.

Wie hoch ist die Summe der Spareinlagen?

8. Vier versiegelte Wertpakete wiegen 12,300 kg, 14,675 kg, 8,750 kg und 6,800 kg. Wieviel beträgt das Gesamtgewicht?

9. Ein Bote liefert am Postschalter ein: 3 Postanweisungen zu 18,75 DM, 56,20 DM und 124,65 DM und 4 Zahlkarten zu 19,45 DM, 74,80 DM, 123,75 DM und 576,40 DM. Die Gebühren betragen: 50, 80, 100, 30, 40, 50 und 60 Pfennig. Wie hoch ist der Gesamtbetrag?

10. Laut Frachtbrief wiegen 6 Kisten: 23,450 kg, 28,675 kg, 18,400 kg, 32,600 kg, 26,750 kg, 23,875 kg. Berechne das Gesamtgewicht!
11. Die Tageseinnahmen eines Kaufmannes betragen: 324,56 DM, 346,23 DM, 298,04 DM, 284,16 DM, 318,79 DM, 356,40 DM. Wie groß ist die Wocheneinnahme?
12. Eine Großhandlung liefert an ein Feinkostgeschäft für 568,70 DM Kolonialwaren, für 674,25 DM Konserven, für 363,35 DM Fleisch- und Wurstwaren, für 195,20 DM Butter und Käse und für 282,95 DM Delikatessen. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?
13. Für die Erweiterung eines Gebäudes wurden in Rechnung gestellt für:
- | | | | |
|----------------|-------------|-----------------|-------------|
| Erdarbeiten | 570,45 DM | den Maurer | 6 207,75 DM |
| den Zimmerer | 2 354,25 DM | den Dachdecker | 750,68 DM |
| den Schlosser | 675,17 DM | den Schreiner | 1 263,05 DM |
| den Klempner | 403,08 DM | den Anstreicher | 670,38 DM |
| den Elektriker | 475,00 DM | Verschiedenes | 1 903,50 DM |
- Wieviel betragen die Gesamtkosten?
14. Bei einer Vermögensaufstellung erscheinen folgende Vermögensteile: Kassenbestand 3 407,35 DM, Warenbestand 125 008,75 DM, Bankguthaben 37 560,40 DM, Außenstände 14 239,65 DM, Wertpapiere 46 349,00 DM, Wechsel 12 304,25 DM. Errechne die Gesamtsumme!
15. Jemand kauft ein: 1 Oberhemd 22,90 DM, 2 Sporthemden zu je 16,90 DM, 3 Garnituren Unterwäsche zu je 8,25 DM, 2 Paar Strümpfe zu je 6,20 DM, 4 Paar Socken zu je 3,65 DM, 1 Binder 4,90 DM. Stelle den Kassenzettel aus!

2. Das Abziehen oder Subtrahieren (Die Subtraktion)

$$\begin{array}{r} 3860 \\ - 1476 \\ \hline 2384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Minuend} \\ - \text{Subtrahend} \\ \hline = \text{Differenz} \end{array}$$

Die Zahl, von der eine andere Zahl abgezogen wird, nennt man **Minuend**.

Die Zahl, die abgezogen wird, heißt **Subtrahend**.

Das Ergebnis bezeichnet man mit **Differenz**.

Das Zeichen für das Abziehen ist das **Minuszeichen** (—).

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 6375 \\ - 2156 \\ \hline 4219 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87,54 \text{ DM} \\ - 38,87 \text{ DM} \\ \hline 48,67 \text{ DM} \end{array}$$

Merke:

Schreibe deutliche Ziffern!
Schreibe die Zahlen genau untereinander!
Einer unter Einer usw.
Zehntel unter Zehntel usw.
Komma unter Komma!
Bilde Zahlengruppen zu je drei Stellen!
56 324; 723,568; 8745,305268

Das Ergänzungsverfahren

Beim **Abziehen** wird heute das sogenannte **Ergänzungsverfahren** bevorzugt.

Begründung:

Das Zuzählen von Zahlen ist leichter als das Abziehen, beim Ergänzungsverfahren braucht man keine Zahlenwerte zu leihen, man kann gleichzeitig mehrere Zahlen abziehen.

$$\begin{array}{r} 8 \\ - 6 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Man rechnet nicht mehr } 8 - 6 = 2, \text{ sondern } 6 + 2 = 8; \\ \text{die Ergänzungszahl } 2 \text{ wird dabei als Ergebnis niedergeschrieben.} \end{array}$$

Merke:

Das Ergänzungsverfahren ist also eine Umkehrung der Subtraktion.

Regel:

Differenz + Subtrahend = Minuend

a) Ergänzen ohne Überschreiten der Zehner

$$\begin{array}{r} 85,98 \\ - 32,56 \\ \hline 53,42 \end{array}$$

Rechne:

$$\begin{array}{l} 6 + 2 = 8 \\ 5 + 4 = 9 \\ 2 + 3 = 5 \\ 3 + 5 = 8 \end{array}$$

Die Ergänzungszahlen 2, 4, 3, 5 werden als Ergebnis (Differenz) niedergeschrieben.

b) Ergänzen mit Überschreiten der Zehner

$$\begin{array}{r} 63,24 \\ - 36,85 \\ \hline 26,39 \end{array}$$

Rechne:

$$\begin{array}{l} 5 + 9 = 14 \\ 9 + 3 = 12 \\ 7 + 6 = 13 \\ 4 + 2 = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Die Ergänzungszahlen } 9, 3, 6, 2 \\ \text{werden als Ergebnis (Differenz)} \\ \text{niedergeschrieben. Die Zehner wer-} \\ \text{den wie beim Addieren der näch-} \\ \text{sten Einheit des Subtrahenden zu-} \\ \text{gezählt (aus 8, 6 und 3 werden also} \\ \text{9, 7 und 4).} \end{array}$$

c) Die größere Zahl steht unter der kleineren Zahl

Beispiel:

$$\begin{array}{r} - 24,76 \\ 68,43 \\ \hline 43,67 \end{array}$$

Lies: $68,43 - 24,76 = 43,67$

Rechne:

$$\begin{array}{l} 6 + 7 = 13 \\ 8 + 6 = 14 \\ 5 + 3 = 8 \\ 2 + 4 = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ein Umstellen der Zahlen ist beim} \\ \text{Ergänzungsverfahren nicht erfor-} \\ \text{derlich.} \end{array}$$

d) Gleichzeitiges Abziehen mehrerer Subtrahenden

Beispiel:

Rechne:

$$\begin{array}{r}
 485,95 \\
 - 64,23 \\
 - 86,38 \\
 - 75,16 \\
 - 57,04 \\
 \hline
 203,14
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4, 10, 18, 21 + 4 = 25 \\
 2, 3, 6, 8, + 1 = 9 \\
 7, 12, 18, 22 + 3 = 25 \\
 2, 7, 14, 22, 28 + 0 = 28 \\
 2 + 2 = 4
 \end{array}$$

Die einzelnen Reihen der Subtrahenden werden **addiert** und dann wie in den Beispielen 1 und 2 **ergänzt**. Die **Ergänzungszahlen** 4, 1, 3, 0, 2 werden wieder als **Ergebnis** niedergeschrieben.

Merke:

Beim Abziehen von Dezimalbrüchen muß auch im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

e) Rechenproben beim Abziehen

Auch beim schriftlichen Abziehen machen wir stets eine **Probe**.

Die Additionsprobe:

$$\begin{array}{r}
 5476 \\
 - 3235 \\
 \hline
 2241
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Rechne: } 1 + 5 = 6 \\
 4 + 3 = 7 \\
 2 + 2 = 4 \\
 2 + 3 = 5
 \end{array}$$

Merke:

Wenn ich zur **Differenz** den **Subtrahenden** zähle, erhalte ich den **Minuenden**. Also: **Differenz + Subtrahend = Minuend**.

Mach die Neunerprobe!

$$\begin{array}{r}
 8769425 \\
 - 7354693 \\
 \hline
 1414732
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quersumme} = 41 \\
 \text{Quersumme} = 37 \\
 \text{Quersumme} = 22
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Neunerrest} = 5 \\
 - \text{Neunerrest} = 1 \\
 \hline
 \text{Neunerrest} = 4
 \end{array}$$

Merke:

Wenn ich vom **Neunerrest des Minuenden** (5) den **Neunerrest des Subtrahenden** (1) **subtrahiere**, erhalte ich den **Neunerrest der Differenz** (4).

$$\begin{array}{r}
 6314537 \\
 - 4887635 \\
 \hline
 1426902
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quersumme} = 29 \\
 \text{Quersumme} = 41 \\
 \text{Quersumme} = 24
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Neunerrest} = 2 + 9 = 11 \\
 - \text{Neunerrest} = 5 \\
 \hline
 \text{Neunerrest} = 6
 \end{array}$$

Merke:

Ist der **Neunerrest des Minuenden** (2) **kleiner** als der **Neunerrest des Subtrahenden** (5), so **zähle 9 hinzu** ($2 + 9 = 11$), damit du abziehen kannst ($11 - 5 = 6$).

$$\begin{array}{r}
 837926 \\
 - 123454 \\
 - 45506 \\
 - 123273 \\
 - 206859 \\
 - 75484 \\
 \hline
 263350
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quersumme} = 35 \\
 \text{Quersumme} = 19 \\
 \text{Quersumme} = 20 \\
 \text{Quersumme} = 18 \\
 \text{Quersumme} = 30 \\
 \text{Quersumme} = 28 \\
 \text{Quersumme} = 19
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Neunerrest} = 8 \\
 \text{Neunerrest} = 1 \\
 \text{Neunerrest} = 2 \\
 \text{Neunerrest} = 0 \\
 \text{Neunerrest} = 3 \\
 \text{Neunerrest} = 1 \\
 \text{Neunerrest} = 1
 \end{array}$$

Summe der
Neuner-
reste = 7

Merke:

Wenn ich vom **Neunerrest des Minuenden** (8) die **Summe der Neunerreste der Subtrahenden** (7) **subtrahiere**, erhalte ich den **Neunerrest der Differenz** (1).

$$\begin{array}{r}
 927435 \\
 - 134276 \\
 - 75317 \\
 - 105864 \\
 - 216538 \\
 - 84573 \\
 \hline
 310867
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quersumme} = 30 \\
 \text{Quersumme} = 23 \\
 \text{Quersumme} = 23 \\
 \text{Quersumme} = 24 \\
 \text{Quersumme} = 25 \\
 \text{Quersumme} = 27 \\
 \text{Quersumme} = 25
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Neunerrest} = 3 + 9 = 12 \\
 \text{Neunerrest} = 5 \\
 \text{Neunerrest} = 5 \\
 \text{Neunerrest} = 6 \\
 \text{Neunerrest} = 7 \\
 \text{Neunerrest} = 0 \\
 \text{Neunerrest} = 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 5 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Merke:

Ist der **Neunerrest des Minuenden** (3) **kleiner** als die **Summe der Neunerreste der Subtrahenden** (23) hat den **Neunerrest 5**. Wenn ich diesen **subtrahiere**, erhalte ich den **Neunerrest der Differenz** (7).

Übungsaufgabe 16

- a) 84,70 DM — 38,06 DM 74,040 km — 8,3 km 124 hl — 14,05 hl
 b) 3,6 a — 84 qm 18,5 hl — 972 l 48,73 t — 344 kg

Angewandte Aufgaben

- Am 1. Januar hatte eine Kasse einen Bestand von 12406,75 DM. Die Ausgabe betrug im Januar 3064,50 DM. Wie groß war der Kassenbestand am 1. Februar?
- Die Einwohnerzahl der Bundesrepublik Deutschland betrug 1962 rund 52 Millionen. In den Städten lebten 23 400 000 Menschen. Wie viele lebten auf dem Lande?
- Der Kassenbestand beträgt 2364,75 DM. Es werden ausgezahlt: 670,23 DM, 125,48 DM, 283,70 DM, 409,85 DM und 385,16 DM. Wie groß ist der Kassenrestbestand?
- Für eine gelieferte Maschine, die 12468,70 DM kostete, wurden gezahlt: 3380 DM, 3450 DM und 4638,70 DM. Errechne den Restbetrag!
- Bei einer Veranstaltung betrugen die Einnahmen 240,75 DM, 175,60 DM, 382,35 DM und 94,50 DM, die Ausgaben 145,80 DM, 217,50 DM, 85,20 DM und 132,65 DM. Wie hoch ist der Restbetrag?

22. Ein Warenlager hatte einen Bestand von 8324,650 kg. Es wurden verkauft: 608,023 kg, 1420,704 kg, 537,008 kg, 2364,875 kg und 983,450 kg. Wie groß ist der Warenbestand?
23. Ein Kaufmann hatte am 31. März ein Bankguthaben von 3840,75 DM. Im Monat April wurden eingezahlt: 1206,40 DM, 975,30 DM, 832,25 DM und 1430,00 DM; in demselben Zeitraum wurden abgehoben: 926,83 DM, 740,25 DM, 1008,90 DM, 603,65 DM, 873,15 DM und 720,83 DM. Wie hoch war der Kontostand am 1. Mai?
24. Eine Weinhandlung hatte 24250 l Wein gelagert. Es werden 10873 l gekauft und 18065 l verkauft. Ermittle den Weinbestand!
25. Ein Arbeiter kauft ein Motorrad für 1980,50 DM und zahlt 260 DM an. Nach vier Wochen zahlt er weitere 345 DM. Wieviel beträgt die Restschuld?

3. Das Malnehmen oder Multiplizieren (Die Multiplikation)

$$\begin{array}{rclcl} 15 & \cdot & 12 & = & 180 \\ \text{Faktor} & \cdot & \text{Faktor} & = & \text{Produkt} \\ & & \text{oder} & & \\ \text{Multiplikand} & \cdot & \text{Multiplikator} & = & \text{Produkt} \end{array}$$

Zahlen, die malgenommen werden, nennt man **Faktoren**.

Der erste Faktor ist der **Multiplikand**, der zweite der **Multiplikator**.

Das Ergebnis heißt **Produkt**.

Das Zeichen für das Malnehmen ist das **Multiplikationszeichen** ($\cdot$).

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Merke:

Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig.

Das mündliche Multiplizieren

Das kleine Einmaleins

Das Multiplizieren einstelliger Zahlen mit einstelligen Zahlen

$$7 \cdot 8 = 56 \quad 9 \cdot 8 = 72$$

Das kleine Einmaleins ist Grundlage und Voraussetzung für ein schnelles und sicheres Rechnen.

Das große Einmaleins

a) Das Multiplizieren einstelliger Zahlen mit zweistelligen Zahlen

$$9 \cdot 18 = 162 \quad 8 \cdot 67 = 536$$

$$\text{Wir multiplizieren die Zehner: } 9 \cdot 10 = 90 \quad 8 \cdot 60 = 480$$

$$\text{Wir multiplizieren die Einer: } 9 \cdot 8 = 72 \quad 8 \cdot 7 = 56$$

$$\text{Wir addieren die Ergebnisse: } \underline{162} \quad \underline{536}$$

b) Das Multiplizieren zweistelliger Zahlen mit zweistelligen Zahlen im Zahlenraum von 11 bis 19

$$\begin{array}{rcl} 14 \cdot 17 & = & 14 + 7 = 210 \\ & + & 4 \cdot 7 = 28 \\ & \hline & & 238 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 16 \cdot 18 & = & 16 + 8 = 240 \\ & + & 6 \cdot 8 = 48 \\ & \hline & & 288 \end{array}$$

Wir addieren den ersten Faktor und den Einer des zweiten Faktors:

$$14 + 7 = 21 \text{ und hängen eine 0 an: } 210$$

$$16 + 8 = 24 \text{ und hängen eine 0 an: } 240$$

Wir addieren zu diesem Ergebnis das Produkt der Einer:

$$4 \cdot 7 = 28 \quad 6 \cdot 8 = 48$$

$$\text{Gesamtergebnis: } 210 + 28 = 238 \quad 240 + 48 = 288$$

Das schriftliche Multiplizieren

Das Multiplizieren von ganzen Zahlen

$$\begin{array}{r} \text{a) } 2345 \cdot 365 \\ \underline{11725} \\ 14070 \\ \underline{7035} \\ 855925 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{b) } 2345 \cdot 365 \\ \underline{7035} \\ 14070 \\ \underline{11725} \\ 855925 \end{array}$$

Merke:

Setze die Faktoren nebeneinander!

Die Faktoren können beliebig vertauscht werden.

Nimm als **Multiplikator** den Faktor mit der kleineren Stellenzahl! Je weniger Stellen, desto weniger „Treppenstufen“.

Man kann beim Multiplizieren mit den **Einern** beginnen (Beispiel a), dann rückt man die nächsten Reihen **nach links** ein;

man kann auch mit dem **höheren Stellenwert** beginnen (Beispiel b), dann rückt man **nach rechts** ein.

Das Multiplizieren von Dezimalzahlen

$$\begin{array}{r} 36,4 \cdot 7,9 \\ \hline 3276 \\ 2548 \\ \hline 287,56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243,45 \cdot 3,6 \\ \hline 146070 \\ 73035 \\ \hline 876,420 \end{array}$$

Regel:

Man multipliziert Dezimalzahlen wie ganze Zahlen und streicht im Produkt von rechts nach links die Anzahl der Stellen beider Faktoren hinter dem Komma ab.

Das Multiplizieren mit dekadischen Zahlen (10, 100, 1000 usw.)

$$\begin{array}{l} \text{a) } 84 \cdot 10 = 840 \\ 246 \cdot 100 = 24600 \\ 375 \cdot 1000 = 375000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 8,4 \cdot 10 = 84 \\ 2,46 \cdot 100 = 246 \\ 3,75 \cdot 1000 = 3750 \end{array}$$

Regel:

Man multipliziert mit einer dekadischen Zahl, indem man

a) Nullen anhängt oder

b) das Komma nach rechts setzt,

und zwar mit 10 eine Stelle, mit 100 zwei Stellen, mit 1000 drei Stellen usw.

Rechenvorteile

a) Einer der beiden Faktoren hat eine 1

(die 1 kann vorn, hinten oder in der Mitte stehen)

$$\begin{array}{r} 568 \cdot 16 \\ \hline 3408 \\ 9088 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \cdot 752 \\ \hline 6016 \\ 60912 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,68 \cdot 61,7 \\ \hline 5808 \\ 6776 \\ \hline 597,256 \end{array}$$

Steht die 1 vorne, so rückt die Treppe nach rechts ein.

Steht die 1 hinten, so rückt die Treppe nach links ein.

Steht die 1 in der Mitte, so rückt die eine Treppenstufe nach links, die andere nach rechts ein.

Merke:

Die beiden Faktoren werden nicht unterstrichen.

Wir multiplizieren immer zuerst mit der 1.

Der mit der 1 vervielfachte Faktor gilt bereits als Teilergebnis und braucht nicht noch einmal niedergeschrieben zu werden.

b) Der Multiplikator wird in Faktoren zerlegt

$$\frac{768 \cdot 72}{(9 \cdot 8)} = \frac{768 \cdot 9}{6912 \cdot 8} = \frac{55296}{8}$$

$$\frac{8,76 \cdot 5,6}{(8 \cdot 7)} = \frac{8,76 \cdot 8}{7008 \cdot 7} = \frac{49,056}{7}$$

Merke:

Der Multiplikator 72 wird in die Faktoren $9 \cdot 8$, der Multiplikator 56 wird in die Faktoren $8 \cdot 7$ zerlegt.

Sodann multiplizieren wir zuerst mit 9, dann mit 8, bzw. zuerst mit 8, dann mit 7.

Die Addition der Teilergebnisse wird dadurch erspart.

Proben beim Malnehmen (Multiplizieren)

Beim Multiplizieren können wir eine dreifache Probe machen:

a) wir rechnen die Aufgabe noch einmal,

b) wir dividieren,

c) wir machen die Neunerprobe.

Aufgabe:

$$\begin{array}{r} 4327 \cdot 584 \\ \hline 17308 \\ 34616 \\ 21635 \\ \hline 2526968 \end{array}$$

a) Wir rechnen die Aufgabe noch einmal:

Das dauert zu lange, und wir laufen Gefahr, an derselben Stelle denselben Fehler zu machen.

b) Wir dividieren das Produkt durch den Multiplikator:

$2526968 : 584 = 4327$; der Multiplikand ist das Ergebnis.

Wir dividieren das Produkt durch den Multiplikanden:

$2526968 : 4327 = 584$; der Multiplikator ist das Ergebnis.

Auch diese Rechenprobe ist zu umständlich.

c) Wir machen die Neunerprobe:

$$\begin{array}{r} 4327 \cdot 584 \\ \hline 17308 \\ 34616 \\ 21635 \\ \hline 2526968 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & \\ 7 & \times & 8 \\ 2 & \end{array} \end{array}$$

Setze den Neunerrest des Multiplikanden in das linke Malzeichenfeld: 7

Setze den Neunerrest des Multiplikators in das rechte Malzeichenfeld: 8

Multipliziere die beiden Neunerreste ($7 \cdot 8 = 56$) und setze den Neunerrest des Ergebnisses (56) in das obere Malzeichenfeld: 2

Setze den Neunerrest des Produktes in das untere Malzeichenfeld: 2

Die Neunerreste im oberen und unteren Feld müssen übereinstimmen!

Regel:

Neunerrest des Multiplikanden mal Neunerrest des Multiplikators gibt Neunerrest des Produktes.

Merke:

Bei der Multiplikation von Dezimalzahlen wird die Neunerprobe wie bei der Multiplikation von ganzen Zahlen gemacht.

Das Komma bleibt dabei unberücksichtigt.

Übungsaufgabe 26

Mach die Neunerprobe!

$$926374 \cdot 7361$$

$$63,495 \cdot 7,412$$

$$53,172 \cdot 90,72$$

Angewandte Aufgaben

27. A verbraucht täglich 4,25 DM. Wieviel verbraucht er in einem Jahr?
28. Ein Arbeiter zahlt wöchentlich 8,65 DM Lohnsteuer. Wieviel zahlt er jährlich?
29. Der Stundenlohn eines Arbeiters beträgt 2,35 DM. Wieviel verdient der Arbeiter a) an einem Tag (7 Stunden), b) in einer Woche (42 Stunden), c) in einem Jahr?
30. Ein Gasmesser zeigte beim Ablesen 435 m³ an, beim vorigen waren es 363 m³. Wieviel ist zu zahlen, wenn 1 m³ Gas 0,45 DM kostet?
31. Zwischen Blitz und Donner wurden 20 Sekunden gezählt. Wie weit war das Gewitter noch entfernt, wenn die Schallgeschwindigkeit in der Luft 333 m je Sekunde (m/s) beträgt?
32. Wie lang ist der Äquator der Erde, wenn die Meridiane (360) oder Mittagslinien am Äquator 111,3055 km voneinander entfernt sind?
33. Die Steinkohlenförderung Deutschlands betrug im Jahre 1958 134 089 407 t. Wieviel beträgt der Wert der Kohle, wenn 1 Zentner mit 5,85 DM berechnet wird?
34. Das Jahreseinkommen eines Beamten beträgt 7680 DM. Davon gibt er aus: für Kleidung jährlich 560 DM, für Miete monatlich 83 DM, für Ernährung wöchentlich 105 DM, für Krankenkasse, Versicherungen usw. vierteljährlich 48 DM. Wieviel DM bleiben übrig?
35. Ein Anstreicher benötigt zum Tapezieren und Anstreichen eines Zimmers: 32 Rollen Tapete, jede Rolle zu 3,25 DM, 36 m Leiste zu 23 Pfennig, 15 Pfund Kreide zu 14 Pfennig und 3 Büchsen Lackfarbe zu 6,25 DM. Wieviel bekommt er beim Einkauf zurück, wenn er mit drei Fünfgmarkscheinen bezahlt?

4. Das Teilen oder Dividieren (Die Division)

$$\begin{array}{rclcl} 180 & : & 15 & = & 12 \\ \text{Dividend} & : & \text{Divisor} & = & \text{Quotient} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{Probe: } 12 & \cdot & 15 & = & 180 \\ \text{Quotient} & \cdot & \text{Divisor} & = & \text{Dividend} \end{array}$$

Merke:

Die Division ist eine Umkehrung der Multiplikation

Beim Dividieren nennt man die Zahl, die geteilt wird, **Dividend**.

Die Zahl, durch die geteilt wird, heißt **Divisor**.

Das Ergebnis ist der **Quotient**.

Das Zeichen für das Teilen ist das Divisionszeichen (:).

Das schriftliche Dividieren

a) Dividend und Divisor sind ganze Zahlen

$$\begin{array}{r} 4572 : 18 = 254 \\ \underline{36} \\ 97 \\ \underline{90} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

Rechne: $45 : 18 = 2$; denn $2 \cdot 18 = 36$ Rest 9
Wir holen die 7 herunter.
 $97 : 18 = 5$; denn $5 \cdot 18 = 90$ Rest 7
Wir holen die 2 herunter.
 $72 : 18 = 4$; denn $4 \cdot 18 = 72$ Rest 0

$$\text{Probe: } 254 \cdot 18 = 4572$$

$$\begin{array}{r} 17424 : 16 = 1089 \\ \underline{16} \\ 14 \\ \underline{0} \\ 142 \\ \underline{128} \\ 144 \\ \underline{144} \\ 0 \end{array}$$

Rechne: $17 : 16 = 1$; denn $1 \cdot 16 = 16$ Rest 1
Wir holen die 4 herunter.
 $14 : 16 = 0$; denn $0 \cdot 16 = 0$ Rest 14
Die 0 wird in das Ergebnis eingesetzt.
Wir holen die 2 herunter.
 $142 : 16 = 8$; denn $8 \cdot 16 = 128$ Rest 14
Wir holen die 4 herunter.
 $144 : 16 = 9$; denn $9 \cdot 16 = 144$ Rest 0

$$\text{Probe: } 1089 \cdot 16 = 17424$$

b) Der Dividend ist eine Dezimalzahl

$$\begin{array}{r}
 62,05 : 17 = 3,65 \\
 \underline{51} \\
 110 \\
 \underline{102} \\
 85 \\
 \underline{85} \\
 0
 \end{array}$$

Rechne: $62 : 17 = 3$; denn $3 \cdot 17 = 51$ Rest 11
 Im Dividenten steht nun ein Komma;
 wir setzen in das Ergebnis auch ein Komma.
 Wir holen nun erst die 0 herunter.
 $110 : 17 = 6$; usw.

$$\text{Probe: } 3,65 \cdot 17 = \underline{\underline{62,05}}$$

Regel:

Beim Überschreiten des Kommas im Dividenten muß auch im Ergebnis ein Komma gesetzt werden.

$$\begin{array}{r}
 3,42 : 19 = 0,18 \\
 \underline{19} \\
 152 \\
 \underline{152} \\
 0
 \end{array}$$

Rechne: $3 : 19 = 0$
 Wir setzen die 0 und das Komma in die Antwort.
 $34 : 19 = 1$; usw.

$$\text{Probe: } 0,18 \cdot 19 = \underline{\underline{3,42}}$$

Merke:

Wenn die Teilung der Ganzen Null ergibt, dann beginnt das Ergebnis mit Null-Komma.

c) Der Divisor ist eine Dezimalzahl

Beispiel: $10368 : 0,32$

Der Divisor darf keine Dezimalzahl sein; denn durch eine Dezimalzahl kann man nicht teilen.

Wir machen aus dem Divisor eine ganze Zahl, indem wir ihn mit 100 multiplizieren; dann müssen wir den Dividenten ebenfalls mit 100 multiplizieren, damit sich das Ergebnis nicht ändert, also:

$$\begin{array}{r}
 1036800 : 32 = 32400 \\
 \underline{76} \\
 128 \\
 \underline{000}
 \end{array}$$

Also ist $10368 : 0,32$ auch 32400
 Wir rechnen wie bei a) auf Seite 27.

$$\text{Probe: } 32400 \cdot 0,32 = \underline{\underline{10368}}$$

Regel:

Ist der Divisor eine Dezimalzahl, so wird beim Divisor das Komma so viele Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor kein Komma mehr hat; beim Dividenten hängt man die entsprechende Anzahl Nullen an.

d) Dividend und Divisor sind Dezimalzahlen

Beispiel: $5,4275 : 0,65$

Der Divisor darf keine Dezimalzahl sein; denn durch eine Dezimalzahl kann man nicht teilen.

Wir machen aus dem Divisor eine ganze Zahl, indem wir ihn mit 100 multiplizieren; dann müssen wir den Dividenten ebenfalls mit 100 multiplizieren, damit sich das Ergebnis nicht ändert, also:

$$\begin{array}{r}
 542,75 : 65 = 8,35 \\
 \underline{227} \\
 325 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

Also ist $5,4275 : 0,65$ auch 8,35

Wir rechnen nun wie bei b) auf Seite 28.

$$\text{Probe: } 8,35 \cdot 0,65 = \underline{\underline{5,4275}}$$

Regel:

Ist der Divisor eine Dezimalzahl, so wird bei Divident und Divisor das Komma so viele Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor kein Komma mehr hat.

e) Das Dividieren durch dekadische Zahlen (10, 100, 1000 usw.)

$$\begin{array}{l}
 840 : 10 = 84 \\
 24600 : 100 = 246 \\
 375000 : 1000 = 375
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 84 : 10 = 8,4 \\
 246 : 100 = 2,46 \\
 3750 : 1000 = 3,75
 \end{array}$$

Regel:

Man dividiert durch eine dekadische Zahl, indem man

a) Nullen abstreicht oder

b) das Komma nach links setzt,

und zwar durch 10 eine Stelle, durch 100 zwei Stellen, durch 1000 drei Stellen usw.

f) Rechenvorteile: Abgekürztes Verfahren

normales Verfahren

$$\begin{array}{r}
 246345 : 15 = 16423 \\
 \underline{15} \\
 96 \\
 \underline{90} \\
 63 \\
 \underline{60} \\
 34 \\
 \underline{30} \\
 45 \\
 \underline{45} \\
 0
 \end{array}$$

abgekürztes Verfahren

$$\begin{array}{r}
 246345 : 15 = 16423 \\
 \underline{96} \\
 63 \\
 \underline{60} \\
 34 \\
 \underline{45} \\
 0
 \end{array}$$

Merke:

Beim **abgekürzten Verfahren** ermitteln wir zuerst die einzelnen **Ziffern des Quotienten**: 1, 6, 4, 2 und 3; dann errechnen wir im Kopf die **Zwischenprodukte**: 15, 90, 60, 30 und 45 ohne sie **niederzuschreiben** und finden gleichzeitig durch Ergänzen die **Restzahlen**.

Erklärung:

1. Arbeitsgang: $1413 : 325 = 4$

Quotient	Zwischenprodukte	Restzahlen	
$4 \cdot 5$	$= 20$	$+ 3$	$= 23$
$4 \cdot 2 = 8 + 2$	$= 10$	$+ 1$	$= 11$
$4 \cdot 3 = 12 + 1$	$= 13$	$+ 1$	$= 14$

2. Arbeitsgang: $1137 : 325 = 3$

$3 \cdot 5$	$= 15$	$+ 2$	$= 17$
$3 \cdot 2 = 6 + 1$	$= 7$	$+ 6$	$= 13$
$3 \cdot 3 = 9 + 1$	$= 10$	$+ 1$	$= 11$

3. Arbeitsgang: $1625 : 325 = 5$

$5 \cdot 5$	$= 25$	$+ 0$	$= 25$
$5 \cdot 2 = 10 + 2$	$= 12$	$+ 0$	$= 12$
$5 \cdot 3 = 15 + 1$	$= 16$	$+ 0$	$= 16$

Proben beim Teilen (Dividieren)

Beim Dividieren können wir eine dreifache Probe machen:

- wir rechnen die Aufgabe noch einmal,
- wir multiplizieren,
- wir machen die Neunerprobe.

Aufgabe: $238468 : 376 = 634$

$$\begin{array}{r} 2256 \\ 1286 \\ 1128 \\ \hline 1588 \\ 1504 \\ \hline 84 = \text{Rest} \end{array}$$

Probe: $634 \cdot 376$

$$\begin{array}{r} 3804 \\ 4438 \\ 1902 \\ \hline 238384 \\ + 84 \\ \hline 238468 \end{array}$$

a) Wir rechnen die Aufgabe noch einmal.

Das dauert zu lange, und außerdem laufen wir Gefahr, an derselben Stelle denselben Fehler zu machen.

b) Wir multiplizieren den Quotienten mit dem Divisor und addieren den Rest;

wir erhalten als Ergebnis den Dividenden

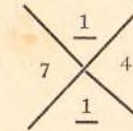
$$634 \cdot 376 = 238384 + 84 = 238468$$

also: **Quotient · Divisor + Rest = Dividend**

c) Wir machen die Neunerprobe.

$$238468 : 376 = 634$$

$$\begin{array}{r} 2256 \\ 1286 \\ 1128 \\ \hline 1588 \\ 1504 \\ \hline 84 = \text{Rest} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 238468 \\ - 84 \\ \hline 238384 \end{array}$$

Setze den Neunerrest des Divisors in das linke Malzeichenfeld: 7

Setze den Neunerrest des Quotienten in das rechte Malzeichenfeld: 4

Multipliziere die beiden Neunerreste ($7 \cdot 4 = 28$) und setze den Neunerrest des Ergebnisses 28 in das obere Malzeichenfeld: 1

Subtrahiere den Rest vom Dividenden ($238468 - 84$) und setze den Neunerrest des verminderten Dividenden (238384) in das untere Malzeichenfeld: 1

Die Neunerreste im oberen und unteren Feld müssen übereinstimmen!

Übungsaufgabe 36

Mach die Neunerprobe!

$$724218 : 2345$$

$$9837,362 : 3065$$

$$98,425 : 3,14$$

Angewandte Aufgaben

- Ein Angestellter zahlt jährlich 550,80 DM Lohnsteuer. Wieviel zahlt er monatlich?
- Wieviel Urlaubstage kann man mit 200,— DM verbringen, wenn der Pensionspreis täglich 12,50 DM beträgt?
- Ein Kaufmann hat 35 kg Kaffee; er verkauft jedem Kunden 125 g. Wieviel Kunden kann er beliefern?
- In einem Haushalt werden durchschnittlich täglich 2,400 kg Kartoffeln verbraucht. Wie lange reicht ein Vorrat von 12 Zentnern?
- Vor dem Krieg lebten in Deutschland auf 470 627 km² 66 Mill. Einwohner. Wieviel Einwohner waren das auf 1 km² im Durchschnitt?

42. Ein Kohlenschiff hat 4125 t Kohlen geladen. Ein Eisenbahnwagen faßt 150 dz. Wieviel Wagen benötigt man zum Ausladen des Schiffes?
43. An 26 Verkaufstagen betrug der Monatsumsatz eines Geschäftes 8465,60 DM. Berechne die durchschnittliche Tageseinnahme!

Übungsaufgabe 44

Zusammenfassung und Wiederholung (Reihenaufgaben):

- a) $3465 + 2087 = \quad - 4308 = \quad \cdot 327 = \quad : 524 =$
- b) $4827 + 3934 = \quad - 6003 = \quad \cdot 456 = \quad : 487 =$
- c) $23,765 + 14,308 = \quad - 7,005 = \quad \cdot 3,704 = \quad : 3,58 =$
- d) $2,325 + 5,008 = \quad - 5,876 = \quad \cdot 23,45 = \quad : 0,427 =$

5. Angewandte Aufgaben

45. A kauft am Postschalter: 20 Postkarten zu 10, 100 Briefmarken zu 7, 120 zu 10, 80 zu 15 und 50 zu 20 Pfennig. Wieviel erhält er von 50 DM zurück?
46. Am Postschalter werden folgende Beträge eingezahlt: 6,15 DM, 9,40 DM, 24,75 DM, 63,80 DM und 89,25 DM. Wieviel erhält man von 200 DM zurück: a) bei Überweisung durch Postanweisung? b) bei Überweisung durch Zahlkarte? (Gebührensätze auf Seite 77). c) Wieviel ist die Überweisung durch Zahlkarte billiger?
47. Ein Haushalt verbrauchte: 45 m³ Gas zu 42 Pf und 63 kWh Strom zu 8,5 Pf. Die Gaszählergebühr beträgt monatlich 0,40 DM, die Stromzählergebühr 4,20 DM. Wieviel ist zu zahlen?
48. Eine Kilowattstunde Licht kostet 0,42 DM. Die Stromgebühren betrugen in einem Monat einschließlich 0,60 DM Zählermiete 4,38 DM. Wieviel Stunden brannte durchschnittlich je Tag eine 60-Watt-Lampe? (Monat = 30 Tage)
49. Ein Bauer hat 8 Kühe, jede Kuh gibt täglich im Durchschnitt 12 l Milch. Der Eigenverbrauch beträgt täglich 10 l, der Rest wird von der Molkerei mit 16 Pf je l vergütet. Wie groß ist die Einnahme im August?
50. In einem Betrieb, in dem 235 Arbeiter beschäftigt sind, werden bei 45stündiger Arbeitszeit wöchentlich 24322,50 DM Lohn ausgezahlt. Berechne den durchschnittlichen Stundenlohn eines Arbeiters!
51. Ein Arbeiter verdient wöchentlich 109,50 DM, seine beiden Söhne je 64,30 DM, seine Tochter 53,40 DM. Wie hoch ist das Jahreseinkommen der Familie?
52. Telegraphenmasten der Deutschen Bundespost haben einen Abstand von 50 m. Mit wieviel kg ist ein Mast mit 12 Drähten belastet, wenn 1 m Freileitungsdraht 17 g wiegt?

53. Eine Schreibtischlampe mit einer 40-Watt-Birne brennt täglich 5 Stunden. Eine Kilowattstunde Licht kostet 0,45 DM. a) Wieviel Stunden kann die Lampe brennen, bis 1 kWh verbraucht ist? b) Wieviel kostet 1 Brennstunde? c) Wieviel kWh verbraucht die Lampe im Dezember? d) Wieviel ist im Dezember zu zahlen?
54. Ein Förster läßt 840 Raummeter (rm) Brennholz schlagen. Er beschäftigt 6 Arbeitsgruppen zu je 3 Mann. Jede Gruppe schafft täglich in 8 Arbeitsstunden 10 rm. Der Stundenlohn eines Holzfällers beträgt 3,70 DM, der Akkordlohn 5,60 DM je rm. a) Wieviel Tage benötigen die 6 Arbeitsgruppen? b) Wieviel Stundenlohn und c) wieviel Akkordlohn muß der Förster insgesamt zahlen?
55. Ein D-Zug und ein Personenzug verlassen Stuttgart zu gleicher Zeit in entgegengesetzter Richtung. Der D-Zug hat eine Geschwindigkeit von 72 km/st, der Personenzug von 54 km/st. Wieviel km sind die beiden Züge nach 12 Minuten voneinander entfernt?
56. Die Schnell-Straßenbahn Düsseldorf—Duisburg hat eine Fahrzeit von 58 Minuten. Die Wartezeit an jeder Endstation beträgt 12 Minuten. Wie oft fährt die Bahn von 5.30 Uhr morgens bis 0.10 Uhr nachts von Düsseldorf nach Duisburg und zurück?
57. Eine Straßenbahnschiene ist 12 m lang. Wieviel Schienen benötigt man für eine 24 km lange zweigleisige Strecke?

V. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen

1. Einführung in die gewöhnliche Bruchrechnung

Die Grundbegriffe der gewöhnlichen Bruchrechnung:

Zähler, Bruchstrich, Nenner

und die Arten der gewöhnlichen Brüche:

Scheinbrüche, Stammbrüche, echte Brüche, unechte Brüche, gleichnamige Brüche, ungleichnamige Brüche und gemischte Zahlen

sind bereits auf Seite 12 dieses Buches erklärt.

a) Das Verwandeln gemischter Zahlen in unechte Brüche

$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

Wir rechnen: $1 = \frac{3}{3}, \quad 2 = 2 \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{3}, \quad \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$1 = \frac{4}{4}, \quad 3 = 3 \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{4}, \quad \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Regel:

Man verwandelt eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner multipliziert und den Zähler hinzu addiert.

b) Das Verwandeln unechter Brüche in gemischte Zahlen

$$\frac{17}{5} = 3 \frac{2}{5}$$

$$\frac{43}{8} = 5 \frac{3}{8}$$

Wir rechnen: $17 : 5 = 3$ Rest 2,

$$2 : 5 = \frac{2}{5}, \quad \text{also: } 3 \frac{2}{5}$$

$$43 : 8 = 5 \text{ Rest } 3,$$

$$3 : 8 = \frac{3}{8}, \quad \text{also: } 5 \frac{3}{8}$$

Regel:

Man verwandelt einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.

c) Das Erweitern der Brüche

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$$

Wir rechnen: $\frac{1}{2}$ mit 2 erweitert $= \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$

$$\frac{2}{3} \text{ mit } 3 \text{ erweitert} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{4} \text{ mit } 4 \text{ erweitert} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16}$$

Regel:

Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.
Der Wert des Bruches ändert sich durch das Erweitern nicht.

d) Das Kürzen der Brüche

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{4} \text{ durch } 2 \text{ gekürzt} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{9} \text{ durch } 3 \text{ gekürzt} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{16} \text{ durch } 4 \text{ gekürzt} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$$

Regel:

Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Der Wert des Bruches ändert sich durch das Kürzen nicht.

Das Kürzen am Bruchstrich

An einem Bruchstrich können auch mehrere Brüche stehen:

$$\frac{4 \cdot 21 \cdot 9 \cdot 5}{10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 20} = \frac{9}{10}$$

Durch das Kürzen am Bruchstrich werden zunächst die einzelnen Brüche vereinfacht.

$$\frac{\cancel{4} \cdot \cancel{21} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{5}}{\cancel{10} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{20}} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5}$$

Erklärung:

Wir kürzen: 4 gegen 20 = oben 1, unten 5
21 gegen 7 = oben 3, unten 1
9 gegen 3 = oben 3, unten 1
5 gegen 10 = oben 1, unten 2

Das Produkt der verbleibenden Zähler ist $3 \cdot 3 = 9$

Das Produkt der verbleibenden Nenner ist $5 \cdot 2 = 10$

Das Ergebnis heißt also: $\frac{9}{10}$

e) Das Gleichnamigmachen der Brüche

Das Erweitern und Kürzen der Brüche wenden wir beim Addieren und Subtrahieren der gewöhnlichen Brüche an.

Vor dem Addieren und Subtrahieren müssen die ungleichnamigen Brüche zuerst gleichnamig gemacht werden:

Die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ haben den gemeinsamen Nenner 12

Die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ haben den gemeinsamen Nenner 20

Regel:

Man macht Brüche gleichnamig, indem man ihnen einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) gibt.

Man findet den Hauptnenner mehrerer Brüche, indem man alle Brüche zu einem gemeinsamen Nenner erweitert.

Wir suchen den Hauptnenner

a) Wir multiplizieren die Nenner:

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} \\ 4 \cdot 5 = 20$$

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{9} \\ 5 \cdot 9 = 45$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

b) Wir nehmen den größten Nenner in die Reihe, bis wir eine Zahl finden, in der alle Nenner enthalten sind:

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \\ 8, 16, 24$$

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{10} \\ 10, 20, 30, 40$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{12} \\ 12, 24, 36, 48, 60$$

24 ist die kleinste Zahl der Reihe 8, die auch durch 6 teilbar ist;

40 ist die kleinste Zahl der Reihe 10, die auch durch 8 teilbar ist;

60 ist die kleinste Zahl der Reihe 12, die auch durch 4 und 5 teilbar ist.

c) Wir wenden die Primteiler-Zerlegung an:

(siehe Seite 40 Abs. 4).

f) Das Verwandeln gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche

Man verwandelt gewöhnliche Brüche in Dezimalbrüche

indem man die Nenner auf Zehntel, Hundertstel oder Tausendstel erweitert:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125$$

indem man den Zähler durch den Nenner dividiert:

$$\frac{4}{7} = 4 : 7 = 0,571 = 0,57$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625 = 0,63$$

Geht dabei die Division ohne Rest auf: $\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0,8$
so ist es ein endlicher Dezimalbruch.

Geht die Division nicht auf und kehren nach dem Komma immer die gleichen Ziffern wieder: $\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,666 \dots$
so ist es ein unendlicher Dezimalbruch.

Die beim unendlichen Dezimalbruch immer wiederkehrenden gleichen Ziffern nennt man **Perioden**.

Wir unterscheiden rein periodische und gemischt periodische Dezimalbrüche.

Rein periodische Dezimalbrüche:

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333 \dots$$

$$\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,444 \dots$$

$$\frac{6}{11} = 6 : 11 = 0,5454 (0,54 \dots)$$

$$\frac{4}{27} = 4 : 27 = 0,148148 (0,148 \dots)$$

Sie beginnen unmittelbar hinter dem Komma, enthalten nur reine Perioden und können ein-, zwei- oder dreistellig sein.

Gemischt periodische Dezimalbrüche:

$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0,8333 \dots$$

$$\frac{7}{12} = 7 : 12 = 0,58333 \dots$$

Den Perioden gehen eine oder mehrere **Vorziffern** voraus.

Schreibweise der periodischen Dezimalbrüche:

Über die wiederkehrenden gleichen Ziffern macht man einen Strich, hinter den periodischen Dezimalbruch setzt man Pünktchen.

Merke:

Endergebnisse mit DM werden stets mit einem Dezimalbruch ausgedrückt; also nicht $12\frac{8}{9}$ DM, sondern $12,888 \text{ DM} = 12,89 \text{ DM}$.

g) Das Verwandeln von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche

Man verwandelt Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche, indem man die Dezimalbrüche einfach als gewöhnliche Brüche niederschreibt und diese dann kürzt:

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$

Übungsaufgabe 58

a) Verwandle die gemischten Zahlen in unechte Brüche:

$$1\frac{3}{4}$$

$$3\frac{5}{7}$$

$$9\frac{4}{5}$$

$$12\frac{3}{8}$$

$$15\frac{7}{9}$$

b) Verwandle die unechten Brüche in gemischte Zahlen:

$$\frac{7}{4}$$

$$\frac{13}{5}$$

$$\frac{11}{7}$$

$$\frac{29}{12}$$

$$\frac{48}{15}$$

c) Erweitere die Brüche:

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{9}$$

$$\frac{4}{12}$$

$$\frac{15}{20} \text{ mit } 2, 3, 4 \text{ und } 5$$

d) Kürze die Brüche:

$$\frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{8}$$

$$\frac{6}{9}$$

$$\frac{9}{24}$$

$$\frac{21}{36}$$

$$\frac{15}{45}$$

$$\frac{54}{60}$$

$$\frac{75}{100}$$

$$\frac{125}{500}$$

$$\frac{375}{1000}$$

e) Mache die Brüche gleichnamig:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ und } \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{8}, \frac{3}{4} \text{ und } \frac{7}{12}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5} \text{ und } \frac{5}{6}$$

f) Verwandle die gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche:

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{11}{200}$	$\frac{13}{250}$
---------------	---------------	---------------	---------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	------------------	------------------

g) Verwandle die Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche:

0,7	0,25	0,80	0,625	0,875
-----	------	------	-------	-------

2. Primzahlen — zusammengesetzte Zahlen — Teilbarkeitsregeln

a) Primzahlen

Zahlen, die sich **nur durch 1** und **durch sich selbst** teilen lassen:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw.

nennt man **Grundzahlen** oder **Primzahlen**.

Zahlen, die **durch 2 teilbar** sind, nennt man **gerade Zahlen**.

Zahlen, die **nicht durch 2 teilbar** sind, nennt man **ungerade Zahlen**.

Alle geraden Zahlen — außer der 2! — sind **keine Primzahlen**.

Die **Primzahlen zwischen 1 und 100** heißen:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97.

b) Zusammengesetzte Zahlen

Zahlen, die sich außer durch 1 und durch sich selbst auch noch durch andere Zahlen teilen lassen, nennt man **zusammengesetzte Zahlen**.

Zusammengesetzte Zahlen lassen sich in ihre **Primfaktoren** zerlegen, z. B.:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Die Primfaktoren kann man nicht mehr weiter zerlegen.

c) Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist **ohne Rest** teilbar durch

- 2: wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar oder eine 0 ist;
- 3: wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist;
- 4: wenn die beiden letzten Ziffern durch 4 teilbar sind;
- 5: wenn die letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist;
- 6: wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist;
- 8: wenn die drei letzten Ziffern durch 8 teilbar sind;
- 9: wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist;
- 10: wenn die letzte Ziffer eine 0 ist;
- 12: wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist;
- 15: wenn sie durch 3 und 5 teilbar ist;
- 25: wenn die beiden letzten Ziffern durch 25 teilbar sind;
- 100: wenn die beiden letzten Ziffern Nullen sind.

3. Der größte gemeinsame Teiler

24 und 36 haben die **gemeinsamen Teiler** 2, 3, 4, 6, 12.

Der **größte gemeinsame Teiler** von 24 und 36 ist 12.

Wir finden den größten gemeinsamen Teiler durch die **Primteiler-Zerlegung**, d. h. durch die **Zerlegung in Primfaktoren**.

Bei der **Primteiler-Zerlegung** müssen wir darauf achten, daß dabei nur **Primzahlen** erscheinen.

Wir dürfen also 60 nur in: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ zerlegen,
nicht in: $2 \cdot 30$ oder $4 \cdot 15$ oder $5 \cdot 12$ oder $6 \cdot 10$;
denn 4, 6, 10, 12, 15 und 20 sind keine Primzahlen.

Wir suchen den **größten gemeinsamen Teiler**

a) von 24 und 36

b) von 48 und 120.

Wir schreiben die **Zahlen untereinander** und zerlegen sie in ihre **Primfaktoren**:

$$\begin{array}{l} \text{a) } 24 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \\ 36 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \\ 120 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \end{array}$$

Wir **unterstreichen** sodann die **Primfaktoren**, die in **beiden Reihen** **gemeinsam** vorkommen;

zum Schluß **multiplizieren** wir die **unterstrichenen Primfaktoren einer Reihe**.

$$\text{a) } 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{b) } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Der **größte gemeinsame Teiler** ist also bei a) 12, bei b) 24.

Regel:

Man findet den **größten gemeinsamen Teiler**, indem man die **Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt**, die **gemeinsamen Faktoren unterstreicht** und die **unterstrichenen Faktoren einer Reihe multipliziert**.

Man gebraucht den **größten gemeinsamen Teiler** beim **Kürzen der Brüche**.

Übungsaufgabe 59

Suche den **größten gemeinsamen Teiler** von:

18 und 42; 128 und 162; 24, 36 und 45; 96, 144 und 204;
48, 120, 216 und 288!

4. Das kleinste gemeinsame Vielfache (Hauptnenner)

24 und 36 haben die **gemeinsamen Vielfachen**: 72, 144, 216, 360 usw.

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** ist 72.

Wir finden das **kleinste gemeinsame Vielfache**, den **Hauptnenner**, durch die **Primteiler-Zerlegung**.

Wir suchen das kleinste gemeinsame Vielfache

a) von 24 und 36

b) von 48 und 120.

Wir schreiben die **Zahlen** wieder **untereinander** und zerlegen sie in ihre **Primfaktoren**:

$$a) 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$b) 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Wir **unterstreichen** diesmal die **Primfaktoren in der Reihe**, in der sie **am häufigsten vorkommen** (kommen sie in beiden Reihen gleich oft vor, dann werden sie nur in einer Reihe unterstrichen); dann werden die **unterstrichenen Primfaktoren beider Reihen multipliziert**.

$$a) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$$

$$b) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist also bei a) 72, bei b) 240.

Regel:

Man findet das kleinste gemeinsame Vielfache, den Hauptnenner, indem man die Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, die einzelnen Faktoren in der Reihe unterstreicht, in der sie am häufigsten vorkommen und die unterstrichenen Faktoren beider Reihen multipliziert.

Man gebraucht das kleinste gemeinsame Vielfache beim Gleichnamigmachen und Addieren der gewöhnlichen Brüche.

Wir suchen den Hauptnenner

Wenn wir ungleichnamige Brüche addieren wollen:

$$\frac{7}{15} + \frac{13}{20} + \frac{9}{25} + \frac{11}{30} + \frac{14}{35}$$

so müssen wir zuerst den gemeinsamen Nenner, den **Hauptnenner**, suchen.

Wir finden den Hauptnenner durch die **Primteiler-Zerlegung**.

Wir unterscheiden zwei Arten der Primteiler-Zerlegung:

a)	15	20	25	30	35
2		10		15	
2		5			
3	5			5	
5	1	1	5	1	7
5			1		
7					1

$$\text{also: } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2100}}$$

b) 15	$\begin{array}{r} 3 \cdot 5 \\ \hline \end{array}$
20	$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ \hline \end{array}$
25	$\begin{array}{r} 5 \cdot 5 \\ \hline \end{array}$
30	$\begin{array}{r} 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline \end{array}$
35	$\begin{array}{r} 5 \cdot 7 \\ \hline \end{array}$

also: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2100$

$$\text{also: } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2100}}$$

Erklärung zu Beispiel a:

Die Zahlen 15, 20, 25, 30 und 35 sind die **Nenner** der Brüche, die addiert werden sollen. Von diesen Nennern ist der **Hauptnenner** zu suchen.

Wir setzen diese Nenner nebeneinander auf den waagerechten Strich.

Wir teilen die Nenner, sofern sie sich teilen lassen, zuerst durch 2; es erscheinen dann 10 und 15.

Die 10 läßt sich noch einmal durch 2 teilen: ist 5.

Durch 2 läßt sich nun nicht mehr teilen; wir nehmen die nächste Primzahl: 3! Nun erscheinen 5 und 5.

Wir teilen durch die nächste Primzahl: durch 5! = 1, 1, 5, 1 und 7.

Wir teilen noch einmal durch 5: ist 1.

Wir teilen durch 7: ist 1.

Jetzt haben wir bei allen Nennern die **Primzahl 1** errechnet.

Die **Primzahlen 2, 2, 3, 5, 5 und 7**, die neben dem senkrechten Strich erscheinen, werden nun miteinander multipliziert.

Das Produkt der Primzahlen $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2100}}$ ist der Hauptnenner.

Erklärung zu Beispiel b:

Wir schreiben die Nenner 15, 20, 25, 30 und 35 senkrecht untereinander.

Dann zerlegen wir sie in ihre **Primteiler**: $15 = 3 \cdot 5$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ usw.

Hierbei dürfen nur Primzahlen erscheinen:

also: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, nicht: $24 = 4 \cdot 6$ oder $3 \cdot 8$.

Nun unterstreichen wir die **Primzahl 2** in der Reihe, in der sie am häufigsten vorkommt: also bei 20.

Die **Primzahl 3** kommt in drei Reihen je einmal vor; wir unterstreichen sie **nur einmal**, und zwar in der obersten Reihe.

Die **Primzahl 5** kommt am häufigsten bei 25 vor.

Die **Primzahl 7** kommt nur einmal vor.

Das Produkt der unterstrichenen Primzahlen $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2100}}$ ist der Hauptnenner.

Übungsaufgabe 60

Suche das kleinste gemeinsame Vielfache von:

12, 18 und 27; 10, 15 und 40; 16, 24 und 30; 15, 21, 25 und 36;
12, 15, 24, 27 und 35!

5. Das Zuzählen (Addieren) von gewöhnlichen Brüchen

a) Das Addieren von gleichnamigen Brüchen

$$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3+2+5+1}{12} = \frac{11}{12}$$

Wir addieren die Zähler: $3 + 2 + 5 + 1 = 11$

Den Nenner lassen wir unverändert: 12; also: $\frac{11}{12}$

Regel:

Man addiert gleichnamige Brüche, indem man die Zähler addiert; der Nenner bleibt unverändert.

b) Das Addieren von ungleichnamigen Brüchen

$$\frac{5}{10} + \frac{7}{12} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} = \frac{30 + 35 + 36 + 40}{60} = \frac{141}{60} = 2\frac{21}{60} = 2\frac{7}{20}$$

Wir machen die Brüche gleichnamig: $\frac{30 + 35 + 36 + 40}{60}$

Wir addieren die Zähler: $\frac{141}{60}$

Wir verwandeln und kürzen: $2\frac{21}{60}$ oder $2\frac{7}{20}$

Regel:

Man addiert ungleichnamige Brüche, indem man sie zuerst gleichnamig macht und dann die Zähler addiert.

Merke:

Unechte Brüche ($\frac{141}{60}$) bleiben nie als Endergebnis stehen; sie werden in gemischte Zahlen verwandelt ($2\frac{21}{60}$) und gekürzt ($2\frac{7}{20}$).

c) Das Addieren von gemischten Zahlen

$$3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{3}{4} = 12 + \frac{8+10+9}{12} = 12\frac{27}{12} = 14\frac{3}{12} = 14\frac{1}{4}$$

Wir addieren zuerst die Ganzen: $3 + 4 + 5 = 12$

Wir machen die Brüche gleichnamig und addieren die Zähler:

$$\frac{8+10+9}{12} = \frac{27}{12}$$

Wir addieren die beiden Ergebnisse: $12\frac{27}{12}$

Wir verwandeln und kürzen: $14\frac{3}{12}$ oder $14\frac{1}{4}$

Regel:

Man addiert gemischte Zahlen, indem man zuerst die ganzen Zahlen, dann die Brüche addiert.

Schriftliches Addieren gemischter Zahlen

a)

16 $\frac{2}{3}$	24
23 $\frac{3}{4}$	16
26 $\frac{1}{2}$	18
15 $\frac{7}{12}$	12
32 $\frac{5}{8}$	14
	15
	75
	24
3	3
	24
115	1
	8

b)

324 $\frac{1}{2}$	60
218 $\frac{2}{3}$	30
432 $\frac{3}{4}$	40
537 $\frac{5}{6}$	45
148 $\frac{4}{5}$	50
	48
	213
	60
3	33
	60
1 662	11
	20

Erklärung des Beispiels a:

Wir addieren zuerst die Brüche.

Der Hauptnenner 24 wird oben niedergeschrieben.

Wir machen die Brüche gleichnamig:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}, \quad \frac{3}{4} = \frac{18}{24}, \quad \frac{1}{2} = \frac{12}{24}, \quad \frac{7}{12} = \frac{14}{24}, \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

von diesen Brüchen werden nur die Zähler niedergeschrieben.

Wir addieren die Zähler der gleichnamigen Brüche: $\frac{75}{24}$

Wir verwandeln den unechten Bruch in eine gemischte Zahl: $3\frac{3}{24}$; der Bruch $\frac{3}{24}$ wird gekürzt: $\frac{1}{8}$

Wir addieren die Ganzen; die 3 wird mit den Einern addiert: 115

Ergebnis: $115\frac{1}{8}$

Auf die gleiche Art wird Beispiel b gelöst.

Übungsaufgabe 61

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$	$\frac{7}{15} + \frac{11}{15}$	$15\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{5} + 5\frac{4}{5} + 9\frac{2}{5}$
b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$	$\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$	$\frac{5}{12} + \frac{9}{15}$
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{9}$	$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8}$	$\frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \frac{7}{10}$
d) $2\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}$	$3\frac{4}{5} + 4\frac{3}{7}$	$8\frac{4}{5} + 9\frac{5}{6} + 3\frac{2}{3}$	$7\frac{4}{15} + 8\frac{7}{12} + 14\frac{5}{8}$
e) $18\frac{3}{4} + 27\frac{4}{9} + 36\frac{5}{6} + 45\frac{1}{2}$	$82\frac{3}{4} + 65\frac{5}{6} + 36\frac{3}{5} + 77\frac{2}{3} + 136\frac{1}{2}$		

Angewandte Aufgaben

62. Vier Postpakete wiegen $12\frac{1}{2}$ kg, $8\frac{3}{4}$ kg, $13\frac{4}{5}$ kg und $9\frac{7}{10}$ kg. Wieviel beträgt das Gesamtgewicht?
63. Für einen Rock benötigt ein Schneider $1\frac{1}{2}$ m Stoff, für eine Hose $1\frac{1}{4}$ m, für eine Weste $\frac{3}{5}$ m. Wieviel m Stoff benötigt er zum ganzen Anzug?
64. Für die Beleuchtung eines Gebäudes wurden im Januar $243\frac{5}{6}$, im Februar $203\frac{3}{4}$, im März $178\frac{2}{3}$ Brennstunden benötigt. Wieviel Brennstunden waren das im Vierteljahr?
65. Ein Landwirt bebaute $15\frac{7}{12}$ ha mit Weizen, $35\frac{11}{20}$ ha mit Roggen, $23\frac{7}{8}$ ha mit Gerste und $12\frac{4}{10}$ ha mit Hafer. Wieviel Hektar betrug das Ackerland insgesamt?

6. Das Abziehen (Subtrahieren) von gewöhnlichen Brüchen

a) Das Subtrahieren von gleichnamigen Brüchen

$$\frac{18}{24} - \frac{9}{24} - \frac{6}{24} = \frac{18 - 9 - 6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Wir subtrahieren die Zähler: $18 - 9 - 6 = 3$ Die Nenner lassen wir unverändert: 24; also: $\frac{3}{24}$ oder $\frac{1}{8}$

Regel:

Man subtrahiert gleichnamige Brüche, indem man die Zähler subtrahiert; der Nenner bleibt unverändert.

b) Das Subtrahieren von ungleichnamigen Brüchen

$$\frac{8}{9} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{16 - 12 - 3}{18} = \frac{1}{18}$$

Wir machen die Brüche gleichnamig: $\frac{16 - 12 - 3}{18}$ Wir subtrahieren die Zähler: $\frac{1}{18}$

Regel:

Man subtrahiert ungleichnamige Brüche, indem man sie zuerst gleichnamig macht und dann die Zähler subtrahiert.

c) Das Subtrahieren von gemischten Zahlen

$$8\frac{5}{6} - 3\frac{1}{4} = 5\frac{10 - 3}{12} = 5\frac{7}{12}$$

Wir subtrahieren die Ganzen: $8 - 3 = 5$

Wir machen die Brüche gleichnamig und subtrahieren die Zähler:

$$\frac{10 - 3}{12} = \frac{7}{12}; \quad \text{also: } 5\frac{7}{12}$$

$$7\frac{5}{12} - 3\frac{7}{15} = 4\frac{25 - 28}{60} = 3\frac{85 - 28}{60} = 3\frac{57}{60} \text{ oder } 3\frac{19}{20}$$

Wir subtrahieren die Ganzen: $7 - 3 = 4$

Wir machen die Brüche gleichnamig und subtrahieren die Zähler;

da das nicht geht, leihen wir von den 4 Ganzen 1 Ganzes = $\frac{60}{60}$ und rechnen:

$$3\frac{85 - 28}{60} = 3\frac{57}{60} = 3\frac{19}{20}$$

Regel:

Man subtrahiert gemischte Zahlen, indem man zuerst die ganzen Zahlen, dann die Brüche subtrahiert.

Ist der Bruch des Subtrahenden größer als der Bruch des Minuenden, dann wird 1 Ganzes entliehen.

Schriftliches Subtrahieren gemischter Zahlen

a) $\begin{array}{r} 24 \\ 234\frac{5}{6} \\ -148\frac{3}{8} \\ \hline 86\frac{11}{24} \end{array}$	b) $\begin{array}{r} 12 \\ 327\frac{2}{3} \\ -284\frac{3}{4} \\ \hline 42\frac{11}{12} \end{array}$	c) $\begin{array}{r} 30 \\ 869\frac{2}{3} \\ -213\frac{5}{6} \\ -158\frac{4}{5} \\ -174\frac{1}{2} \\ \hline 322\frac{8}{15} \end{array}$
	$\begin{array}{r} 20 \\ 8 + 12 = 20 \\ 9 \quad 9 \\ \hline 11 \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 + 60 = 80 \\ 25 \\ 24 \\ 15 \\ \hline 16 \\ 30 \\ 8 \\ 15 \end{array}$

Erklärung des Beispiels a):

Wir subtrahieren zuerst die Brüche, nachdem wir sie gleichnamig gemacht haben.

Der Bruch des Subtrahenden ($\frac{9}{21}$) ist kleiner als der des Minuenden ($\frac{20}{24}$);er kann subtrahiert werden: $\frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$

Sodann werden die ganzen Zahlen subtrahiert: 86.

Gesamtergebnis: $86\frac{11}{24}$

Erklärung des Beispiels b):

Wir subtrahieren zuerst wieder die **Brüche**.

Diesmal ist der **Bruch des Subtrahenden** ($\frac{9}{12}$) größer als der des Minuenden ($\frac{8}{12}$);

er kann **nicht subtrahiert** werden,

wir müssen deshalb beim Minuenden **1 Einer** $= \frac{12}{12}$ **entleihen**.

Der **Minuend** heißt nun nicht mehr 327, sondern 326.

Die entliehenen $\frac{12}{12}$ addieren wir zu den $\frac{8}{12}$ und rechnen: $\frac{20}{12} - \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$

Sodann werden die **ganzen Zahlen** subtrahiert: 42. **Gesamtergebnis:** $42\frac{11}{12}$

Erklärung des Beispiels c):

Wir subtrahieren gleichzeitig mehrere Subtrahenden.

Der gemeinsame **Hauptnenner** ist 30.

Die **Summe der Brüche der Subtrahenden** ($\frac{64}{30}$) ist größer als der des Minuenden ($\frac{20}{30}$).

Wir müssen also beim Minuenden **2 Einer** $= \frac{60}{30}$ **entleihen**.

Der **Minuend** heißt nun nur noch 867.

Die entliehenen $\frac{60}{30}$ addieren wir zu den $\frac{20}{30}$ und rechnen: $\frac{80}{30} - \frac{64}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

Sodann werden die **ganzen Zahlen** in der bekannten Form subtrahiert: 322

Siehe Seite 20, Beispiel d)

Gesamtergebnis: $322\frac{8}{15}$

Übungsaufgabe 66

- a) $4\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $8\frac{5}{12} - \frac{4}{15}$; $16\frac{4}{5} - 9\frac{5}{12}$; $25\frac{7}{9} - 16\frac{3}{4}$;
 b) $54\frac{3}{4} - 41\frac{7}{9}$; $76\frac{2}{9} - 38\frac{5}{6}$; $48\frac{3}{7} - 15\frac{3}{4}$; $56\frac{11}{15} - 38\frac{17}{20}$;
 c) $9\frac{9}{10} - 3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$; $8\frac{5}{6} - 2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2}$; $7\frac{3}{4} - 1\frac{5}{9} - 2\frac{2}{3}$; $9\frac{1}{2} - 3\frac{3}{5} - 2\frac{7}{8}$;
 d) $124\frac{7}{9} - 36\frac{3}{4} - 17\frac{2}{3} - 23\frac{5}{6}$; $384\frac{2}{3} - 56\frac{3}{4} - 48\frac{5}{8} - 39\frac{1}{6} - 85\frac{3}{5}$.

Angewandte Aufgaben

67. A ist $37\frac{3}{4}$ Jahre, B $31\frac{5}{6}$ Jahre alt. Wieviel Jahre ist A älter als B?
 68. Ein Kaufmann kauft eine Ware mit $36\frac{3}{4}$ DM ein und verkauft sie mit $43\frac{4}{5}$ DM.
 Wie groß ist der Gewinn?
 69. Die Geschwindigkeit eines D-Zuges beträgt $28\frac{5}{6}$ m/s, die eines Personenzuges $23\frac{2}{5}$ m/s. Wieviel beträgt der Unterschied?
 70. Ein Omnibus fuhr an den 6 Tagen der Woche $35\frac{7}{10}$, $42\frac{3}{8}$, $53\frac{4}{5}$, $56\frac{3}{4}$, $45\frac{1}{2}$ und $58\frac{11}{20}$ km, ein anderer $36\frac{7}{10}$, $42\frac{7}{8}$, $48\frac{3}{5}$, $53\frac{4}{25}$, $62\frac{3}{4}$ und $65\frac{17}{100}$ km. Wieviel km legte der eine Omnibus mehr zurück als der andere?

7. Das Malnehmen (Multiplizieren) von gewöhnlichen Brüchen

a) Das Multiplizieren von Brüchen mit ganzen Zahlen

$$\frac{5}{12} \cdot 9 = \frac{45}{12} = 3\frac{9}{12} = 3\frac{3}{4}$$

Wir multiplizieren den **Zähler** mit der ganzen Zahl: $5 \cdot 9 = 45$

Den **Nenner** lassen wir **unverändert**: 12; also: $\frac{45}{12}$

Wir **verwandeln** und **kürzen**: $\frac{45}{12} = 3\frac{9}{12}$ oder $3\frac{3}{4}$

Umgekehrt kann man auf die gleiche Weise eine ganze Zahl mit einem Bruch multiplizieren.

Regel:

Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man nur den **Zähler** mit der ganzen Zahl multipliziert; der Nenner bleibt unverändert.

b) Das Multiplizieren von gemischten Zahlen mit ganzen Zahlen

$$3\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$$

Wir **verwandeln** die gemischte Zahl in einen Bruch: $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Wir **multiplizieren** (wie unter a.) den **Zähler** mit der ganzen Zahl: $\frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4}$

Wir **verwandeln** und **kürzen**: $\frac{45}{4}$ oder $11\frac{1}{4}$

Umgekehrt kann man auf die gleiche Weise einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizieren.

Regel:

Man multipliziert eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann den **Zähler** mit der ganzen Zahl multipliziert.

c) Das Multiplizieren von Brüchen mit Brüchen

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$

Wir schreiben die **Brüche** an einen **gemeinsamen Bruchstrich**.

Wir **multiplizieren** die **Zähler**: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Wir **multiplizieren** die **Nenner**: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

Wir **dividieren** das **Produkt der Zähler** durch das **Produkt der Nenner**: $\frac{120}{360}$ und **kürzen**: $\frac{1}{3}$

Regel:

Man multipliziert Brüche mit Brüchen, indem man das **Produkt der Zähler** durch das **Produkt der Nenner** dividiert,

also: $\frac{\text{Zähler} \cdot \text{Zähler}}{\text{Nenner} \cdot \text{Nenner}}$

d) Das Multiplizieren von gemischten Zahlen mit Brüchen

$$3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{14}{6} = 2\frac{2}{6} = 2\frac{1}{3}$$

Wir verwandeln die gemischte Zahl in einen Bruch: $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Wir schreiben die Brüche an einen gemeinsamen Bruchstrich und dividieren (wie unter c) das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner: $\frac{14}{6} = 2\frac{2}{6}$ oder $2\frac{1}{3}$

Umgekehrt kann man auf die gleiche Weise einen Bruch mit einer gemischten Zahl multiplizieren.

Regel:

Man multipliziert eine gemischte Zahl mit einem Bruch, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann die Brüche multipliziert.

e) Das Multiplizieren von gemischten Zahlen mit gemischten Zahlen

$$2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{55}{12} = 4\frac{7}{12}$$

Wir verwandeln die gemischten Zahlen in Brüche: $\frac{11}{4}$ und $\frac{5}{3}$

Wir schreiben die Brüche an einen gemeinsamen Bruchstrich und dividieren (wie unter d) das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner: $\frac{55}{12}$ oder $4\frac{7}{12}$

Regel:

Man multipliziert gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen, indem man die gemischten Zahlen in unechte Brüche verwandelt und dann die Brüche multipliziert.

Übungsaufgabe 71

a) $\frac{5}{12} \cdot 9;$	$\frac{13}{24} \cdot 6;$	$\frac{13}{15} \cdot 12;$	$\frac{21}{30} \cdot 15;$
b) $6\frac{3}{8} \cdot 7;$	$9\frac{5}{12} \cdot 15;$	$18\frac{7}{21} \cdot 23;$	$25\frac{11}{12} \cdot 36;$
c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7};$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{9};$	$\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{11}{12};$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{11};$
d) $4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{3};$	$3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{5}{6};$	$8\frac{5}{7} \cdot 9\frac{3}{6} \cdot 17\frac{5}{12};$	$2\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3};$
e) $12\frac{3}{4} \cdot 5\frac{7}{15} \cdot 2\frac{4}{7} \cdot 8\frac{11}{12};$	$3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 6\frac{5}{9} \cdot 18\frac{2}{3} \cdot 24\frac{5}{6}.$		

Angewandte Aufgaben

72. Ein Fußgänger legt in der Stunde $4\frac{4}{5}$ km zurück. Wieviel km legt er in $3\frac{1}{2}$ Stunden zurück?

73. Die atmosphärische Luft besteht zu $\frac{4}{5}$ aus Stickstoff und zu $\frac{1}{5}$ aus Sauerstoff. Wieviel m³ Stickstoff und wieviel m³ Sauerstoff enthält ein Lehrsaal mit $218\frac{3}{4}$ m³ Rauminhalt?

74. Drei Zimmer mit einem Flächeninhalt von $14\frac{1}{2}$ m², $16\frac{1}{4}$ m² und $18\frac{3}{4}$ m² werden mit Linoleum belegt. 1 m² kostet 6,75 DM. Wieviel kostet der gesamte Bodenbelag?

75. In einem Haushalt wurden verbraucht: an 12 Tagen je $1\frac{3}{4}$ m³, an 10 Tagen je $1\frac{1}{2}$ m³, an 8 Tagen je $1\frac{1}{4}$ m³ Gas. Wieviel wurden im ganzen Monat verbraucht?

76. Der Brennholzvorrat für den Winter beträgt: $1\frac{1}{2}$ Raummeter (rm) Buchenholz, 1 rm zu 16,30 DM, $2\frac{1}{4}$ rm Kiefernholz, 1 rm zu 13,80 DM, und $2\frac{3}{4}$ rm Reiserholz, 1 rm zu 9,40 DM. Wieviel kostet der Brennholzvorrat?

77. Ein Güterzug hat 18 Kohlenwagen zu 20 t und 23 Wagen zu 15 t. In einem 20-t-Wagen sind $24\frac{3}{5}$ m³, in einem 15-t-Wagen $18\frac{3}{4}$ m³ Kohlen. Wieviel m³ Kohlen enthält der ganze Zug?

8. Das Teilen (Dividieren) von gewöhnlichen Brüchen

a) Das Dividieren von Brüchen durch ganze Zahlen

$$\frac{12}{15} : 3 = \frac{4}{15}$$

Der Zähler ist durch die ganze Zahl teilbar: $12 : 3 = 4$

Der Nenner bleibt unverändert: 15; also: $\frac{4}{15}$

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}, \text{ also: } \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

Der Zähler ist nicht durch die ganze Zahl teilbar: $3 : 2$

Wir multiplizieren den Nenner mit der ganzen Zahl: $4 \cdot 2 = 8$

Der Zähler bleibt unverändert: 3; also: $\frac{3}{8}$

Regel:

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner unverändert läßt oder — wenn der Zähler nicht teilbar ist — den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.

b) Das Dividieren von gemischten Zahlen durch ganze Zahlen

$$8\frac{4}{5} : 6 = \frac{44}{5} : 6 = \frac{44}{30} = 1\frac{14}{30} = 1\frac{7}{15}$$

Wir verwandeln die gemischte Zahl in einen Bruch: $8\frac{4}{5} = \frac{44}{5}$

Wir dividieren den Bruch (wie unter a) durch die ganze Zahl:

$$\frac{44}{5} : 6 = \frac{44}{30} \text{ oder } 1\frac{14}{30} \text{ oder } 1\frac{7}{15}$$

Regel:

Man dividiert eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert.

c) Das Dividieren von ganzen Zahlen durch Brüche

$$\begin{array}{ll} 8 : 8 = 1 & 8 : \frac{1}{2} = 16 \\ 8 : 4 = 2 & 8 : \frac{1}{4} = 32 \\ 8 : 2 = 4 & 8 : \frac{1}{8} = 64 \\ 8 : 1 = 8 & 8 : \frac{1}{16} = 128 \end{array}$$

Beim Dividieren vorstehender Aufgaben stellen wir fest,

daß die Teiler:	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
sich von Aufgabe zu Aufgabe halbierten,								
daß die Ergebnisse:	1	2	4	8	16	32	64	128
sich von Aufgabe zu Aufgabe verdoppelten.								

Merke:

Je kleiner der Teiler, desto größer das Ergebnis;
halbiert sich der Teiler, so verdoppelt sich das Ergebnis.

In der 2. Spalte dividieren wir eine ganze Zahl durch einen Bruch:

$$8 : \frac{1}{2} = 16 \quad 8 : \frac{1}{4} = 32 \quad 8 : \frac{1}{8} = 64 \quad 8 : \frac{1}{16} = 128$$

Wenn wir die ganze Zahl mit dem umgekehrten Bruch multiplizieren:

$$8 \cdot \frac{2}{1} = 16 \quad 8 \cdot \frac{4}{1} = 32 \quad 8 \cdot \frac{8}{1} = 64 \quad 8 \cdot \frac{16}{1} = 128$$

so erhalten wir dieselben Ergebnisse.

Regel:

Man dividiert eine ganze Zahl durch einen Bruch, indem man mit dem umgekehrten Bruch multipliziert.

d) Das Dividieren von Brüchen durch Brüche

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$$

Wir kehren den 2. Bruch um (aus $\frac{3}{8}$ machen wir $\frac{8}{3}$)

und multiplizieren den 1. Bruch mit dem umgekehrten 2. Bruch:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{15} \quad \text{oder} \quad 2\frac{2}{15}$$

Regel:

Man dividiert einen Bruch durch einen Bruch, indem man mit dem umgekehrten Bruch multipliziert.

e) Das Dividieren von gemischten Zahlen durch Brüche

$$3\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{15}{4} : \frac{5}{6} = \frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{90}{20} = 4\frac{10}{20} = 4\frac{1}{2}$$

Wir verwandeln die gemischte Zahl in einen Bruch: $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$
und dividieren (wie unter d) einen Bruch durch einen Bruch.

Umgekehrt kann man auf die gleiche Weise Brüche durch gemischte Zahlen dividieren.

Regel:

Man dividiert eine gemischte Zahl durch einen Bruch, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und diesen mit dem umgekehrten 2. Bruch multipliziert.

f) Das Dividieren von gemischten Zahlen durch gemischte Zahlen

$$2\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4} = \frac{8}{3} : \frac{11}{4} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{11} = \frac{32}{33}$$

Wir verwandeln die gemischten Zahlen in Brüche: $\frac{8}{3}$ und $\frac{11}{4}$
und dividieren (wie unter d) einen Bruch durch einen Bruch.

Regel:

Man dividiert gemischte Zahlen durch gemischte Zahlen, indem man die gemischten Zahlen in unechte Brüche verwandelt und dann mit dem umgekehrten Bruch multipliziert.

Übungsaufgabe 78

- a) $\frac{28}{35} : 7$; $\frac{32}{45} : 8$; $\frac{84}{95} : 12$; $\frac{135}{148} : 15$; $\frac{144}{180} : 16$;
b) $\frac{2}{3} : 5$; $\frac{5}{6} : 8$; $\frac{7}{12} : 9$; $\frac{11}{15} : 12$; $\frac{15}{16} : 18$;
c) $3\frac{4}{5} : 8$; $7\frac{5}{8} : 12$; $10\frac{3}{5} : 15$; $18\frac{2}{3} : 24$; $23\frac{5}{6} : 32$;
d) $\frac{7}{9} : \frac{4}{5}$; $\frac{5}{12} : \frac{3}{4}$; $\frac{13}{15} : \frac{7}{12}$; $\frac{19}{24} : \frac{14}{15}$; $\frac{27}{35} : \frac{19}{21}$;
e) $6\frac{1}{2} : 2\frac{3}{5}$; $8\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$; $5\frac{3}{4} : 3\frac{5}{6}$; $7\frac{1}{3} : 2\frac{2}{5}$; $12\frac{3}{4} : 10\frac{1}{2}$.

Angewandte Aufgaben

79. Ein Faß Wein zu $37\frac{1}{2}$ l wird auf Flaschen zu $\frac{3}{4}$ l gefüllt. Wieviel Flaschen werden benötigt?
80. Ein Wasserbehälter faßt $58\frac{1}{8}$ l. In wieviel Minuten ist er gefüllt, wenn das Zuflußrohr in der Minute $3\frac{3}{4}$ l schafft?
81. $14\frac{7}{8}$ dz Kaffee werden in Postpaketen zu je $2\frac{1}{2}$ kg netto versandt. Errechne die Anzahl der Postpakete!
82. Kaffee verliert beim Rösten rund $\frac{1}{5}$ seines Gewichtes. Es bleiben nach dem Rösten $26\frac{1}{5}$ kg übrig. Berechne das Rohgewicht des Kaffees!
83. Wie lange reicht ein Koks-vorrat von 375 Zentnern bei einem durchschnittlichen Tagesverbrauch von $2\frac{1}{2}$ Zentnern?

Übungsaufgabe 84

Zusammenfassung und Wiederholung (Reihenaufgaben):

- a) $8\frac{2}{3} + 7\frac{3}{4} =$ $14\frac{7}{12} =$ $\cdot 3\frac{1}{2} =$ $: 1\frac{1}{2} =$
 b) $12\frac{5}{8} + 8\frac{5}{6} =$ $19\frac{5}{24} =$ $\cdot 3\frac{2}{3} =$ $: 2\frac{1}{2} =$
 c) $2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{4} =$ $5\frac{7}{12} =$ $\cdot 2\frac{1}{6} =$ $: 2\frac{1}{2} =$
 d) $8\frac{1}{2} + 6\frac{2}{3} =$ $13\frac{5}{6} =$ $\cdot 1\frac{3}{4} =$ $: 1\frac{2}{3} =$
 e) $25\frac{3}{4} + 18\frac{4}{5} =$ $42\frac{7}{20} =$ $\cdot 2\frac{1}{2} =$ $: 1\frac{3}{4} =$

9. Angewandte Aufgaben

85. Von einem Ballen Leinen wurden verkauft: $4\frac{1}{2}$ m, $8\frac{3}{4}$ m und 15 m; der Rest beträgt $7\frac{3}{4}$ m. Wieviel m Leinen hatte der Ballen?
 86. Ein Händler kauft Eier: $4\frac{7}{15} + 5\frac{11}{15} + 4\frac{9}{15} + 6\frac{3}{15}$ Schock. Ein Schock bezahlt er mit 12,50 DM. Wieviel muß er zahlen?
 87. Von 3 Ballen Stoff zu je 25 m bleiben folgende Reste: $3\frac{9}{10}$ m, $4\frac{3}{5}$ m und $2\frac{3}{4}$ m. Wieviel m waren verkauft?
 88. Die Oberfläche der Erde ist auf 510 Mill. km² berechnet. Der Anteil der Landfläche beträgt $149\frac{3}{5}$ Mill. km². a) Wie groß ist die Wasserfläche? b) Berechne den Unterschied zwischen Land- und Wasserfläche!
 89. Eine Pumpe schafft in der Stunde $5\frac{3}{4}$ m³. Wieviel m³ sind das in der Minute? Wieviel hl sind das?
 90. Der Cochemer Tunnel ist $4\frac{2}{10}$ km lang. Wieviel Minuten braucht ein Zug, der in der Minute $1\frac{2}{5}$ km fährt, zu seiner Durchfahrt?
 91. Ein Lebensmittelhaus verkauft wöchentlich $136\frac{1}{2}$ kg Butter, $\frac{1}{2}$ kg zu 3,60 DM. Berechne den Vierteljahresumsatz!
 92. Ein Schneider benötigt für einen Herrenanzug je nach Größe $3\frac{1}{5}$ m, $3\frac{1}{4}$ m oder $3\frac{3}{10}$ m Stoff. Der Stoff kostet je m 32 DM. Für Macherlohn und Zutaten berechnet er je Anzug 130 DM. Wieviel kosten die drei Anzüge?
 93. Eine fünfköpfige Familie verbraucht täglich für jede Person $\frac{3}{8}$ l Milch, das l zu 44 Pf. Wieviel gibt die Familie im Mai für Milch aus?
 94. Im Abstand von $12\frac{1}{2}$ m sollen zu beiden Seiten einer 2 km 625 m langen Landstraße Bäume gepflanzt werden. Wieviel Bäume werden benötigt?
 95. Die Sonne ist 150 000 000 km von der Erde entfernt. Ein Sonnenstrahl braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen, $8\frac{1}{3}$ Minuten. Wieviel km legt er in der Sekunde zurück?
 96. Das Schlafzimmer einer Wohnung beträgt $\frac{1}{3}$, das Wohnzimmer $\frac{1}{4}$, die Küche $\frac{1}{12}$, das Kinderzimmer $\frac{1}{6}$ und das Badezimmer $\frac{1}{20}$ der Gesamtfläche; die Diele ist 10,50 m² groß. Wie groß ist der Flächeninhalt der Wohnung?

VI. Die Dreisatzrechnung

Die **Dreisatzrechnung** (Regeldetri) ist die wichtigste Rechnungsart im täglichen Leben; sie ist die **Grundlage aller bürgerlichen Rechnungsarten**.

Bei der **Dreisatzaufgabe** sind immer **drei Glieder** gegeben; das **unbekannte vierte Glied** wird gesucht.

Die **Lösung der Dreisatzaufgaben** geschieht auf dreifache Weise.

Wir können schließen:

von einer **bekannten Einheit** auf eine **unbekannte Mehrheit**,
 von einer **bekannten Mehrheit** auf eine **unbekannte Einheit**,
 von einer **bekannten Mehrheit** über eine **Einheit** auf eine **unbekannte Mehrheit**.

Dieses „**Schließen**“ von **bekannten Einheiten** auf **unbekannte Mehrheiten** und umgekehrt nennt man auch **Schlußrechnung**.

Bei der **Lösung der Dreisatzaufgaben** unterscheiden wir **drei Sätze**: einen **Bedingungssatz**, einen **Schlußsatz** und einen **Fragesatz**; daher der Name **Dreisatzrechnung**.

Der Bedingungssatz

Er gibt die Bedingungen an, die zum Lösen der Dreisatzaufgabe erforderlich sind; er sagt uns also: **was wir wissen** **5 m Stoff kosten 60 DM**

Der Schlußsatz

wir schließen auf die Einheit **1 m Stoff kostet 12 DM**

Der Fragesatz

Er gibt an: **was wir wissen wollen** **7 m Stoff kosten ? DM**

Wir unterscheiden:

1. einen **einfachen Dreisatz** mit **geradem Verhältnis**,
2. einen **einfachen Dreisatz** mit **umgekehrtem Verhältnis**,
3. einen **zusammengesetzten Dreisatz**.

Der einfache Dreisatz

Er besteht nur aus **einer Aufgabe**, deren einzelne Glieder entweder in einem **geraden** oder in einem **umgekehrten Verhältnis** zueinander stehen.

Der zusammengesetzte Dreisatz

Er besteht aus **mehreren** einfachen **Dreisätzen**, deren einzelne Glieder **abwechselnd** in einem **geraden** oder in einem **umgekehrten Verhältnis** zueinander stehen.

Das gerade und das umgekehrte Verhältnis

Bei den Dreisatzaufgaben stehen

Arbeit und Lohn **Ware und Preis** **Menge und Gewicht usw.**

in einem bestimmten **Verhältnis**.

Beispiel zum geraden Verhältnis

7 Arbeiter verdienen 35 DM

1 Arbeiter verdient 5 DM — weniger Arbeiter verdienen weniger Lohn;

9 Arbeiter verdienen 45 DM — mehr Arbeiter verdienen mehr Lohn.

Vermehrt sich die eine Größe, so vermehrt sich im gleichen Verhältnis auch die andere Größe.

Vermindert sich die eine Größe, so vermindert sich im gleichen Verhältnis auch die andere Größe.

Dieses Verhältnis der einzelnen Größen zueinander nennen wir das gerade Verhältnis.

Merke:

Je mehr	Arbeit	Ware	Menge	Zeit
desto mehr	Lohn	Geld	Gewicht	Leistung
Je weniger	Arbeit	Ware	Menge	Zeit
desto weniger	Lohn	Geld	Gewicht	Leistung
Kurz: Je mehr — desto mehr, je weniger — desto weniger gerades Verhältnis				

Beispiel zum umgekehrten Verhältnis

7 Arbeiter benötigen 5 Tage

1 Arbeiter benötigt 35 Tage — weniger Arbeiter benötigen mehr Tage;

5 Arbeiter benötigen 7 Tage — mehr Arbeiter benötigen weniger Tage.

Vermehrt sich die eine Größe, so vermindert sich im gleichen Verhältnis die andere Größe.

Vermindert sich die eine Größe, so vermehrt sich im gleichen Verhältnis die andere Größe.

Dieses Verhältnis der einzelnen Größen zueinander nennen wir das umgekehrte Verhältnis

Merke:

Je mehr	Zeit	Arbeiter	Verbrauch
desto weniger	Arbeiter	Zeit	reicht der Vorrat
Je weniger	Zeit	Arbeiter	Verbrauch
desto mehr	Arbeiter	Zeit	reicht der Vorrat
Kurz: Je mehr — desto weniger, je weniger — desto mehr umgekehrtes Verhältnis			

1. Der einfache Dreisatz mit geradem Verhältnis

Beim einfachen Dreisatz mit geradem Verhältnis schließen wir von der bekannten Mehrheit über die Einheit auf eine unbekannte Mehrheit

Aufgabe:

Wieviel kosten 5 m Stoff, wenn 3 m 36 DM kosten?

Lösung der Aufgabe:

Jede **Dreisatzaufgabe** besteht aus zwei Teilen,
aus einem **Ansatz** und aus einer **Ausrechnung am Bruchstrich**

Der Ansatz

Der Ansatz besteht aus zwei Sätzen:

1. Satz: Was wissen wir	3 m Stoff kosten 36 DM
2. Satz: Was wir wissen wollen	5 m Stoff kosten ? DM

Unter den Ansatz machen wir einen Strich.

Merke:

Der Aufbau des Ansatzes ist sehr wichtig.

Von der richtigen Aufstellung des Ansatzes hängt die richtige Lösung der Aufgabe ab.

Die Glieder mit gleicher Benennung gehören untereinander:
also: DM unter DM, m unter m, Tage unter Tage usw.

Die gesuchte Größe (hier DM) steht am Ende des 1. Satzes.

Das Fragezeichen steht immer am Ende des 2. Satzes.

a) Die Ausrechnung

Die Ausrechnung besteht aus drei Sätzen:

1. Satz: Was wir wissen	3 m Stoff kosten	36 DM
2. Satz: Wir schließen auf die Einheit	1 m Stoff kostet $36 : 3 = 12$ DM	
3. Satz: Was wir wissen wollen	5 m Stoff kosten $5 \cdot 12 = 60$ DM	

Die Ausrechnung am Bruchstrich

3 m Stoff kosten 36 DM	— die 36 DM kommen auf	den Bruchstrich
1 m Stoff kostet den 3. Teil	— die 3	kommt unter den Bruchstrich
5 m Stoff kosten $5 \times$ soviel	— die 5	kommt auf den Bruchstrich

Der Bruchstrich lautet also:

$$\frac{36 \text{ DM} \cdot 5 \text{ gekürzt} = 60 \text{ DM}}{3}$$

Also kosten 5 m Stoff 60 DM

Merke:

Die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, setzen wir stets vorne auf den Bruchstrich.

Zahlen, die malgenommen werden, kommen auf den Bruchstrich.
Zahlen, die geteilt werden, kommen unter den Bruchstrich.

b) Die Dreisatzrechnung mit Dezimalbrüchen

Aufgabe:

Wieviel kosten 5,2 kg Kaffee, wenn 3,5 kg Kaffee 42 DM kosten?

Ansatz:

3,5 kg Kaffee kosten 42 DM

5,2 kg Kaffee kosten ? DM

Ausrechnung:

3,5 kg Kaffee kosten 42 DM — auf den Bruchstrich

0,1 kg Kaffee kostet den 3,5ten Teil — unter den Bruchstrich

5,2 kg Kaffee kosten $5,2 \times$ soviel — auf den Bruchstrich

Bruchstrich:

$$\frac{42 \text{ DM} \cdot 5,2}{3,5} \text{ gekürzt} = 62,40 \text{ DM}$$

Also kosten 5,2 kg Kaffee 62,40 DM

Merke:

Auch bei Dreisatzaufgaben mit Dezimalbrüchen kommt die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, stets **vorne** auf den Bruchstrich.

Dezimalbrüche, die **malgenommen** werden, kommen auf den Bruchstrich.
Dezimalbrüche, die **geteilt** werden, kommen unter den Bruchstrich.

c) Die Dreisatzrechnung mit gewöhnlichen Brüchen

Aufgabe:

Wieviel kosten $2\frac{1}{5}$ m Stoff, wenn $3\frac{1}{2}$ m 35 DM kosten?

Ansatz:

$3\frac{1}{2}$ m Stoff kosten 35 DM

$2\frac{1}{5}$ m Stoff kosten ? DM

Ausrechnung:

Um von $3\frac{1}{2}$ m auf $2\frac{1}{5}$ zu kommen, schließen wir:

von $3\frac{1}{2}$ m auf $\frac{1}{2}$ m, von $\frac{1}{2}$ m auf 1 m,

von 1 m auf $\frac{1}{5}$ m, von $\frac{1}{5}$ m auf $2\frac{1}{5}$ m = $\frac{11}{5}$ m

$3\frac{1}{2}$ m Stoff kosten 35 DM — auf den Bruchstrich,

$\frac{1}{2}$ m Stoff kostet den 7. Teil — unter den Bruchstrich,

1 m Stoff kostet $2 \times$ soviel — auf den Bruchstrich,

$\frac{1}{5}$ m Stoff kostet den 5. Teil — unter den Bruchstrich,

$2\frac{1}{5}$ m Stoff kosten $11 \times$ soviel — auf den Bruchstrich.

Bruchstrich:

$$\frac{35 \text{ DM} \cdot 2 \cdot 11}{7 \cdot 5} \text{ gekürzt} = 22 \text{ DM}$$

Also kosten $2\frac{1}{5}$ m Stoff 22 DM.

Merke:

Auch bei Dreisatzaufgaben mit gewöhnlichen Brüchen kommt die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, stets **vorne** auf den Bruchstrich.
Gewöhnliche Brüche, die **malgenommen** werden, kommen auf den Bruchstrich.

Gewöhnliche Brüche, die **geteilt** werden, kommen unter den Bruchstrich.

d) Die Schreibweise gewöhnlicher Brüche am Bruchstrich

Gemischte Zahlen und gewöhnliche Brüche dürfen am Bruchstrich **nicht** als Brüche erscheinen, da wir sonst mehrere Bruchstriche am Bruchstrich haben.

Der Bruchstrich der vorigen Aufgabe darf also **nicht** lauten:

$$\frac{35 \text{ DM} \cdot 2\frac{1}{5}}{3\frac{1}{2}} \text{ sondern: } \frac{35 \text{ DM} \cdot 2 \cdot 11}{7 \cdot 5}$$

Erklärung:

Wir verwandeln die gemischte Zahl $2\frac{1}{5}$ in den unechten Bruch $\frac{11}{5}$, der nun als $\frac{11}{5}$ am Bruchstrich erscheint.

Wir verwandeln die gemischte Zahl $3\frac{1}{2}$ in den unechten Bruch $\frac{7}{2}$;

da wir aber **durch** den Bruch $\frac{7}{2}$ teilen sollen, müssen wir mit dem **umgekehrten Bruch malnehmen**.

Der Bruch $\frac{7}{2}$ erscheint also am Bruchstrich als $\frac{2}{7}$.

Anmerkung:

Beim Rechnen am Bruchstrich ist das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen **vorteilhafter** als das Rechnen mit Dezimalbrüchen, da das Kürzen der gewöhnlichen Brüche **einfacher** ist.

Alle Dreisatzaufgaben dieses Buches sind deshalb auf die **gewöhnliche Bruchrechnung** abgestellt.

Angewandte Aufgaben

97. In 3 Minuten verlädt ein Arbeiter 48 Pakete. Welche Arbeitsleistung wird in 10 Minuten erbracht?
98. Ein D-Zug legt in $3\frac{3}{4}$ Stunden 450 km zurück. Wieviel km legt der D-Zug in einer Stunde zurück?
99. Ein Bauplatz von 4,5 a kostet 6750 DM. Wie teuer ist ein gleichwertiger Platz von $3\frac{1}{5}$ a?

100. Von $4\frac{1}{2}$ Morgen Wiesenland erntet ein Bauer 120 dz Heu. Wieviel t Heu darf der Bauer von einer gleichwertigen Wiese von $10\frac{1}{2}$ Morgen erwarten?
101. A, B und C beziehen gemeinsam $12\frac{1}{2}$ kg Dauerwurst zum Preise von 130,— DM. A nimmt $5\frac{1}{2}$ kg, B $4\frac{1}{4}$ kg, C den Rest. Wieviel hat jeder zu zahlen?
102. Der durchschnittliche Benzinverbrauch je 100 km beträgt bei einem LKW 24 l, bei einem PKW 10 l und bei einem Motorrad 4 l. Wieviel l Benzin benötigt a) ein LKW für 485 km, b) ein PKW für 625 km, c) ein Motorrad für 365 km?
103. Ein Omnibus fährt in 1 Stunde 45 km. Wieviel km legt er bei gleichbleibender Geschwindigkeit in 3 Stunden 20 Minuten zurück?
104. Von einem Kabelgraben werden in 27 Tagen 1215 m fertiggestellt. Wieviel m werden in 15 Tagen fertig?
105. Bei einem Stromverbrauch von 48 kWh wurden einschließlich 4,20 DM Grundgebühr im Monat Januar 8,04 DM gezahlt. Wieviel ist im Februar bei einem Stromverbrauch von 54 kWh zu zahlen?
106. Ein Schneider benötigt zu einem Herrenanzug 3,3 m Stoff, zu einem Knabenanzug $2\frac{1}{3}$ m. Der Preis für beide Anzugstoffe beträgt 239,98 DM. Für Macherlohn berechnet der Schneider je Anzug 125 DM. Wieviel kostet a) der Herrenanzug, b) der Knabenanzug?

2. Der einfache Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis

Auch beim einfachen Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis schließen wir von der bekannten Mehrheit über die Einheit auf eine unbekannte Mehrheit.

Aufgabe:

6 Arbeiter werfen einen Graben in 10 Tagen aus.
Wieviel Tage brauchen 5 Arbeiter?

Ansatz:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1. Satz: Was wir wissen | 6 Arbeiter benötigen 10 Tage |
| 2. Satz: Was wir wissen wollen | 5 Arbeiter benötigen ? Tage |

Ausrechnung:

- | | |
|---|-------------------------|
| 6 Arbeiter benötigen 10 Tage | — auf den Bruchstrich |
| 1 Arbeiter benötigt nicht den 6. Teil, sondern $6 \times$ soviel Zeit | — auf den Bruchstrich |
| 5 Arbeiter benötigen nicht $5 \times$ soviel, sondern nur den 5. Teil an Zeit | — unter den Bruchstrich |

Es ist hier **umgekehrt** wie bei den Aufgaben mit geradem Verhältnis, deshalb nennen wir dieses Verhältnis **umgekehrtes Verhältnis**.

Bruchstrich:

$$\frac{10 \text{ Tage} \cdot 6 \text{ gekürzt}}{5} = 12$$

Also brauchen 5 Arbeiter 12 Tage

Merke:

Auch beim einfachen Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis kommt die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, stets vorne auf den Bruchstrich.

Zahlen, die malgenommen werden, kommen auf den Bruchstrich. Zahlen, die geteilt werden, kommen unter den Bruchstrich.

Angewandte Aufgaben

107. 10 Mechaniker setzen eine Nebenstellenanlage in 14 Tagen auf. Wieviel Tage brauchen 7 Mechaniker?
108. In wieviel Stunden entladen 26 Arbeiter einen Paketpostzug, wenn 16 Arbeiter dazu $6\frac{1}{2}$ Stunden brauchen?
109. Wenn jemand täglich 10 DM ausgibt, reicht sein Geld für 15 Tage Sommerfrische. Wie lange reicht es bei einer täglichen Ausgabe von 12,50 DM?
110. Bei einem täglichen Verbrauch von $2\frac{1}{2}$ Zentnern Koks reicht der Kellervorrat eines Gebäudes 5 Monate. Wie lange reicht der Vorrat bei einem Tagesverbrauch von 3 Zentnern?
111. Ein Kraftfahrer legt mit einem PKW bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km/h die Strecke Duisburg — Köln in 66 Minuten zurück. Mit welcher Geschwindigkeit muß er fahren, wenn er in 55 Minuten in Köln sein will?
112. 4 Arbeiter schachten einen Kabelgraben in 12 Tagen aus. Wieviel Arbeiter muß der Bauführer einsetzen, wenn der Kabelgraben in 8 Tagen fertig sein soll?
113. Eine Arbeit ist in 6 Tagen fertig, wenn die tägliche Arbeitszeit 8 Stunden beträgt. Wie lange muß täglich gearbeitet werden, wenn die Arbeit schon in 4 Tagen fertig sein soll?
114. 8 Rohrleitungen leeren ein Tankschiff in 24 Stunden. In wieviel Stunden ist das Tankschiff geleert, wenn 4 Leitungen mehr angeschlossen werden?
115. Ein Rohr, das in der Minute 1,25 hl Wasser zuführt, füllt ein Becken in 18 Stunden. In welcher Zeit ist das Becken gefüllt, wenn das Rohr $1\frac{1}{2}$ hl zuführt?
116. Eine Erdkabellinie wird von 180 Arbeitern in 72 Tagen gebaut. a) Wieviel Arbeiter sind notwendig, wenn die Kabellinie in 60 Tagen fertig sein soll? b) In wieviel Tagen wäre das Erdkabel verlegt, wenn ein Drittel der Arbeiter mehr beschäftigt würde?

3. Der zusammengesetzte Dreisatz

Der zusammengesetzte Dreisatz besteht aus mehreren einfachen Dreisätzen, die einzeln nacheinander gerechnet werden.

Während im einfachen Dreisatz immer 3 Glieder gegeben sind, um das unbekannte 4. Glied zu suchen, sind im zusammengesetzten Dreisatz 5 oder 7 Glieder gegeben, um das unbekannte 6. oder 8. Glied zu errechnen.

Aufgabe:

Wieviel verdienen 3 Arbeiter in 8 Tagen bei täglich 7stündiger Arbeitszeit, wenn 7 Arbeiter in 6 Tagen bei täglich 8stündiger Arbeitszeit 280 DM verdienen?

Ansatz:

7 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 8stündiger Arbeitszeit 280 DM
3 Arbeiter verdienen in 8 Tagen bei 7stündiger Arbeitszeit ? DM

Ausrechnung:

Die Tage und die Arbeitszeit bleiben vorerst unberücksichtigt!

$$\begin{array}{llll} 7 \text{ Arbeiter verdienen } 280 \text{ DM} & (\text{auf den Bruchstrich}) & = & \frac{280}{7} \\ 1 \text{ Arbeiter den 7. Teil davon} & (\text{unter den Bruchstrich}) & = & \frac{280}{7} \\ 3 \text{ Arbeiter } 3 \times \text{soviel wie einer} & (\text{auf den Bruchstrich}) & = & \frac{280 \cdot 3}{7} \end{array}$$

Nun werden die Tage berücksichtigt!

$$\begin{array}{llll} \text{In 6 Tagen verdienen 3 Arbeiter} & & = & \frac{280 \cdot 3}{7} \\ \text{In 1 Tag den 6. Teil davon} & (\text{unter den Bruchstrich}) & = & \frac{280 \cdot 3}{7 \cdot 6} \\ \text{In 8 Tagen } 8 \times \text{soviel wie an 1 Tag} & (\text{auf den Bruchstrich}) & = & \frac{280 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6} \end{array}$$

Nun wird die Arbeitszeit berücksichtigt!

$$\begin{array}{llll} \text{Bei 8stündiger Arbeitszeit verdienen 3 Arbeiter in 8 Tagen} & & = & \frac{280 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6} \\ \text{Bei 1st. Arbeitszeit den 8. Teil} & (\text{unter den Bruchstrich}) & = & \frac{280 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 8} \\ \text{Bei 7st. Arbeitszeit } 7 \times \text{soviel} & (\text{auf den Bruchstrich}) & = & \frac{280 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 8} \end{array}$$

Bruchstrich: $\frac{280 \text{ DM} \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 8}$ gekürzt = **140 DM**

Also verdienen 3 Arbeiter in 8 Tagen bei 7stündiger Arbeitszeit **140 DM.**

Merke:

In der vorstehenden Aufgabe haben wir nur einfache Dreisätze mit **geradem Verhältnis**.

Es gibt auch Aufgaben, die nur einfache Dreisätze mit **umgekehrtem Verhältnis** haben.

Schließlich gibt es zusammengesetzte Dreisatzaufgaben, in denen **beide Verhältnisse abwechselnd** vorkommen.

Es ist also bei jeder Teilaufgabe das **Verhältnis festzustellen!**

Angewandte Aufgaben

117. 3 Arbeiter verladen in 4 Minuten 192 Pakete. Wieviel Pakete verladen 10 Arbeiter in 20 Minuten?
118. Wieviel verdienen 16 Arbeiter in 15 Tagen bei täglich 7stündiger Arbeitszeit, wenn 25 Arbeiter in 12 Tagen bei 8stündiger Arbeitszeit 6120 DM verdienen?
119. Bei täglich 8stündiger Arbeitszeit verlegen 12 Arbeiter ein Kabel in 21 Tagen. Wieviel Tage benötigen 10 Arbeiter bei täglich 9stündiger Arbeitszeit für diese Arbeit?
120. Ein Landwirt verfüttert wöchentlich an 5 Pferde 140 kg Hafer. Er verkauft 2 Pferde. Wieviel Tage reicht nun noch ein Vorrat von 24 dz?
121. 6 Textilarbeiter weben bei täglich 8stündiger Arbeitszeit wöchentlich 624 m Leinen. Wieviel m weben 8 Textilarbeiter in 12 Tagen, wenn sie täglich nur 7 Stunden arbeiten?
122. Mit 7 Lastwagen, die täglich je 5 Fahrten ausführen, kann man einen Schleppkahn Kohlen in 4 Tagen entladen. Wieviel Lastwagen werden benötigt, wenn jeder Wagen täglich 2 Fahrten mehr machen soll und der Schleppkahn schon in 2 Tagen geleert sein muß?
123. Der Dachstuhl eines Hauses wird gerichtet. Bei täglich 8stündiger Arbeitszeit arbeiten 3 Zimmerleute 18 Tage daran. Wie lange arbeiten 4 Zimmerleute, wenn sie täglich 1 Überstunde machen?
124. Ein Kabelgraben von 1200 m Länge, 0,6 m Breite und $1\frac{1}{2}$ m Tiefe wird in einer gewissen Zeit von 24 Arbeitern ausgehoben. Wieviel Arbeiter hat man nötig, um in derselben Zeit einen Kanal von 1800 m Länge, 0,8 m Breite und $2\frac{1}{2}$ m Tiefe zu bauen?
125. 30 Eisenbahnwagen mit Kohle von je 15 t Inhalt werden beim Einsatz von 5 Lastwagen in 3 Tagen entladen. Wieviel Lastwagen sind nötig, wenn 45 Eisenbahnwagen zu 20 t in 5 Tagen ausgeladen werden sollen?
126. Wenn 6 Arbeiter bei täglich 9stündiger Arbeitszeit in 5 Tagen einen Graben von 50 m Länge, $4\frac{1}{2}$ m Breite und $2\frac{1}{2}$ m Tiefe ausheben, wieviel Arbeiter sind dann nötig, um bei täglich 8stündiger Arbeitszeit in 6 Tagen einen 60 m langen, 5 m breiten und 3 m tiefen Graben auszuheben?

4. Lösung der Dreisatzaufgaben nach der Formel

Bei der **Dreisatzrechnung** ist die Aufstellung des Bruchstriches sehr wichtig; denn von der **richtigen Aufstellung des Bruchstriches** hängt die **richtige Lösung der Aufgabe** ab.

Erfahrungsgemäß werden bei der **Dreisatzrechnung**, besonders bei den **zusammengesetzten Dreisatzaufgaben mit geradem und umgekehrtem Verhältnis**, die **Zahlen-**

werte am Bruchstrich sehr oft verwechselt, so daß Zahlenwerte, die auf dem Bruchstrich stehen müssen, unter den Bruchstrich gesetzt oder umgekehrt Zahlenwerte, die unter dem Bruchstrich stehen müssen, auf dem Bruchstrich gesetzt werden. Das Ergebnis der Aufgabe muß dann natürlich falsch sein.

Um denen, die bei der Aufstellung des Bruchstriches Schwierigkeiten haben, zu helfen, werden als Gedächtnisstütze die folgenden „Formeln“ gegeben; sie sollen (besonders bei Prüfungen) eine Hilfe sein, wenn die denkmäßige Lösung der Aufgabe nicht gelingen will.

a) Schematische Darstellung

a) gerades Verhältnis

Der Ansatz

$$\begin{array}{r} \boxed{2} \qquad \boxed{1} \\ 5 \text{ Arbeiter verdienen } 90 \text{ DM} \\ 7 \text{ Arbeiter verdienen } ? \text{ DM} \\ \boxed{3} \end{array}$$

Der Bruchstrich

$$\frac{\boxed{1} \quad \boxed{3}}{\boxed{2}} = 126 \text{ DM}$$

Erklärung:

Wenn wir in den vorstehenden Ansätzen

dem Glied am Ende des 1. Satzes die Nummer $\boxed{1}$

dem Glied am Anfang des 1. Satzes die Nummer $\boxed{2}$

dem Glied am Anfang des 2. Satzes die Nummer $\boxed{3}$ geben,

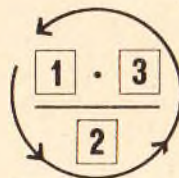
dann stellen wir nach längerer Übung der Dreisatzrechnung, bei der wir die Bruchstriche verstandesmäßig aufgestellt haben, fest, daß die einzelnen Glieder des Dreisatzes immer in einer bestimmten Reihenfolge erscheinen.

b) Die Aufstellung des Bruchstriches beim einfachen Dreisatz

Beim geraden Verhältnis erscheinen die drei bekannten Glieder des Ansatzes am Bruchstrich in folgender Reihenfolge:

Die Nummer $\boxed{1}$ erscheint auf dem Bruchstrich
 Die Nummer $\boxed{2}$ erscheint unter dem Bruchstrich
 Die Nummer $\boxed{3}$ erscheint auf dem Bruchstrich

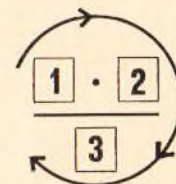
also:



Beim umgekehrten Verhältnis erscheinen die drei bekannten Glieder des Ansatzes in umgekehrter Reihenfolge (daher der Name):

Die Nummer $\boxed{1}$ erscheint auf dem Bruchstrich
 Die Nummer $\boxed{2}$ erscheint auf dem Bruchstrich
 Die Nummer $\boxed{3}$ erscheint unter dem Bruchstrich

also:



Merke:

Beim geraden Verhältnis nehmen wir als Gedächtnisstütze den kleinen Buchstaben g, den Anfangsbuchstaben von „gerades Verhältnis“.

Die Nummer $\boxed{1}$ setzen wir immer vorne auf den Bruchstrich.

Von der Nummer $\boxed{1}$ aus ziehen wir nun (wie beim Schreiben des Buchstabens g — siehe Zeichnung!) eine Rundschleife nach unten und setzen unter den Bruchstrich die Nummer $\boxed{2}$.

Sodann folgen wir der Rundschleife weiter nach oben und setzen auf den Bruchstrich die Nummer $\boxed{3}$.

Für die Nummern $\boxed{1}$ · $\boxed{3}$ setzen wir nun die Zahlenwerte des Ansatzes $\boxed{2}$

auf bzw. unter den Bruchstrich.

Das Ergebnis muß, wenn bei der Ausrechnung kein Fehler gemacht wird, richtig sein.

Beim umgekehrten Verhältnis nehmen wir als Gedächtnisstütze den Buchstaben u, den Anfangsbuchstaben von „umgekehrtes Verhältnis“.

Die Nummern $\boxed{1}$ setzen wir wieder vorne auf den Bruchstrich.

Von der Nummer $\boxed{1}$ aus ziehen wir nun die Rundschleife in umgekehrter Richtung (wir können auch sagen: im Uhrzeigersinne).

Die Rundschleife verbleibt zunächst noch auf dem Bruchstrich (Zeichnung!), und wir setzen hier die Nummer $\boxed{2}$ neben die Nummer $\boxed{1}$.

Sodann folgen wir der Rundschleife weiter nach oben und setzen auf den Bruchstrich die Nummer $\boxed{3}$.

Für die Nummern $\boxed{1}$ · $\boxed{2}$ setzen wir nun die Zahlenwerte des Ansatzes $\boxed{3}$

auf bzw. unter den Bruchstrich.

Das Ergebnis muß wieder richtig sein.

c) Die Aufstellung des Bruchstriches beim zusammengesetzten Dreisatz

Auch beim **zusammengesetzten Dreisatz** erhalten die einzelnen Teile des Ansatzes eine **Nummer**.

[2]	[2]	[2]	[1]
6 Wagen mit je 15 t werden von	3 Arbeitern in	2 Tagen entladen.	
5 Wagen mit je 20 t werden von	4 Arbeitern in	? Tagen entladen.	
[3]	[3]	[3]	

Merke:

Das **Glied am Ende des 1. Satzes** erhält die **Nummer [1]**
alle übrigen Glieder des 1. Satzes erhalten die **Nummer [2]**
alle Glieder des 2. Satzes erhalten die **Nummer [3]**

Die **Nummer [1]** erscheint beim zusammengesetzten Dreisatz **nur einmal**, während die **Anzahl der Nummern [2] und [3]** der **Anzahl der Teilaufgaben** entspricht.

d) Aufstellung des Bruchstriches nach der Formel

Zu der vorstehenden zusammengesetzten Dreisatzaufgabe fertigen wir ein **Schaubild des Ansatzes** an:

g	g	u	
[2]	[2]	[2]	[1]
6 W. ——— 15 t ———	3 A. ———	2 T.	
5 W. ——— 20 t ———	4 A. ———	? T.	
[3]	[3]	[3]	

Merke:

Diese Dreisatzaufgabe besteht aus **drei Teilaufgaben**.

Wir bestimmen das **Verhältnis** der Teilaufgaben.

1. Teilaufgabe:

Je **weniger** Wagen — desto **weniger** Tage
gerades Verhältnis — **g-Formel**

2. Teilaufgabe:

Je **mehr** t — desto **mehr** Tage
gerades Verhältnis — **g-Formel**

3. Teilaufgabe:

Je **mehr** Arbeiter — desto **weniger** Tage
umgekehrtes Verhältnis — **u-Formel**

Die Formelbuchstaben **g** und **u** setzen wir **im Schaubild** des Ansatzes über die einzelnen **Teilaufgaben**.

Nun fertigen wir ein **Schaubild des Bruchstriches** an:

1.	2.	3.	Teilaufgabe
[1] · [3]	· [3]	· [2]	
[2]	[2]	[3]	

und setzen für die **Nummern** die **Zahlenwerte** ein:

$$\frac{2 \text{ T.} \cdot 5 \cdot 20 \cdot 3}{6 \cdot 15 \cdot 4} \quad \text{gekürzt} = \underline{\underline{1\frac{2}{3} \text{ Tage}}}$$

Erklärung:

1. Teilaufgabe:

6 Wagen werden in 2 Tagen entladen
 5 Wagen werden in ? Tagen entladen

Nach der **g-Formel** lautet der Bruchstrich: $\frac{2 \text{ Tage} \cdot 5}{6}$

Dieser Teil des Bruchstriches ist bereits die **Nummer [1]** für die

2. Teilaufgabe:

Für 15-t-Wagen benötigen 5 Arbeiter $\frac{2 \cdot 5}{6}$ Tage

Für 20-t-Wagen benötigen 5 Arbeiter ? Tage

Da die **Nummer [1]** für die 2. Teilaufgabe bereits vorliegt, brauchen nur die **Nummern [2] und [3]** **hinzugefügt** zu werden, und zwar, da das **gerade Verhältnis** vorliegt, nach der **g-Formel**.

Der Bruchstrich lautet nun: $\frac{2 \text{ Tage} \cdot 5 \cdot 20}{6 \cdot 15}$

Dieser Teil des Bruchstriches ist nun die **Nummer [1]** für die

3. Teilaufgabe:

3 Arbeiter brauchen für 5 Wagen mit je 20 t $\frac{2 \cdot 5 \cdot 20}{6 \cdot 15}$ Tage

4 Arbeiter brauchen für 5 Wagen mit je 20 t ? Tage

Da nun schon für die 3. Teilaufgabe die Nummer **1** vorliegt, brauchen wieder nur die Nummern **2** und **3** hinzugefügt zu werden, diesmal, da es sich um ein **umgekehrtes Verhältnis** handelt, nach der **g-Formel**.

Der gesamte Bruchstrich lautet nun:

$$\frac{2 \text{ Tage} \cdot 5 \cdot 20 \cdot 3}{6 \cdot 15 \cdot 4} \text{ gekürzt} = \frac{5}{3} \text{ oder } \underline{\underline{1\frac{2}{3} \text{ Tage}}}$$

Zusammenfassung

Dreisatzrechnung nach der Formel

Lösungsweg:

1. Lies die gegebene Aufgabe.
Achte auf die gestellte Frage.
2. Bilde den richtigen Ansatz.
Stelle das Verhältnis der Teilaufgaben und die Art der Formel fest:
g- oder u-Formel.
3. Stelle den Bruchstrich auf.
Fertige ein Schaubild des Bruchstriches an
und setze für die Nummern die Zahlenwerte des Ansatzes ein.
4. Rechne den Bruchstrich aus.
Du hast dann das Ergebnis.

VII. Die Prozent- und Promillerechnung

1. Die Prozentrechnung

Die Prozentrechnung (Hundertrechnung) ist eine Dreisatzrechnung mit der feststehenden Zahl 100 ohne Berücksichtigung der Zeit.

Prozent (lat.: pro centum) bedeutet **für oder vom Hundert**.
Das **Zeichen für Prozent** ist $\%$.

Gewinn und Verlust, Preissteigerungen und Preissenkungen, Lohn und Gehaltserhöhungen, Änderungen statistischer Zahlen usw. werden in $\%$ angegeben, um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu schaffen.

Der Kaufmann drückt den Gewinn (Verlust) in $\%$ aus.

Beispiel:

Mit **320 DM** gewinnt ein Kaufmann **48 DM**

Mit **1 DM** gewinnt er **48 DM : 320 = 0,15 DM**

Mit **100 DM** gewinnt er **0,15 DM · 100 = 15 DM**, also: **15%**

Bei der Prozentrechnung erscheinen drei Werte:
Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz.

Die **320 DM** eingesetztes Kapital nennen wir den **Grundwert**,
die **48 DM** Gewinn bezeichnen wir mit **Prozentwert**,
das Ergebnis vom Hundert ist der **Prozentsatz**.

Von diesen drei Werten sind stets **zwei Werte** gegeben, der **3. Wert** wird gesucht.

- a) Gegeben sind **Grundwert** und **Prozentsatz** — gesucht wird der **Prozentwert**.
- b) Gegeben sind **Grundwert** und **Prozentwert** — gesucht wird der **Prozentsatz**.
- c) Gegeben sind **Prozentwert** und **Prozentsatz** — gesucht wird der **Grundwert**.

Der **Grundwert** ist immer das Ganze oder **100%**.

Feststehende Hundertsätze (Prozentsätze)

Bei der Prozent- und Zinsrechnung gibt es **Prozentsätze**, die immer wiederkehren.

Diese feststehenden Prozentsätze sind:

$1\% = \frac{1}{100}$	$9\frac{1}{11}\% = \frac{1}{11}$	$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$
$2\% = \frac{1}{50}$	$10\% = \frac{1}{10}$	$40\% = \frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$	$50\% = \frac{1}{2}$
$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$60\% = \frac{3}{5}$
$4\% = \frac{1}{25}$	$14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$
$5\% = \frac{1}{20}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$75\% = \frac{3}{4}$
$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$80\% = \frac{4}{5}$
$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$25\% = \frac{1}{4}$	$100\% = \text{das Ganze}$

Bei Aufgaben mit feststehenden Prozentsätzen rechnen wir den **Prozentwert** in vereinfachter Form aus, z. B.:

20 % von 400 DM	=	$\frac{1}{5}$ von 400 DM	=	80 DM
80 % von 500 DM	=	$\frac{4}{5}$ von 500 DM	=	400 DM
25 % von 320 DM	=	$\frac{1}{4}$ von 320 DM	=	80 DM
75 % von 600 DM	=	$\frac{3}{4}$ von 600 DM	=	450 DM
$33\frac{1}{3}\%$ von 450 DM	=	$\frac{1}{3}$ von 450 DM	=	150 DM
$12\frac{1}{2}\%$ von 480 DM	=	$\frac{1}{8}$ von 480 DM	=	60 DM

Präge dir die feststehenden Prozentsätze gut ein!

Rechne Aufgaben, die solche Prozentsätze haben, in dieser Form aus!

Wir berechnen den Prozentwert

 $1\% = 1$ von Hundert oder 1 v. H. oder 1 Prozent

$1\% \text{ von } 325 \text{ DM} = 3,25 \text{ DM}$

$10\% \text{ von } 325 \text{ DM} = 32,50 \text{ DM}$

$1\% \text{ von } 450 \text{ DM} = 4,50 \text{ DM}$

$10\% \text{ von } 450 \text{ DM} = 45,00 \text{ DM}$

$1\% \text{ von } 500 \text{ DM} = 5,00 \text{ DM}$

$10\% \text{ von } 500 \text{ DM} = 50,00 \text{ DM}$

Merke:

1% ist immer $\frac{1}{100}$ des Grundwertes;
das Komma wird zwei Stellen nach links gesetzt.

10% ist immer $\frac{1}{10}$ des Grundwertes;
das Komma wird eine Stelle nach links gesetzt.

$1\% \text{ von } 235 \text{ DM} = 2,35 \text{ DM}$

$2\% \text{ von } 235 \text{ DM} = 2,35 \text{ DM} \cdot 2 = 4,70 \text{ DM}$

$1\% \text{ von } 360 \text{ DM} = 3,60 \text{ DM}$

$\frac{1}{2}\% \text{ von } 360 \text{ DM} = 3,60 \text{ DM} : 2 = 1,80 \text{ DM}$

$1\% \text{ von } 400 \text{ DM} = 4,00 \text{ DM}$

$3\frac{1}{2}\% \text{ von } 400 \text{ DM} = 4,00 \text{ DM} \cdot 3,5 = 14,00 \text{ DM}$

Merke:

Man berechnet den **Prozentwert** eines Grundwertes,
indem man zuerst 1% des Grundwertes berechnet
und dann das Ergebnis mit dem **Prozentsatz** multipliziert.

Übungsaufgabe 127

Berechne die Prozentwerte!

a) 1% von

8 DM	36 DM	246 DM	370 DM	1 420 DM	2 654 DM
------	-------	--------	--------	----------	----------

b) 10% von

2 000 DM	2 654 DM	5 600 DM	12 400 DM	48 670 DM	125 000 DM
----------	----------	----------	-----------	-----------	------------

c) 2% , 3% und 5% von

3 DM	18 DM	426 DM	3 475 DM	47 580 DM	136 427 DM
------	-------	--------	----------	-----------	------------

d) $\frac{1}{2}\%$, $\frac{2}{3}\%$ und $\frac{3}{4}\%$ von

12 DM	48 DM	384 DM	7 584 DM	36 408 DM	403 320 DM
-------	-------	--------	----------	-----------	------------

e) $1\frac{1}{2}\%$, $2\frac{2}{3}\%$ und $3\frac{3}{4}\%$ von

60 DM	84 DM	672 DM	6 096 DM	42 864 DM	208 176 DM
-------	-------	--------	----------	-----------	------------

f) 1% und 10% von

12,3 DM	5,7 hl	87,5 kg	0,7 m	65,7 t	43,5 km
---------	--------	---------	-------	--------	---------

g) Verwandle die Brüche in Prozentsätze!

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$

h) Drücke die Prozentsätze durch Brüche aus!

80%	75%	$66\frac{2}{3}\%$	60%	50%	40%	$33\frac{1}{3}\%$	25%	20%
$12\frac{1}{2}\%$	10%	$6\frac{2}{3}\%$	5%	4%	$3\frac{1}{3}\%$	$2\frac{1}{2}\%$	2%	1%

i) Berechne 50% , 25% und 20% von 400 DMk) Berechne $33\frac{1}{3}\%$, $16\frac{2}{3}\%$ und $12\frac{1}{2}\%$ von 360 DMl) Berechne $8\frac{1}{3}\%$, $66\frac{2}{3}\%$ und 75% von 480 DM

Der Prozentwert wird gesucht

Bei der Prozentrechnung unterscheiden wir einen **dreifachen Grundwert**:
einen **reinen Grundwert**,
einen **vermehrten Grundwert** und
einen **verminderten Grundwert**.

Erklärung:

Der **reine Grundwert** ist stets 100% .

Grundwert plus Aufschlag (Gewinn) ergeben den **vermehrten Grundwert**,
d. h., bei einem Aufschlag von 10% ist der vermehrte Grundwert 110% .

Grundwert minus Abschlag (Verlust) ergeben den **verminderten Grundwert**,
d. h., bei einem Abschlag von 15% ist der verminderte Grundwert 85% .

Bei der Berechnung des Prozentwertes unterscheiden wir:

- eine **Prozentrechnung vom Hundert**,
dann berechnen wir den **Prozentwert vom reinen Grundwert**;
- eine **Prozentrechnung auf Hundert**,
dann schließen wir vom **vermehrten Grundwert** auf den **Grundwert**;
- eine **Prozentrechnung im Hundert**,
dann schließen wir vom **verminderten Grundwert** auf den **Grundwert**.

a) Die Prozentrechnung vom Hundert

(Rechnung mit dem reinen Grundwert)

Gegeben sind der **Grundwert** und der **Prozentsatz**;
gesucht wird der **Prozentwert**.

Aufgabe: An 360 DM (**Grundwert**) gewinnt man 5% (**Prozentsatz**).
Berechne den **Prozentwert**!

Ausrechnung:

$$\begin{array}{lcl} \text{Der Grundwert (100\%)} \text{ ist } 360 \text{ DM} & \text{— auf } & \text{den Bruchstrich} = \frac{360}{100} \\ 1\% \text{ ist der } 100. \text{ Teil davon} & \text{— unter } & \text{den Bruchstrich} = \frac{100}{100} \\ 5\% \text{ sind } 5 \times \text{ soviel} & \text{— auf } & \text{den Bruchstrich} = \frac{5}{100} \end{array}$$

$$\text{Bruchstrich: } \frac{360 \text{ DM} \cdot 5}{100} \text{ gekürzt} = 18 \text{ DM}$$

Also beträgt der **Prozentwert 18 DM.**

Merke: Wir berechnen den **Prozentwert** vom **Grundwert**.

Wenn wir auf diese Weise „dreisatzmäßig“ eine Reihe von Aufgaben lösen, dann stellen wir fest:

Auf dem Bruchstrich erscheinen stets der **Grundwert** und der **Prozentsatz**, **unter dem Bruchstrich** steht immer die **Zahl 100**.

Regel: $\text{Prozentwert} = \frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz}}{100}$
--

Wenn wir nun dem **Grundwert** (dem Kapital) den Formelbuchstaben **k**, dem **Prozentsatz** den Formelbuchstaben **p** und dem **Prozentwert** den Formelbuchstaben **z** geben, dann heißt die Formel für die Berechnung des Prozentsatzes:

Formel: $z = \frac{k \cdot p}{100}$
--

Angewandte Aufgaben:

128. Ein Beamter verdient monatlich 576 DM und gibt $16\frac{2}{3}\%$ für Miete aus. Wieviel beträgt die Monatsmiete?
129. Ein Haus, das 36 000 DM gekostet hat, bringt $6\frac{3}{4}\%$ Miete ein. Wie hoch ist der Mietertrag?
130. Ein Untermieter zahlte bislang 64 DM Miete im Monat; nach der Mieterhöhung zahlt er 15% mehr. Wieviel beträgt die neue Jahresmiete?
131. Kaffee verliert beim Rösten 18% des Gewichtes. Wieviel Kaffee behält man von 1 Zentner Rohkaffee nach dem Rösten?
132. Ein Landwirt erntet 48 dz Getreide, davon sind 62% Roggen. Berechne den Wert des Roggens, wenn 1 dz 45 DM kostet?
133. Ein Beamter mit einem Jahreseinkommen von 8 640 DM wird in den Ruhestand versetzt und erhält 75% als Ruhegehalt. Wieviel Ruhegehalt bekommt er monatlich?

134. Ein Angestellter mit einem Monatseinkommen von 650 DM spart für das Studium seiner Kinder monatlich $4\frac{1}{2}\%$. Wieviel spart er in 18 Jahren?
135. Eine Firma hatte einen Jahresumsatz von 1025400 DM. Daran waren der Import mit 62,6% und der Export mit 37,4% beteiligt. Für wieviel DM wurde a) importiert, b) exportiert?
136. Ein Handelsvertreter erhält neben einem festen Gehalt von 370 DM $2\frac{1}{2}\%$ Provision vom Monatsumsatz. Dieser betrug im letzten Monat 36468 DM. Wie groß war sein Monatseinkommen?
137. An einem Betriebsausflug nahmen 880 Personen teil. Davon waren 25% Jugendliche, die eine Verzehrkarte über 5 DM erhielten. Von den Erwachsenen erhielten 55% Männer eine Verzehrkarte über 10 DM, die Ehefrauen eine über 7,50 DM. Wieviel verausgabte der Betrieb für Verzehrkarten?

b) Die Prozentrechnung auf Hundert

(Rechnung mit dem vermehrten Grundwert)

Gegeben sind **vermehrter Grundwert** und **Prozentsatz**;
gesucht wird der **Grundwert**.

Aufgabe: Der neue Preis (**vermehrter Grundwert**) beträgt 378 DM, der Aufschlag (**Prozentsatz**) beträgt 5%.
Berechne den alten Preis (**Grundwert**)!

Ausrechnung:

Der um 5% **vermehrte Grundwert** (100%) beträgt 105% .

$$\begin{array}{lcl} 105\% \text{ (vermehrter Grundwert)} = 378 \text{ DM} & \text{— auf } & \text{den Bruchstrich} = \frac{378}{105} \\ 1\% \text{ ist der } 105. \text{ Teil davon} & \text{— unter } & \text{den Bruchstrich} = \frac{100}{105} \\ 100\% \text{ sind } 100 \times \text{ soviel} & \text{— auf } & \text{den Bruchstrich} = \frac{100}{105} \end{array}$$

$$\text{Bruchstrich: } \frac{378 \text{ DM} \cdot 100}{105} \text{ gekürzt} = 360 \text{ DM}$$

Also beträgt der **Grundwert 360 DM.**

Merke:

Wir schließen vom **vermehrten Grundwert** auf den **Grundwert**.

Wir lösen auch hier dreisatzmäßig eine Reihe von Aufgaben und stellen als Regel fest:

Auf dem Bruchstrich erscheinen stets der **vermehrte Grundwert** und die **Zahl 100**, **unter dem Bruchstrich** erscheint stets der **vermehrte Grundwert**, ausgedrückt in %.

Regel: $\text{Grundwert} = \frac{\text{vermehrter Grundwert} \cdot 100}{\text{vermehrter Grundwert in \%}}$
--

Die Formel drücken wir so aus:

Grundwert = G,

vermehrter Grundwert = v. G.,

vermehrter Grundwert, ausgedrückt in % = v. G. %

$$\text{Formel: } G = \frac{v. G. \cdot 100}{v. G. \%}$$

Angewandte Aufgaben:

138. Nach einer Gehaltserhöhung von 6% erhält ein Beamter ein Monatsgehalt von 639,18 DM. Wie hoch waren die alten Bezüge?
139. Eine Aktentasche, die bei 35% Gewinnaufschlag mit 60,75 DM verkauft werden sollte, wurde wegen Räumung des Geschäfts zum Einkaufspreis abgegeben. Wieviel betrug der Einkaufspreis?
140. Der Monatsumsatz einer Firma ist im Juni um $7\frac{1}{2}\%$ auf 37 625 DM angestiegen. Wie groß war der Umsatz im Mai?
141. Die Werbe- und Reklamekosten einer Firma wurden für das neue Geschäftsjahr um 15% erhöht und betragen nun 3910 DM. Berechne die Werbekosten des vergangenen Jahres!
142. Der Jahresumsatz eines Betriebes betrug 233 220 DM, d. i. 15% mehr als im Vorjahr. Berechne den vorjährigen Jahresumsatz!
143. Nach einer Anzahlung von 52,40 DM bezahlt jemand einen Kühlschrank in 12 Monatsraten von je 35 DM. Der Teilzahlungsaufschlag beträgt 12%. Wieviel hätte der Kühlschrank bei Barzahlung gekostet?

c) Die Prozentrechnung im Hundert

(Rechnung mit dem verminderten Grundwert)

Gegeben sind **verminderter Grundwert** und **Prozentsatz**;
gesucht wird der **Grundwert**.

Aufgabe: Der neue Preis (**verminderter Grundwert**) beträgt 342 DM, der Abschlag (**Prozentsatz**) beträgt 5%.
Berechne den alten Preis (**Grundwert**)!

Ausrechnung:

Der um 5% **verminderte Grundwert** (100%) beträgt **95%**.

$$95\% \text{ (verminderter Grundwert)} = 342 \text{ DM} \text{ — auf den Bruchstrich} = \frac{342 \cdot 100}{95}$$

$$1\% \text{ ist der } 95. \text{ Teil davon} \text{ — unter den Bruchstrich} = \frac{100}{95}$$

$$100\% \text{ sind } 100 \times \text{soviel} \text{ — auf den Bruchstrich} = \frac{100}{95}$$

$$\text{Bruchstrich: } \frac{342 \text{ DM} \cdot 100}{95} \text{ gekürzt} = 360 \text{ DM}$$

Also beträgt der **Grundwert** 360 DM

Merke: Wir schließen vom **verminderten Grundwert** auf den **Grundwert**.

Wir verfahren wie bei den Aufgaben mit vermehrtem Grundwert, setzen nur für den vermehrten den verminderten Grundwert ein und haben dann die Regel und die Formel:

$$\text{Regel: Grundwert} = \frac{\text{verminderter Grundwert} \cdot 100}{\text{verminderter Grundwert in \%}}$$

$$\text{Formel: } G = \frac{v. G. \cdot 100}{v. G. \%}$$

Angewandte Aufgaben

144. Nach Abzug von $2\frac{1}{2}\%$ wurden 331,50 DM auf ein Postscheckkonto überwiesen. Wie hoch war der Rechnungsbetrag?
145. Kaffee verliert beim Rösten 18%. Das Gewicht nach dem Rösten beträgt 295,20 kg. Berechne das Gewicht des Rohkaffees!
146. Ein neuer Motorroller wurde mit 15% Verlust für 2 040 DM weiterverkauft. Wieviel hatte der Motorroller gekostet?
147. Eine Schlafzimmereinrichtung wird wegen einer kleinen Beschädigung um $7\frac{1}{2}\%$ im Preis herabgesetzt und kostet nun 740 DM. Berechne den ursprünglichen Preis!
148. Der Jahresumsatz einer Firma ist um $12\frac{1}{2}\%$ auf 191 520 DM zurückgegangen. Wie groß war der Umsatz des Vorjahres?
149. Der Geschäftsumsatz betrug im Februar 14% weniger als im Januar, und zwar 14 534 DM. Wie hoch war der Umsatz im Januar?

Der Prozentsatz wird gesucht

Gegeben sind der **Grundwert** und der **Prozentwert**;
gesucht wird der **Prozentsatz**.

Aufgabe: Der **Grundwert** ist 360 DM, der **Prozentwert** 18 DM.
Berechne den **Prozentsatz**!

Ausrechnung:

$$\text{An } 360 \text{ DM gewinnt man } 18 \text{ DM} \text{ — auf den Bruchstrich} = \frac{18 \text{ DM}}{360}$$

$$\text{An } 1 \text{ DM gewinnt man den } 360. \text{ Teil} \text{ — unter den Bruchstrich} = \frac{100}{360}$$

$$\text{An } 100 \text{ DM gewinnt man } 100 \times \text{soviel} \text{ — auf den Bruchstrich} = \frac{100}{360}$$

$$\text{Bruchstrich: } \frac{18 \text{ DM} \cdot 100}{360} \text{ gekürzt} = 5 \text{ DM}$$

Also beträgt der **Prozentsatz** 5%

Bei der Berechnung des Prozentsatzes stellen wir fest:

Auf dem Bruchstrich steht immer: **Prozentwert** · 100,
unter dem Bruchstrich steht immer der **Grundwert**.

$$\text{Regel: } \text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Grundwert}}$$

$$\text{Formel: } p = \frac{z \cdot 100}{k}$$

Angewandte Aufgaben

150. Ein Beamter verdient brutto 640 DM und muß 60,80 DM Lohnsteuer zahlen. Wieviel % beträgt der Steuersatz?
151. Die Wohnungsmiete wird von 74 DM auf 82,88 DM erhöht. Wieviel % beträgt die Mieterhöhung?
152. Die Einwohnerzahl einer Stadt stieg von 254 817 auf 273 436. Wieviel % betrug die Zunahme?
153. Ein Haus hat einen Kaufwert von 42 500 DM. Die Jahresmiete beträgt 4 300 DM, die Unkosten und Abgaben belaufen sich auf jährlich 1 750 DM. Zu wieviel % verzinst sich das Haus?
154. In einem Fernmeldeamt befinden sich 3 600 Anrufeinheiten. Davon sind 54 mit Dienstanschlüssen belegt. Wie hoch ist der Prozentsatz?
155. Im Bundesgebiet wurden folgende Ortsgespräche geführt:
im Jahre 1938 332,200 Millionen Gespräche,
im Jahre 1950 423,555 Millionen Gespräche.
Wieviel % beträgt die Zunahme?

3. Der Grundwert wird gesucht

Gegeben sind der **Prozentwert** und der **Prozentsatz**;
gesucht wird der **Grundwert**.

Aufgabe: Der **Prozentwert** ist 18 DM, der **Prozentsatz** 5%.
Berechne den **Grundwert**!

Ausrechnung:

$$\begin{array}{rcl} 5\% \text{ des Grundwertes sind } 18 \text{ DM} & \text{— auf } & \text{den Bruchstrich} = \underline{18 \text{ DM}} \\ 1\% \text{ ist der } 5. \text{ Teil davon} & \text{— unter den Bruchstrich} = & \underline{5} \\ 100\% \text{ sind } 100 \times \text{soviel} & \text{— auf } & \text{den Bruchstrich} = \underline{\cdot 100} \end{array}$$

$$\text{Bruchstrich: } \frac{18 \text{ DM} \cdot 100}{5} \text{ gekürzt} = 360 \text{ DM}$$

Also beträgt der **Grundwert** 360 DM.

Bei der Berechnung des Grundwertes stellen wir fest:

Auf dem Bruchstrich steht immer: **Prozentwert** · 100,
unter dem Bruchstrich steht immer der **Prozentsatz**.

$$\text{Regel: } \text{Grundwert} = \frac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Prozentsatz}}$$

$$\text{Formel: } k = \frac{z \cdot 100}{p}$$

Angewandte Aufgaben

156. Für ein Wohnhaus zahlt ein Mieter $7\frac{1}{2}\%$ des Kaufwertes als Jahresmiete, das sind 5 100 DM. Wie hoch war der Kaufwert des Hauses?
157. Ein Betrieb zahlt monatlich $3\frac{1}{2}\%$ Umsatzsteuer, und zwar 337,75 DM. Wieviel beträgt der Monatsumsatz?
158. Eine Aktiengesellschaft verteilt 12% Dividende, und zwar 55 896 DM. Berechne das Grundkapital!
159. Bei einem Konkursverfahren erhielt ein Gläubiger 45% seiner Forderung aus der Konkursmasse, und zwar 3809,25 DM. Wie hoch war seine Forderung?
160. A bezieht eine monatliche Rente von 126 DM. Welches Kapital bringt bei einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}\%$ die gleichen Zinsen?
161. Im Jahre 1940 hatte die Stadt E. 38 200 Fernsprechteilnehmer. 1945 waren es 32% weniger, während am 1. Januar 1948 gegenüber 1945 die Zahl wieder um 25% angestiegen war. Wieviel Anschlüsse bestanden am 1. Januar 1948?

Zusammenstellung der Formeln der Prozentrechnung

$$\text{Berechnung des Prozentwertes} \quad z = \frac{k \cdot p}{100}$$

$$\text{Berechnung des Prozentsatzes} \quad p = \frac{z \cdot 100}{k}$$

$$\text{Berechnung des Grundwertes} \quad k = \frac{z \cdot 100}{p}$$

Merke:

1. Bei den Formeln der Prozentrechnung steht der gesuchte Formelbuchstabe immer links, die zwei anderen Formelbuchstaben stehen rechts vom Gleichheitszeichen.
2. Die Grundformel: $z = \frac{k \cdot p}{100}$ prägen wir uns fest ein!
3. Bei den zwei anderen Formeln steht der gesuchte Formelbuchstabe links vom Gleichheitszeichen;
rechts vom Gleichheitszeichen steht:
auf dem Bruchstrich immer $z \cdot 100$,
unter dem Bruchstrich der noch fehlende Buchstabe.

2. Die Promillerechnung

Die Promillerechnung ist eine Dreisatzrechnung mit der feststehenden Zahl 1000 ohne Berücksichtigung der Zeit.

Promille (lat.: pro mille) bedeutet für oder vom Tausend.

Das Zeichen für Promille ist ‰.

Die Promillerechnung wird vor allem im Versicherungswesen (bei Lebens-, Feuer-versicherungen usw.) angewandt.

Den Versicherungsschein nennt man **Police**, die Versicherungsbeiträge **Prämien**.

Auch bei der Promillerechnung erscheinen drei Werte:

Grundwert, **Promillewert** und **Promillesatz**.

Die **Versicherungssumme** ist der **Grundwert**,
die **Prämie** ist der **Promillewert**,
der **Prämiensatz** ist der **Promillesatz**.

Der Grundwert ist immer das Ganze oder 1000‰.

a) Der Promillewert wird gesucht

Die Regeln und Formeln der Promillerechnung entsprechen den Regeln und Formeln der Prozentrechnung; statt ‰ wird ‰ eingesetzt.

Die feststehende Zahl heißt hier 1000.

$$\text{Regel: Promillewert} = \frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Promillesatz}}{1000}$$

$$\text{Formel: } z = \frac{k \cdot p}{1000}$$

Angewandte Aufgaben

162. A hat seinen Hausrat mit 35 000 DM gegen Feuer versichert. Die Jahresprämie beträgt $1\frac{1}{4}\%$. Wieviel muß er jährlich zahlen?
163. Ein massives Wohnhaus im Werte von 54 000 DM ist mit $1\frac{1}{2}\%$ gegen Feuer versichert. Wie hoch ist die Jahresprämie, wenn 15% des Versicherungsbeitrages als Steuer abgeführt werden müssen?
164. Ein Geschäftsmann versichert seine vier Schaufensterscheiben mit je 1 200 DM. Wieviel muß er halbjährlich zahlen, wenn die Prämie $2\frac{1}{2}\%$ und die Steuer $12\frac{1}{2}\%$ des Versicherungsbeitrages ausmachen?

b) Der Promillesatz wird gesucht

$$\text{Regel: Promillesatz} = \frac{\text{Promillewert} \cdot 1000}{\text{Grundwert}}$$

$$\text{Formel: } p = \frac{z \cdot 1000}{k}$$

Angewandte Aufgaben

165. Ein Haus mit einem Wert von 54 600 DM ist versichert. Die jährliche Prämie beträgt 68,25 DM. Wieviel ‰ sind das?
166. Die Postgebühren für Einzahlungen im Inland betragen:
- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| bei Postanweisungen | bei Zahlkarten |
| bis 10 DM 30 Pfg | bis 10 DM 20 Pfg |
| bis 50 DM 50 Pfg | bis 50 DM 30 Pfg |
| bis 100 DM 80 Pfg | bis 100 DM 40 Pfg |
- Wieviel ‰ betragen die einzelnen Gebührensätze?
167. Ein Landwirt hat sein Getreide mit 16 800 DM gegen Hagel versichert. Er zahlt einschließlich 3,00 DM Versicherungssteuer 32,40 DM Jahresprämie. Wieviel ‰ nimmt die Versicherung?

c) der Grundwert wird gesucht

$$\text{Regel: Grundwert} = \frac{\text{Promillewert} \cdot 1000}{\text{Promillesatz}}$$

$$\text{Formel: } k = \frac{z \cdot 1000}{p}$$

Angewandte Aufgaben

168. A versichert sich gegen Einbruchdiebstahl. Er zahlt $1\frac{3}{4}\%$, das sind vierteljährlich 14,00 DM. Wie hoch ist die Versicherungssumme?
169. Ein Bauer versichert sein Getreide gegen Unwetterschaden. Die Prämie beträgt $1\frac{1}{2}\%$, der Versicherungsbeitrag einschließlich 10% Versicherungssteuer 39,60 DM. Wie groß ist die Versicherungssumme?
170. A zahlte bei einer Feuerversicherung $1\frac{3}{4}\%$ Prämie, und zwar halbjährlich 43,75 DM. a) Wie groß war die Versicherungssumme? b) Welche Entschädigung wurde gezahlt, wenn ein Brandschaden auf 40% geschätzt wurde?

VIII. Die Brutto-, Netto-, Tararechnung

Das Gewicht der reinen Ware nennt man **Reingewicht** oder **Nettogewicht**.

Das Gewicht der **Verpackung** (Kisten, Fässer usw.) nennt man **Tara**.

Das Gewicht der **Ware zuzüglich der Verpackung** nennt man **Gesamtgewicht** oder **Bruttogewicht**.

Das **Bruttogewicht** beträgt stets 100%.

Regel:	Brutto	Brutto	Netto
	— Tara	— Netto	+ Tara
	= Netto	= Tara	= Brutto

Angewandte Aufgaben

171. Eine Firma erhält 3 Kisten Seife, die 25,400 kg, $24\frac{1}{2}$ kg und 26,125 kg brutto wiegen. Die leeren Kisten wiegen 3,850 kg, 3,600 kg und $3\frac{3}{4}$ kg. Wieviel beträgt das gesamte Nettogewicht?
172. Drei Postpakete wiegen: $3\frac{5}{8}$ kg, 3,650 kg und $3\frac{1}{2}$ kg brutto, das Nettogewicht beträgt 2,900 kg, $2\frac{3}{4}$ kg und 2,725 kg. Wieviel ist die gesamte Tara?
173. Das Nettogewicht von 2 Sendungen beträgt 36,875 kg und 35,250 kg. Die Tara der ersten Sendung ist $4\frac{1}{2}$ kg, die der zweiten $4\frac{1}{4}$ kg. Wieviel beträgt das gesamte Bruttogewicht?
174. Ein Gemüsehändler kauft 6 Kisten Äpfel. Jede Kiste wiegt brutto 60 kg, die Tara ist $6\frac{2}{3}\%$. Ein Zentner Äpfel kostet 56 DM. Wieviel hat der Händler zu zahlen?
175. Ein Kaufmann erhielt ein Faß Butter, das mit 108,80 DM (Nettopreis) in Rechnung gestellt war. Die Tara betrug $11\frac{1}{9}\%$. 1 kg Butter kostet 6,80 DM. Wieviel betrug das Bruttogewicht?
176. Eine Sendung Ware wog laut Frachtbrief 220 kg und kostete laut Rechnung 136 DM. 1 kg Ware (netto) kostete 0,68 DM. Wieviel % betrug die Tara?

IX. Die Gewinn- und Verlustrechnung

Den Preis, den ein Kaufmann für seine Ware zahlen muß, nennt man **Einkaufspreis**.

Zählt man zum Einkaufspreis die entstandenen **Spesen** (Reisekosten, Fernspreckgebühren, Briefporto, Fracht, Verpackung usw.), so erhält man den **Bezugspreis**.

Zählt man zum Bezugspreis noch die **Geschäftskosten** (Ladenmiete, Heizung, Beleuchtung, Löhne und Gehälter, Steuern, Versicherung, Werbung usw.), so erhält man den **Selbstkostenpreis**. Dieser ist als Grundwert stets 100%.

Zählt man zum **Selbstkostenpreis** den **Gewinn**, so erhält man den **Verkaufspreis**.

Merke:	Einkaufspreis	+	Spesen	=	Bezugspreis
	Bezugspreis	+	Geschäftskosten	=	Selbstkostenpreis
	Selbstkostenpreis	+	Gewinn	=	Verkaufspreis

Unter gewissen Umständen, z. B. bei beschädigter oder leichtverderblicher Ware, beim Sommer- und Winterschlußverkauf oder beim Räumungsausverkauf, muß der Kaufmann seine Ware mit **Verlust** verkaufen.

Zieht man vom **Selbstkostenpreis** den **Verlust** ab, so erhält man ebenfalls den **Verkaufspreis**.

Merke:	Selbstkostenpreis	—	Verlust	=	Verkaufspreis
--------	-------------------	---	---------	---	---------------

Angewandte Aufgaben

177. Ein Kaufmann erhält eine Sendung Ware im Werte von 1 432 DM. Die Spesen betragen 18,40 DM, die Geschäftskosten $12\frac{1}{2}\%$ des Bezugspreises, als Gewinn werden 10% der Selbstkosten zugeschlagen. Berechne a) den Bezugspreis, b) den Selbstkostenpreis, c) den Verkaufspreis!
178. Für eine Wiese zahlt ein Bauer jährlich 72 DM Pacht. Den Heuertrag verkauft er für 104,40 DM. Wieviel % beträgt der Gewinn?
179. Ein Kraftwagen, der neu 6 750 DM kostete, muß für 4 500 DM abgestoßen werden. Wieviel % beträgt der Verlust?
180. Ein Wirt kauft 60 l Wein für 288 DM und will $33\frac{1}{3}\%$ daran verdienen. Wieviel kostet nun 1 Flasche ($\frac{3}{4}$ l) im Verkauf?
181. Der Preis eines Anzuges wurde beim Ausverkauf um 35% herabgesetzt und betrug 124,80 DM. Wieviel kostete der Anzug früher?

X. Die Rabatt- und Skontorechnung

Der **Rabatt** ist ein in **Prozenten** ausgedrückter **Preisnachlaß**, der bei **Barzahlung**, beim **Bezug größerer Mengen** oder bei **Beschädigung von Waren** gewährt wird.

Zieht man den **Rabatt** von der **Kaufsumme** ab, so erhält man den **Barzahlungsbetrag**.

Merke:	Kaufsumme	—	Rabatt	=	Barzahlungsbetrag
--------	-----------	---	--------	---	-------------------

Wird eine Ware vom Käufer vor dem vereinbarten Termin bezahlt, so gewährt der Verkäufer sehr oft einen **Nachlaß**, den man **Skonto** nennt.

Zieht man den **Skontobetrag** vom **Rechnungsbetrag** ab, so erhält man den **Barzahlungsbetrag**.

Merke:	Rechnungsbetrag	—	Skonto	=	Barzahlungsbetrag
--------	-----------------	---	--------	---	-------------------

Angewandte Aufgaben

182. Ein Weinhändler liefert: 25 Flaschen Moselwein zu 3,75 DM, 15 Flaschen Rheinwein zu 4,30 DM und 10 Flaschen Rotwein zu 3,95 DM. Für Glas und Verpackung berechnet er je Flasche 0,35 DM. Das Ziel beträgt 2 Monate. Da sofort bezahlt wird, gewährt er $2\frac{1}{2}\%$ Skonto (Nachlaß). Wieviel ist zu zahlen?
183. Ein Kaufmann erhält 3 Sendungen Ware: 32 kg Nudeln, 75 kg Mehl und 68 kg Zucker (alles brutto). Die Tara beträgt bei jeder Sendung $2\frac{1}{2}\%$. 1 kg Nudeln (netto) kostet 2,80 DM, 1 kg Mehl 1,10 DM, 1 kg Zucker 1,35 DM. Wieviel beträgt die Barzahlung, wenn 6% Rabatt gewährt werden?
184. Anstreicher erhalten beim Tapetenhändler eine Provision (Vermittlungsgebühr) von 10%. Es wurden verkauft: 25 Rollen Tapete zu 4,50 DM, 18 Rollen zu 3,35 DM und 32 Rollen zu 3,80 DM. Berechne die Barzahlung!
185. Im Schlußverkauf sind die Preise stark herabgesetzt. Alter Preis: 65,50 DM (96,60 DM, 142 DM, 228,75 DM), neuer Preis: 52,40 DM (72,45 DM, 99,40 DM, 152,50 DM). Wieviel % beträgt der Preisnachlaß?
186. Von einem Rechnungsbetrag von 476 DM werden 23,80 DM als Skonto abgezogen. Wieviel % sind das?
187. Bei Barzahlung wurden von einer Rechnung $3\frac{3}{4}\%$ als Skonto abgezogen, und zwar 16,50 DM. Berechne die Rechnungssumme!
188. Eine Rechnung wurde mit 791,30 DM bar bezahlt, der Skontosatz betrug $3\frac{1}{2}\%$. Berechne den Skontobetrag!

XI. Die Zins- und Diskontrechnung

1. Die Zinsrechnung

Die **Zinsrechnung** ist eine **Prozentrechnung** mit Berücksichtigung der **Zeit**.

Den drei Werten der **Prozentrechnung**:

Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

entsprechen bei der **Zinsrechnung** die Werte:

Kapital, Zinsen und Zinsfuß;

als 4. Wert erscheint bei der Zinsrechnung die **Zeit**.

Jede Geldsumme, die einen Ertrag abwirft, nennt man **Kapital**.

Den Ertrag, den ein Kapital abwirft, nennt man **Zinsen**.

Den Prozentsatz, der bei Zinszahlungen angegeben ist, nennt man **Zinsfuß**.

Die **Zeit**: Bei der Zinsrechnung gilt **1 Jahr** immer als **360 Tage**,
1 Monat immer als **30 Tage**.

Von den 4 Werten: **Kapital, Zinsen, Zinsfuß** und **Zeit** sind stets 3 Werte gegeben, der 4. Wert wird gesucht.

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) Gegeben sind Kapital, Zinsfuß und Zeit | — gesucht werden die Zinsen |
| b) Gegeben sind Kapital, Zinsen und Zeit | — gesucht wird der Zinsfuß |
| c) Gegeben sind Zinsfuß, Zinsen und Zeit | — gesucht wird das Kapital |
| d) Gegeben sind Kapital, Zinsfuß und Zinsen | — gesucht wird die Zeit |

Die **Zinsen** berechnet man nach der Höhe des **Kapitals**, nach dem angegebenen **Zinsfuß** und nach der angegebenen **Zeit**.

Je größer das **Kapital**, je höher der **Zinsfuß** und je länger die **Zeit** ist, desto mehr **Zinsen** sind zu zahlen.

Bei der **einfachen Zinsrechnung** bleiben die **Zinseszinsen** (siehe unten) **unberücksichtigt**.

Ausgeliehenes Geld nennt man **Darlehen**; der Verleiher des Geldes ist der **Gläubiger**, der Empfänger ist der **Schuldner**.

Bei **kleineren Darlehen** erhält der Gläubiger vom Schuldner einen **Schuldschein**.

Bei **größeren Darlehen** wird die Schuldsumme als **Hypothek** beim Amtsgericht auf dem Grundbuchamt (Katasteramt) in das **Grundbuch** eingetragen.

Der Gläubiger erhält für das Darlehen einen **Hypothekenbrief**.

Bei **Rückgabe der Schuldsumme** wird die im Grundbuch eingetragene **Hypothek** gelöscht.

Die Zinseszinsrechnung

Bei der **Zinsrechnung** werden nur die **einfachen Zinsen** berechnet.

Banken, Sparkassen und Versicherungsgesellschaften berechnen aber auch **Zinseszinsen**.

Die fälligen **Zinsen** werden **zum Kapital** geschlagen und mit dem Kapital weiterverzinst.

Da die Berechnung der Zinseszinsen sehr umständlich ist, benutzen die Kassen und Banken **Zinseszinstafeln**; diese geben an, zu welchem Betrag ein **Kapital von 1 DM** bei bestimmten Prozentsätzen im Laufe der Jahre anwächst.

Die in der Zinseszinstafel abgelesene **Zinseszinszahl** wird mit dem gegebenen **Kapital** multipliziert.

Die Diskontrechnung

Die **Diskontrechnung** ist eine **Rabattrechnung** mit Berücksichtigung der **Zeit**.

Der **Diskont** (auch Diskonto oder Skonto genannt) ist der **Zinsbetrag**, der bei Ankauf einer noch nicht fälligen Forderung **abgezogen** wird.

Der **Zinsfuß** heißt bei der Diskontrechnung **Diskontfuß**.

Der **Diskont** bezieht sich, wenn nicht anders bestimmt, immer auf **1 Jahr** (p. a. = pro anno = aufs Jahr).

Wie bei der Zinsrechnung gilt auch bei der Diskontrechnung

1 Jahr immer als **360 Tage**,

1 Monat immer als **30 Tage**.

Von den vier Werten:

Rechnungssumme, Diskont, Diskontfuß und **Zeit**

sind wie bei der Zinsrechnung stets **drei** Werte gegeben, der 4. Wert wird gesucht.

Merke: **Rechnungssumme — Diskont = Barzahlung**

Die Zinsrechnung

1. Die Zinsen werden gesucht

Gegeben sind das **Kapital**, der **Zinsfuß** und die **Zeit**;
gesucht werden die **Zinsen**.

Aufgabe:

Wieviel Zinsen bringen 468 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

Ansatz:

100 DM bringen in 1 Jahr $3\frac{1}{3}$ DM Zinsen

1 DM bringt in $2\frac{1}{2}$ Jahren ? DM Zinsen?

Ausrechnung:

100 DM bringen in 1 Jahr $\frac{10}{3}$ DM Zinsen

1 DM bringt in 1 Jahr $\frac{10}{3 \cdot 100}$ DM Zinsen

468 DM bringen in 1 Jahr $\frac{10 \cdot 468}{3 \cdot 100}$ DM Zinsen

468 DM bringen in $\frac{1}{2}$ Jahr $\frac{10 \cdot 468}{3 \cdot 100 \cdot 2}$ DM Zinsen

468 DM bringen in $2\frac{1}{2}$ Jahren $\frac{10 \cdot 468 \cdot 5}{3 \cdot 100 \cdot 2}$ DM Zinsen

Bruchstrich:

$$\text{Zinsen} = \frac{10 \cdot 468 \text{ DM} \cdot 5}{3 \cdot 100 \cdot 2}$$

Wir stellen die Faktoren um und setzen das **Kapital an den Anfang des Bruchstriches**:

$$\text{Zinsen} = \frac{468 \text{ DM} \cdot 10 \cdot 5}{100 \cdot 3 \cdot 2} \text{ gekürzt} = 39 \text{ DM}$$

Also bringen 468 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen.

Merke:

Das **Kapital** (480 DM) steht **auf dem Bruchstrich**.
Der **Zinsfuß (Prozentsatz)** steht **auf dem Bruchstrich**.
Die **Zeit** ($2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ Jahre) steht **auf dem Bruchstrich**.
Die **Zahl 100** steht **unter dem Bruchstrich**.

Ist der **Zinsfuß** eine **gemischte Zahl** ($3\frac{1}{3}\%$), so verwandeln wir die gemischte Zahl in einen **unechten Bruch** ($\frac{10}{3}$) und setzen den **Zähler auf den Bruchstrich** und den **Nenner unter den Bruchstrich**.

Die vier Werte der **Zinsrechnung**:

Kapital, Zinsen, Zinsfuß und **Zeit** sowie

die vier Werte der **Diskontrechnung**:

Rechnungssumme, Diskont, Diskontfuß und **Zeit (Verfalltag)**

bezeichnen wir kurz mit den **Formelbuchstaben k, z, p und t**,
und zwar:

das **Kapital** und die **Rechnungssumme** mit **k**,
die **Zinsen** und den **Diskont** mit **z**,
den **Zinsfuß** (Prozentsatz) und **Diskontfuß** mit **p**,
die **Zeit** (tempus) und den **Verfalltag** mit **t**.

Zinsformel:

$$\begin{aligned} \text{Zinsen} &= \frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuß} \cdot \text{Zeit}}{100} & z &= \frac{k \cdot p \cdot t}{100} \\ \text{Diskont} &= \frac{\text{Rechnungssumme} \cdot \text{Diskontfuß} \cdot \text{Zeit}}{100} & z &= \frac{k \cdot p \cdot t}{100} \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 189

Berechne die Jahres-, Monats- und Tageszinsen!

- | | |
|---|--|
| a) 300 DM zu $4\frac{1}{2}\%$ in 3 Jahren | b) 800 DM zu $3\frac{1}{2}\%$ in 5 Jahren |
| c) 2560 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ in $3\frac{3}{4}$ Jahren | d) 6450 DM zu $6\frac{2}{3}\%$ in $3\frac{1}{2}$ Jahren |
| e) 240 DM zu $5\frac{1}{2}\%$ in 9 Monaten | f) 380 DM zu $3\frac{2}{3}\%$ in $5\frac{1}{2}$ Monaten |
| g) 3240 DM zu $4\frac{1}{2}\%$ in $\frac{2}{3}$ Monaten | h) 7450 DM zu $3\frac{3}{4}\%$ in $5\frac{2}{3}$ Monaten |
| i) 400 DM zu $5\frac{1}{2}\%$ in 21 Tagen | k) 800 DM zu $8\frac{1}{2}\%$ in 33 Tagen |
| l) 750 DM zu $4\frac{1}{2}\%$ in 25 Tagen | m) 650 DM zu $3\frac{1}{4}\%$ in 56 Tagen |

Merke:

Die Zeit (t) erscheint am Bruchstrich immer als Jahr

$$\begin{aligned} 3 \text{ Mon.} &= \frac{1}{4} \text{ Jahr}, & 4 \text{ Mon.} &= \frac{1}{3} \text{ Jahr}, & 6 \text{ Mon.} &= \frac{1}{2} \text{ Jahr}; \\ 1 \text{ Mon.} &= \frac{1}{12} \text{ Jahr}, & 5 \text{ Mon.} &= \frac{5}{12} \text{ Jahr}, & 7 \text{ Mon.} &= \frac{7}{12} \text{ Jahr}; \\ \frac{1}{2} \text{ Mon.} &= \frac{1}{24} \text{ Jahr}, & \frac{1}{3} \text{ Mon.} &= \frac{1}{36} \text{ Jahr}, & \frac{1}{4} \text{ Mon.} &= \frac{1}{48} \text{ Jahr}; \\ 1 \text{ Tag} &= \frac{1}{360} \text{ Jahr}, & 27 \text{ Tage} &= \frac{27}{360} \text{ Jahr}, & 153 \text{ Tage} &= \frac{153}{360} \text{ Jahr}. \end{aligned}$$

Den **Zähler** des Bruches setzen wir **auf den Bruchstrich**,
den **Nenner unter den Bruchstrich**.

Die Berechnung der Zinstage

In vielen Zinsrechenaufgaben sind die **Zinstage**, d. i. die **Anzahl der Tage**, für die **Zinsen gezahlt werden soll**, nicht angegeben; die Zinstage müssen also berechnet werden.

Bei der **Berechnung der Zinstage** dürfen keine Fehler gemacht werden; denn wenn die **Zinstage falsch** berechnet sind, müssen auch die berechneten **Zinsen falsch** sein. Um bei der Berechnung der Zinstage jeden Fehler auszuschalten, wenden wir folgende Methode an.

Wir berechnen die Zinstage

Beispiel a)

vom 14. März bis 26. Juli

$$\frac{26 - 14}{\text{VII} - \text{III}} = \frac{12}{\text{IV}} = 4 \text{ Monate } 12 \text{ Tage } (4 \cdot 30 + 12) = \underline{\underline{132 \text{ Tage}}}$$

Merke:

Die **Tage** setzen wir mit **arabischen Ziffern auf den Bruchstrich**, die **Monate** kommen mit **römischen Ziffern unter den Bruchstrich**. Das **spätere Datum** steht vorne, das **frühere** steht hinten.

$$\text{Also: } \frac{26 - 14}{\text{VII} - \text{III}}$$

Nun **subtrahieren** wir die **Tage**: $26 - 14 = 12 \text{ Tage}$
dann **subtrahieren** wir die **Monate**: $\text{VII} - \text{III} = \text{IV} \text{ Monate}$
Ergebnis: IV Monate und 12 Tage $(4 \cdot 30 + 12) = \underline{\underline{132 \text{ Tage}}}$

Beispiel b)

vom 18. Februar bis 12. August

$$\frac{12 - 18}{\text{VIII} - \text{II}} = \frac{42 - 18}{\text{VII} - \text{II}} = \frac{24}{\text{V}} = 5 \text{ Monate } 24 \text{ Tage } (5 \cdot 30 + 24) = \underline{\underline{174 \text{ Tage}}}$$

Merke:

Wir schreiben zunächst wie in Beispiel a) die **Tage** und **Monate** an den **Bruchstrich**:

$$\frac{12 - 18}{\text{VIII} - \text{II}}$$

Die Tage (12—18) kann man nicht subtrahieren.

Wir leihen deshalb bei den VIII Monaten 1 Monat = 30 Tage.

Wir addieren die 30 Tage zu den 12 Tagen und rechnen:

$$\frac{(30+12)=42}{(\text{VIII}-\text{I})=\text{VII}}; \quad \frac{42 - 18}{\text{VII} - \text{II}} = \frac{24 \text{ Tage}}{\text{V} \text{ Monate}}$$

Ergebnis: V Monate und 24 Tage $(5 \cdot 30 + 24) = \underline{\underline{174 \text{ Tage}}}$

Beispiel c)

vom 21. November bis zum 8. Februar des nächsten Jahres

$$\frac{8 - 21}{\text{XIV} - \text{XI}} = \frac{38 - 21}{\text{XIII} - \text{XI}} = \frac{17}{\text{II}} = 2 \text{ Monate } 17 \text{ Tage } (2 \cdot 30 + 17) = \underline{\underline{77 \text{ Tage}}}$$

Merke:

Die Monate des nächsten Jahres erhalten folgende römische Ziffern:

Januar = XIII Februar = XIV März = XV usw.

Wir schreiben die Tage und Monate an den Bruchstrich,

entleihen 1 Monat = 30 Tage und rechnen

$$\frac{38 - 21}{\text{XIII} - \text{XI}} = \frac{17 \text{ Tage}}{\text{II} \text{ Monate}}$$

Ergebnis: II Monate und 17 Tage $(2 \cdot 30 + 17) = \underline{\underline{77 \text{ Tage}}}$

Angewandte Aufgaben

190. A leiht zwei Kapitalien aus: 8 460 DM zu 5 % und 10 350 DM zu $3\frac{1}{2}\%$. Berechne die Jahreszinsen!
191. B hat drei Geldsummen ausgeliehen: 2 400 zu $3\frac{2}{3}\%$, 1 560 DM zu $3\frac{1}{2}\%$ und 1 680 DM zu $4\frac{1}{4}\%$. Wieviel betragen die gesamten monatlichen Zinsen?
192. C hat am 8. Mai 1 275 DM geliehen. Er muß $6\frac{2}{3}\%$ Zinsen zahlen. Wieviel muß er am 23. Juli an Kapital und Zinsen zurückzahlen?
193. Eine Hypothek von 24 000 DM wurde bisher mit $6\frac{1}{2}\%$ verzinst. Wieviel Zinsen sind nun monatlich mehr zu zahlen, wenn der Zinsfuß auf $7\frac{1}{4}\%$ erhöht wird?
194. M nimmt auf sein Haus, das eine Jahresmiete von 4 200 DM einbringt, eine Hypothek von 15 000 DM zu $5\frac{1}{2}\%$ auf. Wieviel bleibt ihm nach Zahlung der Hypothekenzinsen monatlich von der Miete noch übrig?
195. Ein Haus im Werte von 64 000 DM wird verkauft. Die Anzahlung beträgt 18 000 DM, der Rest wird als 1. Hypothek zu $6\frac{1}{2}\%$ eingetragen. Berechne die halbjährlichen Hypothekenzinsen!
196. Auf ein Haus, das 48 000 DM wert ist, sind 3 Hypotheken eingetragen: eine 1. Hypothek von 12 000 DM zu $5\frac{1}{2}\%$, eine 2. Hypothek von 7 500 DM zu $6\frac{2}{3}\%$ und eine 3. Hypothek von 3 250 DM zu $8\frac{1}{4}\%$. Wieviel betragen die vierteljährlichen Hypothekenzinsen?
197. Ein Sparer zahlt bei einer Sparkasse ein: am 15. Januar 675 DM, am 12. März 325 DM, am 18. April 835 DM. Die Sparkasse zahlt $4\frac{1}{2}\%$ Zinsen. Wieviel betragen die Zinsen am Schlusse des Jahres? (Bei der Berechnung der Zinstage hat jeder Monat 30 Tage.)
198. Eine am 1. April ausgeliehene Schuldsomme von 2 500 DM sollte am 1. Oktober mit $6\frac{1}{2}\%$ Zinsen zurückgezahlt werden, wurde aber erst am 1. Januar gezahlt. Wieviel betrug dann die Rückzahlung, wenn für Verzugszinsen $8\frac{1}{2}\%$ berechnet wurden?

199. An einem Unternehmen ist A mit 165 450 DM, B mit 124 500 DM und C mit 96 800 DM beteiligt. Am Ende des Geschäftsjahres wird ein Reingewinn von 58 012,51 DM errechnet. Für sein angelegtes Kapital erhält jeder Teilhaber vorerst $6\frac{1}{2}\%$ Zinsen. Der Rest des Gewinnes wird zu gleichen Teilen aufgeteilt. Wieviel DM erhält jeder?

200. A muß nach 3 Monaten 270 DM bezahlen. Der Diskontfuß beträgt $3\frac{1}{3}\%$. Er zahlt 24 Tage vor dem Fälligkeitstage. Wieviel beträgt die Barzahlung?

201. B hat nach 3 Monaten 720 DM zu zahlen. Er zahlt schon nach 48 Tagen. Der Diskontfuß beträgt $\frac{1}{2}\%$ je Monat. Wieviel muß er bezahlen?

202. Eine Schuldsomme von 1 200 DM wurde 54 Tage vor dem Verfalltag mit $3\frac{1}{2}\%$ Diskont zurückgezahlt. Wieviel betrug die Rückzahlung?

203. Eine Sendung Kaffee wog brutto 150 kg. Die Tara betrug 2% , der Nettopreis für 1 kg Kaffee 16,80 DM, das Ziel 3 Monate. Die Ware wird 2 Monate nach Empfang bezahlt, der Diskontfuß betrug $4\frac{1}{2}\%$. Wie hoch war der Barzahlungsbetrag?

2. Der Zinsfuß wird gesucht

Gegeben sind Kapital, Zinsen und Zeit;
gesucht wird der Zinsfuß.

Aufgabe:

468 DM bringen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen. Wie hoch ist der Zinsfuß?

Ansatz:

468 DM bringen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen
100 DM bringen in 1 Jahr ? DM Zinsen?

Ausrechnung:

468 DM	bringen in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	$\frac{39}{\quad}$	DM Zinsen
100 DM	bringt in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	$\frac{39}{468}$	DM Zinsen
100 DM	bringen in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	$\frac{39 \cdot 100}{468}$	DM Zinsen
100 DM	bringen in	$\frac{1}{2}$ Jahr	$\frac{39 \cdot 100}{468 \cdot 5}$	DM Zinsen
100 DM	bringen in	1 Jahr	$\frac{39 \cdot 100 \cdot 2}{468 \cdot 5}$	DM Zinsen

Bruchstrich:

$$\text{Zinsfuß} = \frac{39 \text{ DM} \cdot 100 \cdot 2}{468 \cdot 5} \text{ gekürzt} = 3\frac{1}{3} \text{ DM}$$

Also beträgt der Zinsfuß $3\frac{1}{3}\%$

Formel;

$$\text{Zinsfuß} = \frac{\text{Zinsen} \cdot 100}{\text{Kapital} \cdot \text{Zeit}}$$

$$p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot t}$$

$$\text{Diskontfuß} = \frac{\text{Diskont} \cdot 100}{\text{Rechnungssumme} \cdot \text{Zeit}}$$

$$p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot t}$$

Übungsaufgabe 204

Berechne den Zinsfuß!

	Kapital:	Zeit:	Zinsen:		Kapital:	Zeit:	Zinsen:
a)	240 DM	$2\frac{1}{2}$ Jahre	20,00 DM	b)	172 DM	$3\frac{3}{4}$ Jahre	43,00 DM
c)	640 DM	4 Mon.	9,60 DM	d)	525 DM	9 Mon.	15,75 DM
e)	840 DM	72 Tage	5,88 DM	f)	450 DM	168 Tage	11,55 DM

Angewandte Aufgaben:

205. Ein Beamter zahlt von seinem Monatsgehalt, das 748,00 DM beträgt, 82,28 DM Lohnsteuer. Wieviel % beträgt die Lohnsteuer?

206. a) 560 DM sind nach $2\frac{1}{4}$ Jahren auf 607,25 DM,

b) 2560 DM sind nach $7\frac{1}{2}$ Monaten auf 2632,00 DM,

c) 2430 DM sind nach 108 Tagen auf 2481,03 DM angewachsen.

Berechne den Zinsfuß!

207. Vom 1. Juli 1961 bis 1. Oktober 1962 stiegen 3 600 DM durch die Zinsen auf 3 780 DM an. Wieviel % betrug der Zinsfuß?

208. 9525 DM bringen in 1 Jahr ebensoviel Zinsen wie 6350 DM zu 6% in 2 Jahren. Berechne den Zinsfuß des ersten Kapitals!

209. Ein Schuldner zahlt eine Summe von 1 280 DM nach 5 Monaten einschließlich der Zinsen mit 1304 DM zurück. Wieviel betrug der Zinsfuß?

210. Ein Kaufmann leiht für ein kurzfristiges Geschäft 5000 DM und zahlt nach 3 Monaten 5150 DM zurück. Berechne den Zinsfuß!

211. Eine am 13. Mai fällige Rechnungssumme von 624 DM wird nach erfolgloser Mahnung am 25. September durch Postauftrag in Höhe von 641,16 DM eingezogen. Wieviel % Verzugszinsen wurden berechnet?
212. Ein am 1. Januar angelegtes Sparkonto bei einer Bank über 360 DM wurde 4 Monate später wieder aufgelöst. 364,20 DM wurden ausgezahlt. Wieviel % Zinsen zahlte die Bank?
213. Ein Haus hat einen Wert von 40000 DM. Es bringt monatlich 150 DM Miete ein. Für Unkosten und Steuern müssen vierteljährlich 50 DM abgerechnet werden. Wie hoch verzinst sich das Haus?
214. Ein Rechnungsbetrag von 450 DM, fällig am 11. Mai, wird am 23. Oktober durch Postauftrag über 474,30 DM eingezogen. Wieviel % Verzugszinsen sind berechnet?
215. A bezahlt eine Rechnung, die 3 Monate Ziel hatte, 50 Tage vor dem Fälligkeitstage mit 573,60 DM. Der Diskont betrug 2,40 DM. Wie hoch war der Diskontfuß?
216. B bezahlt eine am 12. April fällige Rechnung von 270 DM am 2. März mit 269,25 DM. Berechne den Diskontfuß!
217. Eine Rechnung von 840 DM war am 11. Mai fällig; am 23. März bereits wurden 836,64 DM durch Postscheck überwiesen. Berechne den Diskontfuß!
218. Jemand erhält eine Kiste Wein: 30 Flaschen Rheinwein zu 2,40 DM, 20 Flaschen Moselwein zu 3,20 DM und 10 Flaschen Rotwein zu 3,60 DM. Er bezahlt die Rechnung, die 3 Monate Ziel hat, sofort mit 171,14 DM. Wieviel % beträgt der Diskont?

3. Das Kapital wird gesucht

Gegeben sind Zinsfuß, Zinsen und Zeit;
gesucht wird das Kapital.

Aufgabe:

Welches Kapital bringt zu $3\frac{1}{3}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen?

Ansatz:

$3\frac{1}{3}$ DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von 100 DM

39 DM Zinsen erbringt in $2\frac{1}{2}$ Jahren ein Kapital von ? DM

Ausrechnung:

$\frac{10}{3}$ DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von 100 DM

$\frac{1}{3}$ DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von $\frac{100}{10}$ DM

1 DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3}{10}$ DM

39 DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3 \cdot 39}{10}$ DM

39 DM Zinsen erbringt in $\frac{1}{2}$ Jahr ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3 \cdot 39 \cdot 2}{10}$ DM

39 DM Zinsen erbringt in $2\frac{1}{2}$ Jahren ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3 \cdot 39 \cdot 2}{10 \cdot 5}$ DM

Bruchstrich:

$$\text{Kapital} = \frac{100 \cdot 3 \cdot 39 \text{ DM} \cdot 2}{10 \cdot 5} \text{ oder } \frac{39 \text{ DM} \cdot 100 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 5} \text{ gekürzt} = 468 \text{ DM}$$

Also beträgt das **Kapital 468 DM**

Formel:

$$\text{Kapital} = \frac{\text{Zinsen} \cdot 100}{\text{Zinsfuß} \cdot \text{Zeit}} \quad k = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$$

$$\text{Rechnungssumme} = \frac{\text{Diskont} \cdot 100}{\text{Diskontfuß} \cdot \text{Zeit}} \quad k = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$$

Übungsaufgabe 219

Berechne das Kapital!

Zinsfuß:	Zeit:	Zinsen:	Zinsfuß:	Zeit:	Zinsen:
a) $4\frac{1}{2}\%$	$2\frac{1}{4}$ Jahre	729,00 DM	b) $3\frac{1}{2}\%$	$1\frac{1}{4}$ Jahre	17,50 DM
c) $1\frac{3}{4}\%$	$5\frac{1}{3}$ Mon.	0,56 DM	d) $4\frac{1}{2}\%$	$2\frac{1}{2}$ Mon.	6,75 DM
e) $6\frac{2}{3}\%$	72 Tage	10,60 DM	f) 5%	80 Tage	10,20 DM

Angewandte Aufgaben

220. A erhielt vierteljährlich 122,50 DM Zinsen von einem Kapital, das mit $3\frac{1}{2}\%$ verliehen war. Berechne das Kapital!

221. Für eine Hypothek, die mit $4\frac{1}{2}\%$ verzinst wird, müssen halbjährlich 162 DM Zinsen gezahlt werden. Wie groß ist die Hypothek?

222. Z trinkt täglich 1 Doppelkorn zu 50 Pf, 2 Glas Bier zu je 40 Pf und raucht 10 Zigaretten zu je 10 Pf. Von welchem Kapital wären das bei $4\frac{1}{2}\%$ die Zinsen?

223. Ein Arbeiter bezieht monatlich 140 DM Rente. Wieviel Kapital müßte er erspart haben, wenn er bei einem Zinsfuß von 4% ebensoviel Zinsen hätte haben wollen? (Zinseszinsen bleiben unberücksichtigt.)
224. Eine am 15. November fällige Rechnung mit einem Diskontfuß von $2\frac{1}{2}\%$ wurde am 5. Oktober bezahlt. Der Diskont betrug 1,20 DM. Berechne die Rechnungssumme!
225. Ein Kaufmann bezahlte eine Rechnung 45 Tage vor dem Fälligkeitstage und zog 3,60 DM als Diskont ab. Der Diskontfuß betrug $\frac{3}{4}\%$ je Monat. Wieviel betrug die Rechnungssumme?

4. Die Zeit wird gesucht

Gegeben sind **Kapital, Zinsfuß und Zinsen;**
gesucht wird die **Zeit**.

Aufgabe:

In welcher Zeit bringen 468 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ 39 DM Zinsen?

Ansatz:

100 DM Kapital bringen $3\frac{1}{3}$ DM Zinsen in 1 Jahr.
468 DM Kapital bringen 39 DM Zinsen in ? Jahren?

Ausrechnung:

100 DM	Kapital bringen	$\frac{10}{3}$ DM Zinsen in	$\frac{1}{\frac{10}{3}}$	Jahr
1 DM	Kapital bringt	$\frac{10}{3}$ DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100}{\frac{10}{3}}$	Jahren
468 DM	Kapital bringen	$\frac{10}{3}$ DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100}{468}$	Jahren
468 DM	Kapital bringen	$\frac{1}{3}$ DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100}{468 \cdot 10}$	Jahren
468 DM	Kapital bringen	1 DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100 \cdot 3}{468 \cdot 10}$	Jahren
468 DM	Kapital bringen	39 DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 39}{468 \cdot 10}$	Jahren

Bruchstrich:

$$\text{Zeit} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 39}{468 \cdot 10} \text{ oder } \frac{39 \cdot 100 \cdot 3}{468 \cdot 10} \text{ gekürzt} = 2\frac{1}{2}$$

Also beträgt die Zeit $2\frac{1}{2}$ Jahre

Formel:

$$\text{Zeit} = \frac{\text{Zinsen} \cdot 100}{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuß}} \quad t = \frac{z \cdot 100}{k \cdot p}$$

$$\text{Verfalltag} = \frac{\text{Diskont} \cdot 100}{\text{Rechnungssumme} \cdot \text{Diskontfuß}} \quad t = \frac{z \cdot 100}{k \cdot p}$$

Übungsaufgabe 226

Berechne die Zeit!

Kapital:	Zinsfuß:	Zinsen:	Kapital:	Zinsfuß:	Zinsen:
a) 600 DM	5%	60,00 DM	b) 630 DM	4%	18,90 DM
c) 720 DM	$4\frac{1}{2}\%$	81,00 DM	d) 240 DM	$3\frac{3}{4}\%$	27,00 DM
e) 2 496 DM	$4\frac{1}{4}\%$	70,72 DM	f) 1 200 DM	6%	54,00 DM
g) 2 400 DM	$4\frac{1}{2}\%$	21,60 DM	h) 2 880 DM	$6\frac{2}{3}\%$	24,00 DM

Übungsaufgabe 227

Berechne den Verfalltag!

Zahltag:	Rechnungssumme:	Diskont:	Diskontfuß:
a) 15. Oktober	1 500 DM	4,50 DM	2%
b) 7. Juni	750 DM	6,00 DM	4%
c) 23. März	1 785 DM	7,14 DM	$2\frac{1}{4}\%$
d) 12. April	2 430 DM	6,75 DM	$2\frac{1}{2}\%$
e) 18. Mai	1 080 DM	7,00 DM	$3\frac{1}{3}\%$

Angewandte Aufgaben

228. In wieviel Tagen bringen 6 400 DM zu 3% 25,60 DM Zinsen?
229. In welcher Zeit wachsen 3 600 DM zu 6% auf 5 400 DM an?
230. Für 2 500 DM, die zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehen waren, erhielt man 281,25 DM Zinsen. Wie lange waren sie ausgeliehen?
231. Wie lange wird ein Kapital von 6 600 DM zu 4% ausgeliehen, wenn die Rückzahlung einschließlich Zinsen 7 260 DM beträgt?
232. Bei einer Rechnungssumme von 480 DM wird jemand mit $7\frac{1}{2}\%$ Verzugszinsen, das sind 12,40 DM, belastet. Für wieviel Tage wurden Verzugszinsen berechnet?

233. A lieh am 1. Januar 1 200 DM zu 4% aus. An Kapital und Zinsen erhielt er 1 209,60 DM zurück. Wann erhielt er das Geld zurück?
234. B bezahlt eine Rechnung von 2 430 DM nach Abzug von 6,75 DM Diskont am 12. April. Der Diskontfuß beträgt $2\frac{1}{2}\%$. Wann war der Fälligkeitstag?
235. C bezahlt am 12. Oktober eine Rechnung von 1 125 DM und zieht 15 DM Diskont ab. Der Diskontfuß beträgt $\frac{1}{2}\%$ je Monat. Berechne den Fälligkeitstag!

Zusammenstellung der Zinsformeln

Berechnung der Zinsen	Formel I: (Zinsformel)	$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$
Berechnung des Zinsfußes	Formel II	$p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot t}$
Berechnung des Kapitals	Formel III	$k = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$
Berechnung der Zeit	Formel IV	$t = \frac{z \cdot 100}{k \cdot p}$

Merke:

1. Bei den Formeln der Zinsrechnung steht der gesuchte Formelbuchstabe immer links, die drei anderen Formelbuchstaben stehen rechts vom Gleichheitszeichen.
2. Die Zinsformel: $z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$ prägen wir uns fest ein!
3. Bei den Formeln II, III und IV steht der gesuchte Formelbuchstabe links vom Gleichheitszeichen; rechts vom Gleichheitszeichen steht: auf dem Bruchstrich immer $z \cdot 100$, unter dem Bruchstrich die zwei noch fehlenden Formelbuchstaben.
4. Soll durch einen Bruch dividiert werden, so wird mit dem umgekehrten Bruch multipliziert.
5. Die Zeit erscheint am Bruchstrich immer als Jahr.

XII. Die Verhältnis- und Gesellschaftsrechnung

1. Die Verhältnisrechnung

Zahlen können in einem bestimmten **Verhältnis** zueinander stehen; z. B. das **Torverhältnis** bei einem Fußballspiel betrug 3 : 2 (lies : 3 zu 2).

Das **Verhältnis** von Zahlen wird durch die **kleinsten ganzen Zahlen** ausgedrückt. Die Zahlen werden entweder **gekürzt** oder **erweitert**, bis man die kleinsten ganzen Zahlen erhält.

Durch das Kürzen und Erweitern wird das **Verhältnis nicht geändert**.

Beispiel:

- a) 5 : 10 : 15 : 20 (gekürzt durch 5) = 1 : 2 : 3 : 4
 b) 0,3 : 0,4 : 0,5 : 0,6 (erweitert mit 10) = 3 : 4 : 5 : 6
 c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ (in Zwölftel erweitert) = $\frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 6 : 4 : 3$

Übungsaufgabe 236

Gib das Verhältnis in den kleinsten ganzen Zahlen an!

- a) Klasse A hat 40, Klasse B 45 Schüler.
 b) Fritz ist $10\frac{1}{2}$, Peter $3\frac{1}{2}$ Jahre alt.
 c) Georg ist 144, Paul 132 cm groß.
 d) A arbeitet täglich 9, B $8\frac{1}{2}$ Stunden.
 e) Beim Zahlenlotto gewann A 35, B 40 und C 600 DM.

Angewandte Aufgaben

Gib das Verhältnis an!

237. Der Mount Everest ist 8800 m, der Mont Blanc 4800 m, der Großglockner 3800 m, die Zugspitze 3000 m, die Schneekoppe 1600 m und der Brocken 1200 m hoch.
238. Der Mississippi ist 6700 km, die Wolga 3700 km, die Donau 2850 km, der Rhein 1250 km, die Elbe 1200 km und die Oder 900 km lang.
239. Fünf Grundstücke haben folgende Flächeninhalte: 4,8 ha, 8,4 ha, 15,6 ha, 22,8 ha und 99,6 ha.

2. Die Gesellschaftsrechnung (Verteilungsrechnung)

Die **Verteilung** von Gewinn und Verlust, die Umlage von Kosten oder die Auszahlung von Dividenden erfolgt bei Wirtschaftsunternehmen, Einkäufen, Konkursen, Erbschaften usw., an denen mehrere Personen gemeinsam beteiligt sind nach dem jeweils gegebenen Verhältnis — z. B. Anzahl der Personen oder Höhe der gezahlten Beträge (Aktien) — **durch die Verhältnisrechnung**.

Beispiel:

Vier Personen spielen gemeinsam in der Lotterie ein Los und gewinnen 200 000 DM. A hatte $\frac{1}{2}$ Los bezahlt, B $\frac{1}{4}$, C und D je $\frac{1}{8}$ Los. Wie verteilen sie den Gewinn?

Lösung:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{8} = \frac{4}{8} : \frac{2}{8} : \frac{1}{8} : \frac{1}{8} = 4 : 2 : 1 : 1, \text{ das sind 8 Teile;}$$

8 Teile = 200 000 DM;

1 Teil = 25 000 DM.

A erhält 4 Teile = 100 000 DM

B erhält 2 Teile = 50 000 DM

C erhält 1 Teil = 25 000 DM

D erhält 1 Teil = 25 000 DM

Übungsaufgabe 240

- a) Teile 864 DM im Verhältnis 3 : 4 : 5!
 b) Teile 480 DM so, daß A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest erhält!
 c) Teile 24 DM so unter 3 Personen, daß A 3 DM mehr und B 3 DM weniger als C erhält!
 d) Teile 210 DM so unter 3 Personen, daß A 25% und B 50% vom Anteil des C erhält!
 e) Teile 125 DM so unter 3 Personen, daß B 3mal soviel erhält wie A und C doppelt soviel wie B und dazu noch 5 DM!

Angewandte Aufgaben

241. Drei Arbeiter erhalten für eine gemeinsame Arbeit 530 DM. Der erste arbeitete 8, der zweite 7 und der dritte 10 Tage zu je 8 Stunden. Wie teilen sich die Arbeiter den Lohn?
 242. Drei Kaufleute machten gemeinschaftlich ein Geschäft. A gab dazu 2220 DM. B 3330 DM und C 4440 DM. Sie erzielten einen Gewinn von 4680 DM. Wie teilten sie diesen?
 243. Vier Landwirte bezogen gemeinschaftlich 6000 kg Kunstdünger. 1 dz kostete einschließlich Fracht und Anfuhr 32,75 DM. A erhielt $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest. Wieviel mußte jeder zahlen?
 244. Ein Kaufmann gerät in Konkurs. In der Konkursmasse sind noch 14400 DM. An Gerichtskosten gehen 5% ab. Die drei Gläubiger hatten zu fordern: 2500 DM, 7500 DM und 5000 DM. Wie werden die Ansprüche der Gläubiger abgegolten?
 245. An einem Unternehmen sind A mit 30 000 DM, B mit 35 000 DM, C mit 40 000 DM und D mit 45 000 DM beteiligt. Bei der Auflösung des Unternehmens wird ein Verlust von 27900 DM festgestellt. Wieviel DM erhält jeder Teilnehmer zurück?
 246. Eine Erbschaft wird im Verhältnis $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ aufgeteilt. Der Erbe mit dem kleinsten Anteil erhält 2400 DM. Wie groß war die Erbschaft?
 247. Ein Vater vermacht in seinem Testament seinen 4 Kindern ein Vermögen, von dem die beiden Söhne je $\frac{2}{10}$ und die beiden Töchter je $\frac{3}{10}$ erhalten sollen. Die beiden Söhne und eine Tochter haben zum Studium bzw. zur Aussteuer bereits je 4000 DM erhalten, die andere Tochter soll neben dem ihr zustehenden Erbteil für die langjährige Pflege des Vaters noch 5000 DM erhalten. Wie groß ist das Erbteil jedes Kindes, wenn beim Tode des Vaters noch 45 000 DM vorhanden waren?

XIII. Die Durchschnitts- und Mischungsrechnung**1. Die Durchschnittsrechnung**

Die **Durchschnittsrechnung** ist eine Rechnungsart, bei der die **durchschnittlichen Werte** ermittelt werden.

Man findet die **Durchschnittszahl** (das **arithmetische Mittel**) mehrerer Zahlen, indem man ihre **Summe** durch ihre **Anzahl** teilt.

Beispiel: $6 + 4 + 7 + 3 = 20$; $20 : 4 = 5$ Die **Summe** der vier **Zahlen** ist 20.Wir teilen die Summe (20) durch die **Anzahl der Zahlen** (4) = 5.Die **Durchschnittszahl** heißt 5.

Regel: Durchschnittszahl = $\frac{\text{Summe}}{\text{Anzahl}}$

Angewandte Aufgaben:

248. In den 8 Klassen einer Volksschule sind 48, 45, 52, 43, 56, 44, 57 und 47 Schüler. Berechne die durchschnittliche Klassenstärke!
 249. In einem Warenhaus betrugen im Laufe einer Woche die Tageseinnahmen: 17640,62 DM, 16830,93 DM, 15350,86 DM, 16490,65 DM, 21370,41 DM, 18530,57 DM. Wie groß war die durchschnittliche Tageseinnahme?
 250. Für Gas, Licht und Wasser wurden in den einzelnen Monaten des Jahres bezahlt: 36,40 DM, 35,00 DM, 33,80 DM, 32,80 DM, 32,00 DM, 31,20 DM, 25,60 DM, 30,60 DM, 32,40 DM, 33,80 DM, 35,60 DM, 39,20 DM. Wieviel wurde durchschnittlich im Monat bezahlt?
 251. Für eine Arbeit wurden in Rechnung gestellt: $42\frac{1}{2}$ Meisterstunden zu 9,20 DM, 48 Gesellenstunden zu 4,80 DM, $47\frac{1}{2}$ Hilfsarbeiterstunden zu 4,20 DM und 42 Lehrlingsstunden zu 1,70 DM. Wie hoch war 1 Stunde im Durchschnitt berechnet?

2. Die Mischungsrechnung

Eine im Handel sehr gebräuchliche Rechnungsart ist die **Mischungsrechnung**.

Bei der **Mischungsrechnung** suchen wir:

den **Mischungspreis** (Durchschnittspreis), dann ist das Mischungsverhältnis gegeben, oder

das **Mischungsverhältnis**, dann ist der Mischungspreis gegeben.

a) Wir suchen den Mischungspreis

Beispiel: Es werden gemischt: 5 kg zu 4,80 DM und 4 kg zu 3,50 DM.
Wieviel kostet 1 kg der Mischung?

Ausrechnung:

5 kg zu 4,80 DM kosten 24 DM

4 kg zu 3,50 DM kosten 14 DM

9 kg Mischung kosten 38 DM

1 kg Mischung kostet $38 \text{ DM} : 9 = 4,22 \text{ DM}$

b) Wir suchen das Mischungsverhältnis

Beispiel: Zwei Sorten, 1 kg zu 1,60 DM und 1 kg zu 2,60 DM, sollen so gemischt werden, daß 1 kg der Mischung 2,00 DM kostet.
In welchem Verhältnis muß gemischt werden?

Ausrechnung:

	Mischungspreis	
1. Sorte: 1 kg zu 1,60 DM	2,00 DM	Gewinn = 0,40 DM
2. Sorte: 1 kg zu 2,60 DM	2,00 DM	Verlust = 0,60 DM

Der Gewinn und der Verlust haben den gemeinsamen Preisanteil: 0,20 DM

Die 0,40 DM Gewinn sind 2 Preisanteile,
die 0,60 DM Verlust sind 3 Preisanteile.

Gewinn und Verlust stehen im Verhältnis 2 : 3.

Um Gewinn und Verlust auszugleichen, müssen die **Mengen im umgekehrten Verhältnis** gemischt werden, also:

1. Sorte: 2 Preisteile		3 Mengenteile
2. Sorte: 3 Preisteile		2 Mengenteile

Die Mengen stehen im Verhältnis 3 : 2.

Probe: 1. Sorte: 3 kg zu 1,60 DM = 4,80 DM
2. Sorte: 2 kg zu 2,60 DM = 5,20 DM
5 kg Mischung = 10,00 DM
1 kg Mischung = $10,00 \text{ DM} : 5 = 2,00 \text{ DM}$

Bei der **Mischungsrechnung** unterscheiden wir:

Warenmischungen, Flüssigkeitsmischungen und Metallmischungen.

a) Warenmischungen

Um Güte (Qualität) und Preis einer Ware zu ändern, mischt der Kaufmann zwei oder mehrere Sorten, z. B. Kaffee, Tee, Tabak.

Das **Mischungsverhältnis** der einzelnen Sorten bestimmt die **Qualität** und den **Preis** der Mischsorte.

Angewandte Aufgaben

252. Mische 2 kg Kaffee zu je 20,50 DM mit 3 kg Kaffee zu je 26,50 DM. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?
253. Mische $4\frac{1}{2}$ kg Hühnerfutter zu je 0,64 DM und $7\frac{1}{2}$ kg Hühnerfutter zu je 0,48 DM. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?
254. Ein Händler mischt $5\frac{3}{4}$ kg Apfelringe, das kg zu 2,00 DM, $4\frac{1}{2}$ kg Dörripflaumen, das kg zu 1,70 DM, $3\frac{1}{4}$ kg Birnen, das kg zu 2,20 DM, und $2\frac{1}{2}$ kg Aprikosen, das kg zu 2,70 DM. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?
255. Ein Händler mischt 24 kg zu je 4,50 DM mit 16 kg zu je 3,50 DM; er will an der Mischung $12\frac{1}{2}\%$ verdienen. Wie teuer ist dann 1 kg der Mischung im Verkauf?
256. 8 kg Tabak zu je 22,50 DM werden mit 3 kg Tabak zu je 18 DM gemischt. Wieviel % beträgt der Gewinn, wenn der Verkaufspreis für 1 kg 23,40 DM beträgt?
257. Es werden gemischt: 100 kg zu je 4,80 DM, 80 kg zu je 4,00 DM und 60 kg einer 3. Sorte. 1 kg der Mischung kostet 5,00 DM. Wieviel kostet 1 kg der 3. Sorte?
258. Es werden gemischt: eine Sorte zum Preise von 12,60 DM und eine Sorte zum Preise von 10,40 DM je kg. Der Preis der Mischung beträgt 11,20 DM je kg. Bestimme das Mischungsverhältnis!
259. Ein Kaufmann hat 20 kg Kaffee zu je 12,60 DM. Von einer 2. Sorte, die nur 10,80 DM kostet, will er hinzumischen, so daß 1 kg Mischkaffee 12 DM kostet. Wieviel kg der 2. Sorte muß er nehmen?

b) Flüssigkeitsmischungen

Auch Flüssigkeiten (z. B. Spiritus, Essig, Wein) mischt der Kaufmann, um **Qualität** und **Preis** der Ware zu ändern.

Angewandte Aufgaben

260. Wieviel Liter Alkohol sind enthalten:
a) in 40 l Spiritus von 80% , b) in 60 l Brantwein von 48% ?
261. Ein Brenner mischt 25 l Doppelkorn von 48% mit 15 l von 40% . Wieviel % hat nun der Doppelkorn?
262. Ein Kaufmann mischt 40 l Spiritus zu 80% , 30 l Spiritus zu 60% und 10 l Wasser. Wieviel % hat die Mischung?

263. Wir mischen 70 l Spiritus zu 80⁰/₀ mit 30 l zu 60⁰/₀. 100 l reiner Alkohol (100⁰/₀) kosten 250 DM. Wieviel kostet 1 l der Mischung?
264. Ein Händler schüttet in 1 hl reinen Essig 20 l Wasser. Wieviel ⁰/₀ hat nun der Essig?
265. Wieviel Liter Wasser muß man in 60 l reinen Alkohol schütten, wenn die Mischung 80⁰/₀ig werden soll?
266. Ein Moselwein zu 3,60 DM soll mit einem anderen Moselwein zu 2,40 DM gemischt werden, so daß 1 Liter 2,90 DM kostet. Bestimme das Mischungsverhältnis!
267. Ein Weinhändler verschneidet 750 l Rheinwein, 1 l zu 2,40 DM, mit 150 l Südwein, 1 l zu 3,60 DM. Er will 33¹/₃⁰/₀ verdienen. Wieviel kostet nun eine Flasche ($\frac{3}{4}$ l) Weinverschnitt?

c) Metallmischungen (Legierungen)

Auch Metalle können gemischt werden. Diese Metallmischungen nennt man **Legierungen**. Aus Kupfer und Zink stellt man **Messing** her, aus Kupfer und Zinn **Bronze**, aus Kupfer, Zinn und Nickel **Neusilber**. — **Edelmetalle** (Gold und Silber) werden, da sie für den Gebrauch zu weich sind, häufig mit Kupfer gemischt.

Das in der Legierung enthaltene Edelmetall bezeichnet man mit **Feingewicht** oder **Feingehalt**. Der Feingehalt wird nach Tausendstel angegeben und ist durch **Stempel-aufdruck** angezeigt (585 Feingehalt = 585 Teile Gold und 415 Teile Kupfer).

Angewandte Aufgaben

268. Eine Legierung enthält 100 g Silber und 25 g Kupfer. Wie groß ist der Feingehalt?
269. Neusilber hat ein Legierungsverhältnis von 13:4:3. Wieviel g Kupfer, Zinn und Nickel enthält ein Zigarettenetui von 120 g Gewicht?
270. Ein Dutzend silberne Löffel wiegt 780 g und ist 800 gestempelt. Wieviel g Silber enthält 1 Löffel?
271. Eine silberne Dose mit einem Feingehalt von 900 enthält 108 g reines Silber. Wie schwer ist die Dose?
272. Ein Trauring trägt den Stempelaufdruck 585 und wiegt 8 g. Wieviel g Gold enthält der Ring?
273. Unsere Goldmünzen vor dem ersten Weltkrieg hatten einen Feingehalt von 900. Das Zwanzigmarkstück wog 7,965 g. Wieviel reines Gold war im Zwanzigmarkstück?
274. Eine goldene Kette mit einem Feingehalt von 900 wog 80 g. Wieviel kostete die Kette, wenn 1 kg reines Gold 5 100 DM kostete und der Goldschmied für die Anfertigung 25⁰/₀ des Goldwertes berechnete?
275. 187,5 g Gold mit einem Feingehalt von 800 sollen durch Zusatz von Kupfer in eine Legierung mit 750 Feingehalt umgewandelt werden. Wieviel g Kupfer muß der Goldschmied hinzufügen?

B. DIE RAUMLEHRE

I. Flächenberechnung

1. Grundbegriffe

In der Raumlehre (Geometrie) arbeitet man mit folgenden **Grundbegriffen**:

Punkt, Linie, Fläche, Körper.

Der **Punkt** hat raumkundlich (geometrisch) **keine Ausdehnung**;

Er ist nur eine gedachte Stelle im Raum und wird erst sichtbar als Schnittpunkt zweier Linien.

Die **Linie** ist ein in einer **bestimmten Richtung** fortbewegter **Punkt**.

Sie hat **eine Ausdehnung**: die **Länge**.

Die **Fläche** ist eine in einer **zweiten Richtung** fortbewegte **Linie**;

sie hat **zwei Ausdehnungen**: die **Länge** und die **Breite**.

Der **Körper** ist eine in einer **dritten Richtung** fortbewegte **Fläche**;

er hat **drei Ausdehnungen**: die **Länge**, die **Breite** und die **Höhe**.

2. Linien

Man unterscheidet **gerade** und **krumme Linien**.

Linien, deren Richtung stets unverändert bleibt, sind **gerade Linien**.

Linien, deren Richtung sich dauernd ändert, sind **krumme Linien**.

a) Gerade Linien

Bei **geraden Linien** unterscheiden wir eine **dreifache Richtung**:

waagerecht (horizontal),

senkrecht oder lotrecht (vertikal),

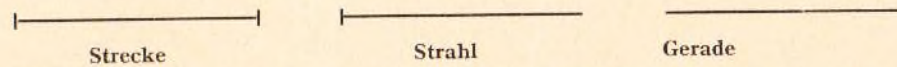
schräg (weder waagerecht noch senkrecht).

Eine gerade Linie, die in einem Viereck von einer Ecke zur anderen verläuft, ist eine **Ecklinie** oder **Diagonale**; die Richtung nennen wir **diagonal**.

Zwei gleichlaufende gerade Linien, deren senkrechter Abstand überall gleich ist, nennt man **parallele Linien** (Gleislinsen) oder **Parallelen**.

Die **kürzeste Verbindung** zwischen zwei **Punkten** ist die **gerade Linie**.

Bei den **geraden Linien** unterscheiden wir ferner:



Die **Strecke** ist zweiseitig begrenzt, der **Strahl** ist einseitig begrenzt, die **Gerade** ist unbegrenzt.

Unser **Normal-Längenmaß** ist das **Meter (m)**.

1 m ist der vierzigmillionste Teil des Erdumfangs (40 000 km).

Unsere Längenmaße heißen:

km	m	dm	cm	mm
1 km	= 1000 m	= 10 000 dm	= 100 000 cm	= 1 000 000 mm
	1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1 000 mm
		1 dm	= 10 cm	= 100 mm
			1 cm	= 10 mm

Die **Verwandlungszahl der Längenmaße** ist 10,

d. h. ein Stellenwert ist immer das **Zehnfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

Übungsaufgabe 276

a) Schreibe als m:

52 cm 4 cm 2 m 8 cm 12 mm 3 cm 8 mm

b) Schreibe als km:

405 m 80 m 5 m 6 km 75 m 9 km 3 m

b) Krumme Linien

Bei den **krummen Linien** unterscheiden wir u. a.:

Bogen, Ellipse und Kreislinie.

3. Winkel

Treffen zwei Gerade in einem Punkt zusammen, so entsteht ein **Winkel**.

Die beiden Geraden, die den Winkel bilden, heißen **Schenkel**.

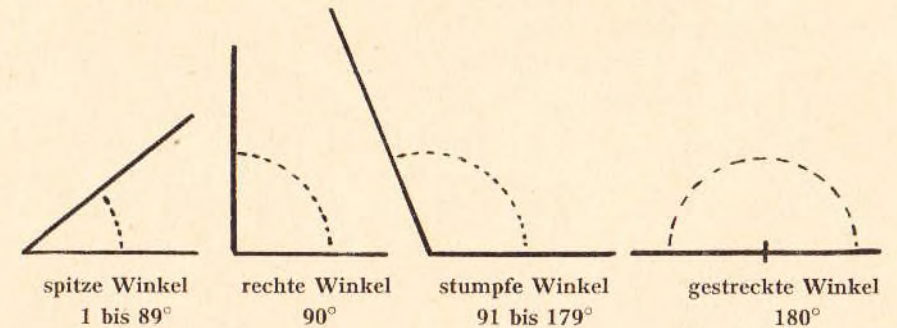
Der Schnittpunkt der Geraden heißt **Scheitelpunkt**.

Das **Zeichen für Winkel** ist $\sphericalangle$.

Die Winkel kann man mit einem **Winkelmesser** messen.

Ein **Winkelmesser** ist ein **Halbkreisbogen** mit einer **Winkeleinteilung** von 1 bis 180° .

Man unterscheidet:



Die **Größe eines Winkels** hängt von der **Neigung der Schenkel** ab.

Je größer die Neigung der Schenkel zueinander ist, desto kleiner ist der Winkel.

Ein Winkel, bei dem die Schenkel senkrecht aufeinander stehen, ist ein **rechter Winkel**.

Ein **rechter Winkel (1 R)** ist immer 90° groß.

Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter ($1-89^\circ$), ist ein **spitzer Winkel**.

Ein Winkel, der größer ist als ein rechter ($91-179^\circ$), ist ein **stumpfer Winkel**.

Ein Winkel, dessen Schenkel eine Gerade bilden, ist ein **gestreckter Winkel**.

Er ist immer 180° groß.

Ein Winkel, der größer ist als ein gestreckter, ist ein **erhabener oder überstumpfer Winkel**.

Merke:

Die **Summe der Winkel auf einer Geraden** beträgt 180° .
Die **Summe der Winkel um einen Punkt** beträgt 360° .

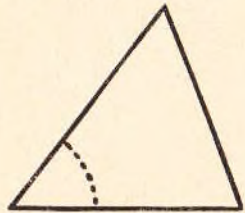
4. Geradlinige Flächen

Geradlinige Flächen werden von **geraden Linien** begrenzt.

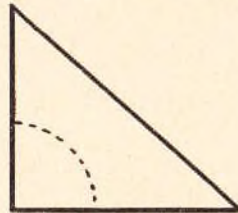
Nach der Zahl der Ecken unterscheiden wir **Dreiecke**, **Vierecke** und **Vielecke**.

a) Arten der Dreiecke

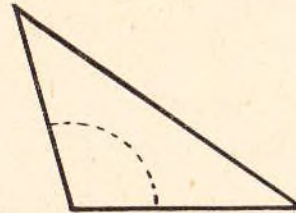
Ein **Dreieck** ist eine von **drei Seiten** begrenzte Fläche.



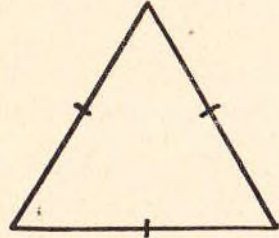
spitzwinkliges



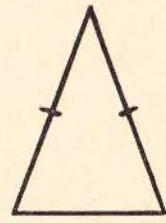
rechtwinkliges



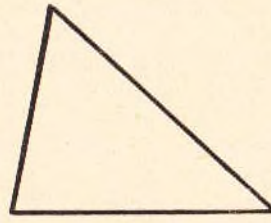
stumpfwinkliges



gleichseitiges



gleichschenkliges



ungleichseitiges Dreieck

Je nach **Länge der Seiten** und **Größe der Winkel** unterscheidet man
spitzwinklige Dreiecke: alle Winkel spitz (weniger als 90°),
rechtwinklige Dreiecke: ein rechter Winkel (90°),
stumpfwinklige Dreiecke: ein stumpfer Winkel (mehr als 90°),
gleichseitige Dreiecke: drei gleiche Seiten,
gleichschenklige Dreiecke: zwei gleiche Seiten,
ungleichseitige Dreiecke: alle Seiten verschieden.

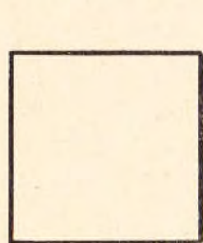
b) Arten der Vierecke

Ein **Viereck** ist eine von **vier Seiten** begrenzte Fläche.

Sind in einem Viereck die **gegenüberliegenden Seiten parallel**, so ist das Viereck ein **Parallelogramm**.

In einem **Parallelogramm** sind die **gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich**.

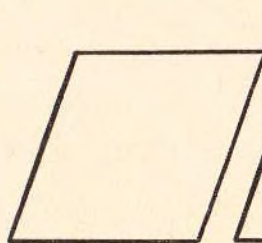
Zu den **Parallelogrammen** zählen:



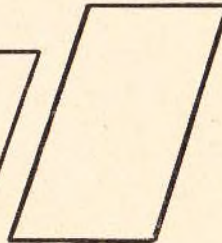
Quadrat



Rechteck



Rhombus



Rhomboid

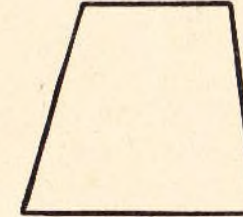
Ein **Quadrat** ist ein Viereck mit **gleichen Seiten** und **gleichen Winkeln**.

Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und **gleichen Winkeln**.

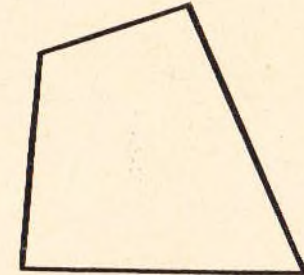
Ein **Rhombus** ist ein Viereck mit **gleichen Seiten** und **ungleichen Winkeln**.

Ein **Rhomboid** ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und **ungleichen Winkeln**.

Außer den **Parallelogrammen**, die **zwei Paar parallele Seiten** haben, gibt es noch zwei andere Vierecke:



Trapez



Trapezoid

Ein **Trapez** ist ein Viereck mit **vier ungleichen Seiten**, von denen **zwei parallel** sind.

Ein **Trapezoid** ist ein **ungleichseitiges Viereck** ohne **parallele Seiten**.

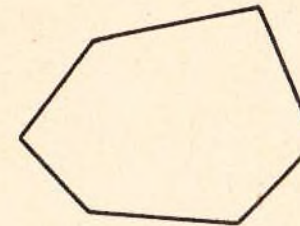
c) Arten der Vielecke

Eine geometrische Fläche mit mehr als vier Ecken nennt man **Vieleck**.

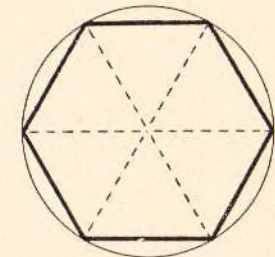
Sind die **Seiten und Winkel ungleich**, so ist es ein **unregelmäßiges Vieleck**.

Sind die **Seiten und Winkel gleich**, so ist es ein **regelmäßiges Vieleck**.

Nach der Anzahl der Ecken unterscheidet man **Fünf-, Sechs-, Achtecke** usw.



Unregelmäßiges Vieleck



Regelmäßiges Vieleck

d) Flächenmaße

Unsere Flächenmaße heißen:

km ²	ha	a	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
1 km ²	= 100 ha	= 10 000 a	= 1 000 000 m ²			
	1 ha	= 100 a	= 10 000 m ²			
		1 a	= 100 m ²			
1 m ²	= 100 dm ²	= 10 000 cm ²	= 1 000 000 mm ²			
	1 dm ²	= 100 cm ²	= 10 000 mm ²			
		1 cm ²	= 100 mm ²			

Die Verwandlungszahl der Flächenmaße ist 100,
d. h. ein Stellenwert ist immer das Hundertfache des nächstkleineren Stellenwertes.

In der Landwirtschaft ist noch der „Morgen“ gebräuchlich.

$$1 \text{ Morgen} = 25 \text{ a (ungefähr)} = \frac{1}{4} \text{ ha}$$

Übungsaufgabe 277

a) Verwandle in cm²:

$$5 \text{ m}^2 = 1,4536 \text{ m}^2 = 0,5 \text{ m}^2 = 3 \text{ dm}^2 = 5,25 \text{ dm}^2$$

b) Verwandle in m²:

$$5326 \text{ cm}^2 = 80 \text{ cm}^2 = 2,52 \text{ a} = 5,2 \text{ ha} = 0,57 \text{ km}^2$$

c) Verwandle in a:

$$2550 \text{ m}^2 = 85 \text{ m}^2 = 8 \text{ m}^2 = 375 \text{ ha} = 0,25 \text{ ha}$$

d) Verwandle in ha:

$$450 \text{ a} = 26 \text{ a} = 5 \text{ a} = 23 \text{ a } 50 \text{ m}^2 = 5 \text{ a } 50 \text{ m}^2$$

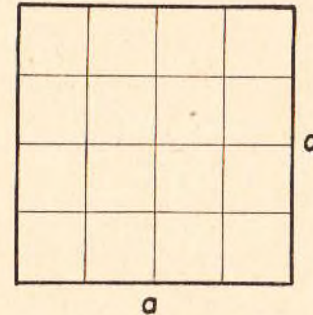
e) Verwandle in km²:

$$3\,475\,000 \text{ m}^2 = 56\,380 \text{ a} = 7\,395 \text{ ha} = 4\,503 \text{ a} = 365\,490 \text{ m}^2$$

f) Ein Marktplatz ist 75 945 m² groß. a) Wieviel a, b) wieviel ha sind das?g) Ein Kartoffelfeld ist 250 a groß. a) Wieviel ha, b) wieviel m² sind das?h) Ein Wald umfaßt 5,85 ha. a) Wieviel a, b) wieviel m² sind das?i) Der Bodensee ist 539 km² groß. Wieviel ha sind das?k) Die Bundesrepublik hat eine Größe von 248 000 000 ha. Wieviel km² sind das?l) Zum Dorfe A gehören 85,06 ha Wiesenland, $275\frac{1}{2}$ ha Ackerland, 75,4 a Wald, 180,50 ha Heide und 1236 a Gartenland. Wieviel m² sind das zusammen?m) Von einem 8,9 a großen Baugrundstück werden 54 m² für den Bürgersteig abgegeben. Wieviel m² hat das Restgrundstück?n) Ein Grundstück von 4 500 m² wird gegen ein Grundstück von 54 a eingetauscht. Wieviel DM müssen zugezahlt werden, wenn 1 m² mit 26,50 DM berechnet wird?

o) Ein Wiesenland ist 4,75 ha groß. Wieviel Morgen sind das?

e) Das Quadrat



$$U = a + a + a + a \text{ oder } U = 4 \cdot a$$

$$F = a \cdot a \text{ oder } F = a^2$$

$$U = \text{Umfang} \quad F = \text{Flächeninhalt}$$

$$a = \text{Seite}$$

Das **Quadrat** ist ein Viereck mit 4 gleichen Seiten und 4 rechten Winkeln.

Die Berechnung des Umfangs

Der **Umfang** des **Quadrates** ist gleich der **Summe** der **Seiten**.Wenn die Seite eines Quadrates 4 cm beträgt, dann ist der Umfang, da die 4 Seiten gleich lang sind, $4 \text{ cm} \cdot 4 = 16 \text{ cm}$.

$$\text{Umfang} = \text{Seite mal } 4 \quad U = 4 \cdot a$$

Wenn man den **Umfang** durch 4 teilt, erhält man die **Länge** der **Seite**:
 $16 \text{ cm} : 4 = 4 \text{ cm}$.

$$\text{Umfang} : 4 = \text{Seite} \quad U : 4 = a$$

Die Berechnung des Inhalts

Der **Inhalt** des **Quadrates** ist gleich dem **Produkt** der **Seiten**.Bei einem Quadrat von 4 cm Seitenlänge kann man auf die Grundseite nebeneinander 4 Quadratcentimeter stellen. Da die anderen Seiten auch 4 cm lang sind, kann man 4 Reihen von je 4 cm² aufeinanderstellen.Der Inhalt ist also: $4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$.

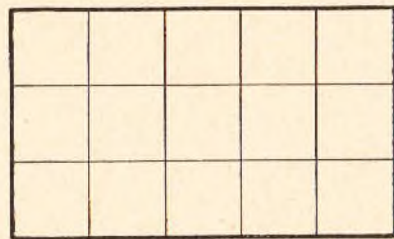
$$\text{Flächeninhalt} = \text{Seite mal Seite} \quad F = a \cdot a$$

Für $a \cdot a$ schreibt man auch a^2 ,
(lies: a hoch 2 oder a Quadrat).

$$F = a^2$$

Angewandte Aufgaben

278. Ein quadratförmiges Zimmer von 4,57 m Seitenlänge soll als Abschluß der Tapete eine Leiste erhalten, von der das Meter 1,35 DM kostet. Wieviel kostet die Leiste?
279. Ein quadratischer Unterrichtsraum mit 4,32 m Seitenlänge soll gediebt werden. Wieviel kostet der Fußboden, wenn 1 m² mit 13,50 DM berechnet wird?
280. Der Umfang eines quadratförmigen Hofes beträgt 64,76 m. Wieviel beträgt der Flächeninhalt?
281. In wieviel Quadrate von 3 cm Seitenlänge kann man ein Quadrat von 24 cm Seitenlänge zerlegen?
282. Ein Bauer kauft eine quadratische Wiese von 65 m Seitenlänge und zahlt für 1 a 350 DM. Wieviel kostet die Wiese?
283. Ein quadratförmiges Feld ist 36 m lang. Für wieviel DM Kartoffeln erntet man, wenn man auf 1 a 125 kg rechnet und 1 dz 24 DM kostet?
284. Eine Spülmaschine hat 70 quadratische Wandplatten von 15 cm Seitenlänge. Wieviel m² sind mit Platten bedeckt?
285. Ein Bürgersteig hat 6 Reihen von je 50 quadratischen Steinplatten mit 35 cm Seitenlänge. Wieviel m² umfaßt der Bürgersteig?
286. Ein quadratförmiger Hof von 13,50 m Seitenlänge wird gepflastert. Wie teuer ist die Pflasterung, wenn 1 m² 28,50 DM kostet?
287. Ein Fenster hat 12 quadratische Scheiben mit einer Seitenlänge von 38 cm. Wieviel m² Glas werden für 6 Fenster benötigt?
288. Der Fußboden eines quadratischen Raumes von 3,6 m Seitenlänge soll mit quadratischen Steinfliesen von 30 cm Seitenlänge belegt werden. Wieviel Fliesen werden benötigt?
289. Ein quadratischer Garten mit einer Seitenlänge von 48 m ist durch einen Längs- und einen Querweg in 4 gleiche Stücke aufgeteilt. Rund um den Garten führt ebenfalls ein Weg. Alle Wege sind 1,20 m breit. Berechne die Gesamtfläche der 4 Gartenstücke!

f) Das Rechteck

a = Länge b = Breite

$$U = 2(a + b)$$

$$F = a \cdot b$$

$$\frac{F}{b} = a$$

$$\frac{F}{a} = b$$

Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und **rechten Winkeln**.

Die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks sind gleich, die vier Winkel sind rechte Winkel.

Die Berechnung des Umfangs

Der **Umfang des Rechtecks** ist gleich der **Summe der Seiten**.

Wenn die Länge eines Rechtecks 5 cm und die Breite 3 cm beträgt, dann ist der Umfang also: 5 cm + 3 cm + 5 cm + 3 cm = 16 cm.

Man kann aber auch zwei anstoßende Seiten zusammenzählen und die Summe mit 2 multiplizieren, also: (5 cm + 3 cm) · 2 = 16 cm.

$$\text{Umfang} = \text{Länge plus Breite mal 2} \quad U = 2(a + b)$$

Die Berechnung des Inhalts

Der **Inhalt des Rechtecks** ist gleich dem **Produkt der Seiten**.

Wenn die Länge eines Rechtecks 5 cm beträgt, kann man 5 Quadratzentimeter darauf stellen. Bei einer Breite von 3 cm kann man 3 Reihen von je 5 cm² aufeinanderstellen.

Der Inhalt ist also: 5 cm · 3 cm = 15 cm².

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Länge mal Breite} \quad F = a \cdot b$$

Umkehrungen:

Wenn man den **Inhalt** durch die **Breite** teilt, erhält man die **Länge**:

$$15 \text{ cm}^2 : 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{F}{b} = a$$

Wenn man den **Inhalt** durch die **Länge** teilt, erhält man die **Breite**:

$$15 \text{ cm}^2 : 5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

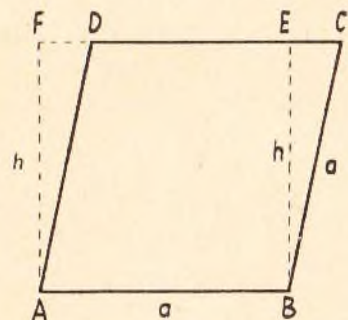
$$\frac{F}{a} = b$$

Angewandte Aufgaben

290. Ein Grundstück ist 236 m lang und 148 m breit. Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt?
291. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 862,64 qm. Die Länge ist 32,8 m. Wie groß ist die Breite?
292. Der Flächeninhalt eines 25,4 m langen Gartens ist 401,32 m². Berechne den Umfang!
293. Der Umfang eines 15,80 m breiten Gartens beträgt 82,40 m. Wie groß ist der Flächeninhalt?

294. Ein Grundstück mit 136,40 m Länge und 74,60 m Breite soll eingezäunt werden. Wieviel kostet der Zaun, wenn das laufende Meter mit 24,50 DM berechnet wird?
295. Ein Saal ist 25 m lang und $12\frac{3}{4}$ m breit. Von der Länge werden 5,80 m abgeteilt. Wie groß ist der Saal jetzt?
296. A bezahlt für ein Baugrundstück von 13,65 m Breite und 45,85 m Tiefe 24,25 DM je m². Die Straßenbaukosten betragen 124,80 DM, der Licht-, Wasser- und Kanalschluß 372,50 DM. Wieviel betragen die Gesamtkosten?
297. In einem Neubau werden 14 Fenster verglast: 6 Fenster mit je 8 quadratischen Scheiben von 35 cm Seitenlänge und 8 Fenster mit je 12 rechteckigen Scheiben von 42 cm Länge und 28 cm Breite. Wieviel kostet die Verglasung, wenn 1 m² mit 12,40 DM berechnet wird?
298. Ein Garten von 36,20 m Länge und 24,50 m Breite soll eine 30 cm dicke Mauer erhalten. Wie groß ist dann noch der Garten?
299. Ein Dienstzimmer ist $6\frac{1}{2}$ m lang, $5\frac{3}{4}$ m breit und 3,80 m hoch. Es soll tapeziert werden. Für Türen und Fenster werden 8 m² abgerechnet. Wieviel kostet das Tapezieren, wenn der Anstreicher 1 m² mit 3,50 DM berechnet?
300. Ein 38,50 m langes und 12,25 m breites Dach wird mit Dachpappe belegt. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag, wenn 1 m² Dachpappe 2,60 DM kostet und bei einem Stundenlohn von 2,60 DM 2 Gesellen 3 Tage zu 8 Stunden gearbeitet haben?
301. Ein quadratförmiger Platz von 120 m Seitenlänge ist von einem 5 m breiten Weg umgeben, der mit Kies belegt werden soll. Auf 1 a rechnet man 3 Wagen Kies. Wieviel Wagen sind erforderlich?

g) Der Rhombus und das Rhomboid



$$U = 4 \cdot a$$

$$F = a \cdot h$$

$$\frac{F}{h} = a$$

$$\frac{F}{a} = h$$

a = Seite

h = Höhe

Ein **Rhombus** ist ein Viereck mit 4 gleichen Seiten und 4 ungleichen Winkeln. Man nennt ihn auch **Raute** und **verschobenes Quadrat**.

Die Grundseite AB nennt man **Grundlinie** = a.

Den senkrechten Abstand zwischen zwei parallelen Seiten nennt man **Höhe** = h.

Die Berechnung des Umfangs

Der **Umfang** des **Rhombus** ist wie beim **Quadrat** gleich der **Summe der Seiten**.

$$\text{Umfang} = \text{Seite mal } 4$$

$$U = 4 \cdot a$$

Die Berechnung des Inhalts

Der **Inhalt** des **Rhombus** ist gleich dem **Produkt von Grundlinie und Höhe**.

Wir schneiden auf der rechten Seite des Rhombus das Dreieck BCE ab und fügen es auf der linken Seite (ADF) wieder an. Dadurch entsteht ein **Quadrat**.

Der **Rhombus** ABCD ist gleich dem **Quadrat** ABEF; denn **Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind inhaltsgleich**.

Wir berechnen also den **Rhombus** wie ein **Quadrat**.

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Seite mal Höhe}$$

$$F = a \cdot h$$

Umkehrungen:

Wenn man den **Inhalt** durch die **Höhe** teilt, erhält man die **Grundlinie**.

$$\frac{F}{h} = a$$

Wenn man den **Inhalt** durch die **Grundlinie** teilt, erhält man die **Höhe**.

$$\frac{F}{a} = h$$

Die Inhaltsberechnung des Rhomboids

Ein **Rhomboid** ist ein Viereck mit 4 ungleichen Seiten und 4 ungleichen Winkeln.

Man nennt es auch **Schiefek** oder **verschobenes Rechteck**.

Wir berechnen das **Rhomboid** wie ein **Rechteck**.

$$\text{Umfang} = \text{Seite mal } 4$$

$$U = 4 \cdot a$$

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Seite mal Höhe}$$

$$F = a \cdot h$$

Angewandte Aufgaben

302. Die Grundlinie eines Rhombus beträgt 16,2 cm, die Höhe 14,8 cm. Berechne den Flächeninhalt!

303. Die Grundlinie eines Rhomboids beträgt 24,6 cm, die Höhe 16,2 cm. Berechne den Flächeninhalt!

304. Der Inhalt eines 24,3 cm langen Rhombus beträgt 539,46 cm². Berechne die Höhe!
305. Der Inhalt eines Rhomboids beträgt 667,40 cm², die Höhe ist 23,5 cm. Berechne die Grundlinie!
306. Ein Grundstück von 32,50 m Länge und 28,40 m Tiefe hat die Form eines Rhombus. Berechne den Kaufpreis, wenn 1 m² 14,60 DM kostet!
307. Eine Wiese hat die Form eines Rhomboids. Die Länge beträgt 75,60 m, die Höhe 68,50 m, der Heuertrag 45 kg je a. Wieviel dz erntet man von der Wiese?

h) Das Dreieck

Das **Dreieck** ist eine von **drei Seiten** begrenzte Fläche mit **drei Ecken** und **drei Winkeln**.

Arten der Dreiecke

Es gibt **spitzwinklige**, **rechtwinklige** und **stumpfwinklige** sowie **gleichseitige**, **gleichschenklige** und **ungleichseitige** Dreiecke.

Das **spitzwinklige** Dreieck hat 3 spitze Winkel.

Das **rechtwinklige** Dreieck hat 1 rechten und 2 spitze Winkel.

Das **stumpfwinklige** Dreieck hat 1 stumpfen und 2 spitze Winkel.

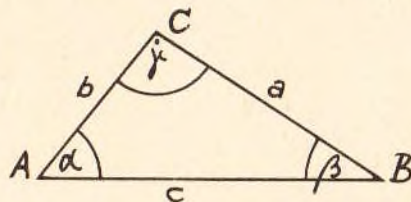
Im **gleichseitigen** Dreieck sind alle Seiten gleich lang.

Im **gleichschenkligen** Dreieck sind nur zwei Seiten gleich lang.

Im **ungleichseitigen** Dreieck sind alle drei Seiten ungleich lang.

Im rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden, **Katheten**; die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, ist die **Hypotenuse**.

Die Seiten, Ecken und Winkel im Dreieck



Die **Ecken** eines Dreiecks werden mit **A, B und C** bezeichnet.

Den **Ecken A, B, C** liegen die **Seiten a, b, c** gegenüber.

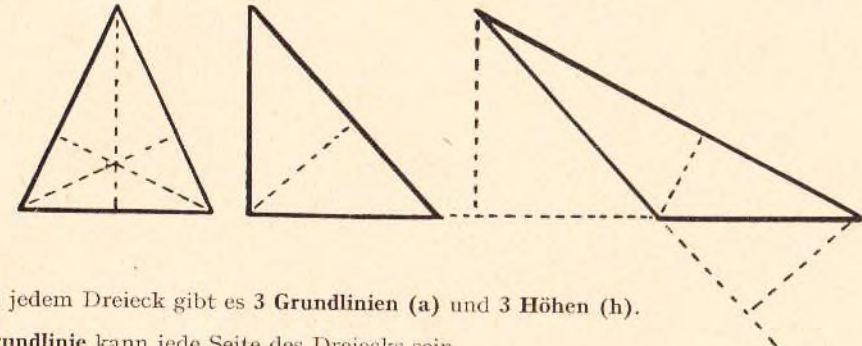
Den **Seiten a, b, c** liegen die **Winkel α, β, γ** gegenüber.

(α = Alpha, β = Beta, γ = Gamma, das sind die Anfangsbuchstaben des griechischen Alphabets.)

Dreieckswinkel

Die Summe der Winkel beträgt in jedem Dreieck 180°

Dreieckshöhen



In jedem Dreieck gibt es 3 **Grundlinien (a)** und 3 **Höhen (h)**.

Grundlinie kann jede Seite des Dreiecks sein.

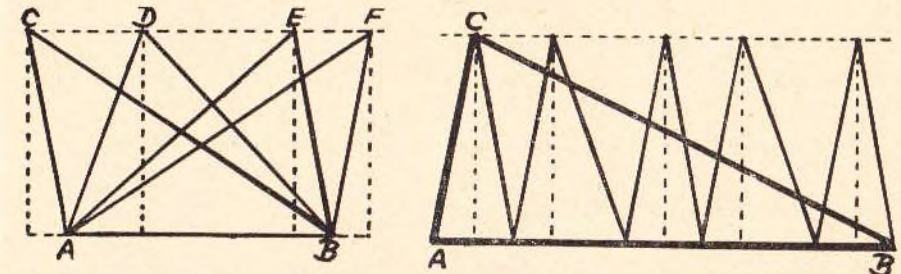
Die Senkrechte von der Spitze zur gegenüberliegenden Grundlinie ist die **Höhe**.

Im **spitzwinkligen** Dreieck gibt es drei Höhen; sie schneiden sich in einem Punkte.

Im **rechtwinkligen** Dreieck werden zwei Höhen durch die senkrecht aufeinanderstehenden Katheten gebildet.

Im **stumpfwinkligen** Dreieck liegen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks.

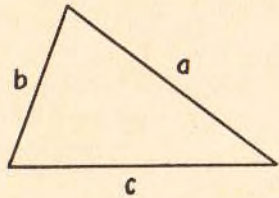
Inhaltsgleiche Dreiecke



Das Dreieck ABC und die Summe der fünf einzelnen Dreiecke sind inhaltsgleich, da sie die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe haben.

Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

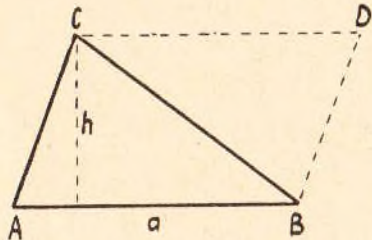
Die Berechnung des Umfangs



$$U = a + b + c$$

Der Umfang des Dreiecks ist gleich der Summe der Seitenlängen.

Die Berechnung des Inhalts



$$F = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$a = \frac{2F}{h}$$

$$h = \frac{2F}{a}$$

Wir schneiden aus Papier zwei gleich große Dreiecke (ABC und BCD) und legen das Dreieck BCD umgekehrt (mit der Spitze nach unten) neben das Dreieck ABC. Es entsteht ein **Rhomboid** (ABDC), das **doppelt so groß** ist wie das Dreieck ABC. Umgekehrt ist das Dreieck ABC die **Hälfte des Parallelogramms** ABDC, das die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe hat.

Man berechnet den **Inhalt eines Dreiecks**, indem man das dazugehörige Parallelogramm (= 2 Dreiecke) berechnet und das Ergebnis durch 2 dividiert.

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} : 2 \quad F = \frac{a \cdot h}{2}$$

Wenn also die **Grundlinie 6 cm** und die **Höhe 4 cm** betragen, dann berechnen wir

$$\text{den Inhalt des Dreiecks: } \frac{6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Man kann auch den **Inhalt des Dreiecks** berechnen, indem man die **halbe Grundlinie** mit der **Höhe** multipliziert,

$$\text{also: } \frac{6}{2} \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

$$F = \frac{a}{2} \cdot h$$

oder indem man die **halbe Höhe** mit der **Grundlinie** multipliziert,

$$\text{also: } \frac{4}{2} \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

$$F = \frac{h}{2} \cdot a$$

Umkehrungen:

Man berechnet die **Grundlinie eines Dreiecks**, indem man den **zweifachen Inhalt** durch die **Höhe** dividiert,

$$\text{also: } \frac{24 \text{ cm}^2}{4 \text{ cm}} = 6 \text{ cm}$$

$$a = \frac{2F}{h}$$

Man berechnet die **Höhe eines Dreiecks**, indem man den **zweifachen Inhalt** durch die **Grundlinie** dividiert,

$$\text{also: } \frac{24 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} = 4 \text{ cm}$$

$$h = \frac{2F}{a}$$

Angewandte Aufgaben

308. Die Grundlinie eines dreieckigen Platzes beträgt 46,30 m, die Höhe 24,60 m. Berechne den Flächeninhalt!
309. Der Flächeninhalt eines dreieckigen Feldes beträgt 1350 m², die Grundlinie ist 75 m lang. Berechne die Höhe!
310. Die Spitze eines dreieckigen Ackers ist von der gegenüberliegenden Grundseite 75 m entfernt, der Flächeninhalt beträgt 97 $\frac{1}{2}$ a. Berechne die Grundlinie!
311. Ein dreieckiger Garten hat eine Grundlinie von 35 $\frac{3}{4}$ m und eine Höhe von 26,50 m. Wieviel kostet der Garten, wenn 1 a mit 250 DM berechnet wird?
312. Ein Baugrundstück hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 56 $\frac{1}{2}$ m und 34,75 m lang sind. Wieviel kostet das Grundstück, wenn 1 m² mit 26,75 DM berechnet wird?
313. Ein dreieckiges Grundstück mit einer Grundlinie von 124,80 m und einer Höhe von 164,75 m wird gegen ein rechteckiges Grundstück mit einer Länge von 136,50 m ausgetauscht. Berechne die Breite!

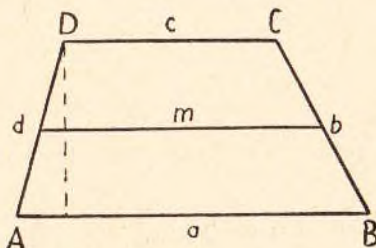
314. Ein Kirchturmdach mit 4 dreieckigen Seitenflächen soll mit Dachschiefer belegt werden. Die Grundlinie der Seitenflächen ist 4,80 m, die Höhe 12,50 m, 1 m² Schieferbelag wird mit 11,50 DM berechnet. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?
315. Eine Baugesellschaft baut 10 Häuser. Jedes Haus hat 4 gleiche dreieckige Dachflächen mit 6,80 m Grundlinie und 4,75 m Höhe. Wieviel Dachziegel werden insgesamt benötigt, wenn auf 1 m² 12 Stück gerechnet werden?
316. Ein rechteckiger Acker von 120 m Länge und 36 m Breite wird gegen einen gleich großen dreieckigen Acker, dessen Grundseite 135 m beträgt, eingetauscht. Wie groß ist die Höhe des Dreiecks?
317. Die Vorderfront und ein Seitengiebel eines Hauses sollen gestrichen werden. Länge des Hauses 28,40 m, Breite 12,50 m, Höhe bis zur Dachkante 15,20 m, Höhe bis zur Dachspitze 21,75 m. An der Vorderfront werden für Fenster und Türen 24 m², am Seitengiebel 15 m² abgerechnet. Wieviel kostet der Anstrich, wenn 1 m² mit 4,20 DM berechnet wird?

i) Das Trapez und das Trapezoid

Ein **Trapez** ist ein **Viereck** mit nur zwei parallelen Seiten.

Die **Seiten** des Trapezes sind **ungleich**.

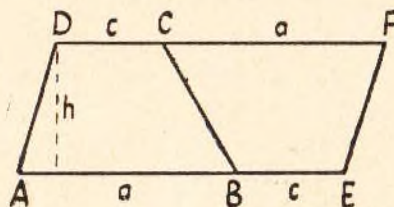
Die Berechnung des Umfangs



$$U = a + b + c + d$$

Der Umfang des Trapezes ist gleich der Summe der Seitenlängen.

Die Berechnung des Inhalts



$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h \text{ oder } m \cdot h$$

Die Linie AB ist die **große Grundlinie**: a.

Die Linie DC ist die **kleine Grundlinie**: c.

Der senkrechte Abstand ist die **Höhe**: h.

Wir legen zwei inhaltsgleiche Trapeze umgekehrt nebeneinander; es entsteht ein **schiefwinkliges Parallelogramm** (AEFD), dessen Grundlinie aus der **großen und kleinen Grundlinie** des Trapezes (ABCD) besteht: a + c.

Der **Inhalt des Parallelogramms** (AEFD) wird berechnet: (a + c) · h.

Da es aus zwei inhaltsgleichen Trapezen besteht,

berechnet man den **Inhalt des Trapezes**:

$$\text{Große Grundlinie} + \text{kleine Grundlinie} : 2 \cdot \text{Höhe} \quad F = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

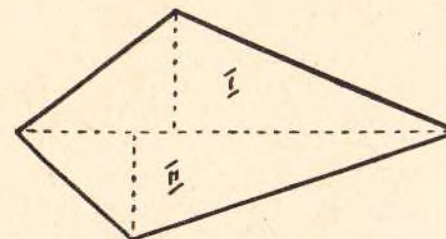
Wenn wir die große Grundlinie (a) und die kleine Grundlinie (c) addieren und durch 2 dividieren $\frac{(a + c)}{2}$, erhalten wir die **Mittellinie**: m.

Wir können also in der Formel für $\frac{(a + c)}{2}$ auch m einsetzen.

Die **Kurzformel** für die Inhaltsberechnung des Trapezes heißt also:

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Mittellinie} \cdot \text{Höhe} \quad F = m \cdot h$$

Inhaltsberechnung des Trapezoids



Ein **Viereck** ohne parallele Seiten nennt man **Trapezoid**.

Man berechnet den **Inhalt des Trapezoids**, indem man es durch eine Diagonale in **Dreiecke** zerlegt und diese berechnet.

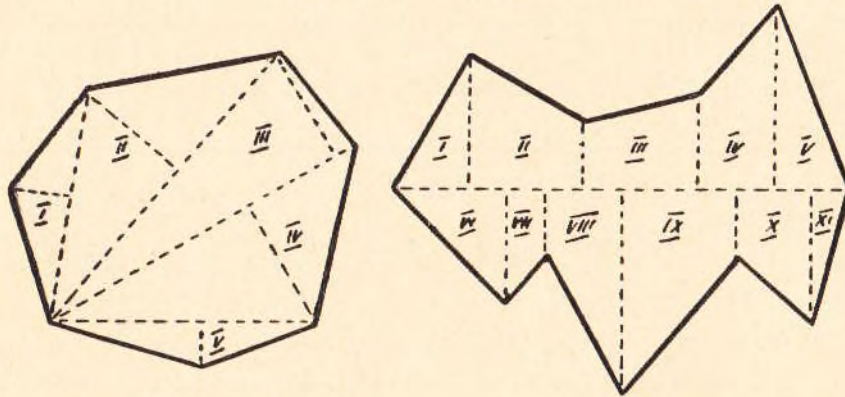
Angewandte Aufgaben

318. Die große Grundlinie eines Trapezes beträgt 36,50 m, die kleine 25,40 m, die Höhe 17,35 m. Wie groß ist der Inhalt?
319. Der Inhalt eines Trapezes beträgt 936 m². Die große Grundlinie ist 88,50 m, die kleine 36,30 m lang. Wie groß ist die Höhe?

320. Die beiden parallelen Seiten eines trapezförmigen Baugeländes sind 29,50 m und 25 m lang, der senkrechte Abstand beträgt 18,20 m. Was kostet das Baugelände, wenn 1 m² mit 18,75 DM berechnet wird?
321. Eine trapezförmige Dachfläche soll mit Ziegeln belegt werden. Die beiden Grundlinien sind 13,80 m und 11,40 m lang und die Höhe beträgt 7,50 m. Die Dachziegel sind 24 cm lang und 15 cm breit. Wieviel Ziegel sind erforderlich, wenn für Überdeckung $\frac{1}{5}$ der erforderlichen Ziegel gerechnet wird?

j) Das Vieleck

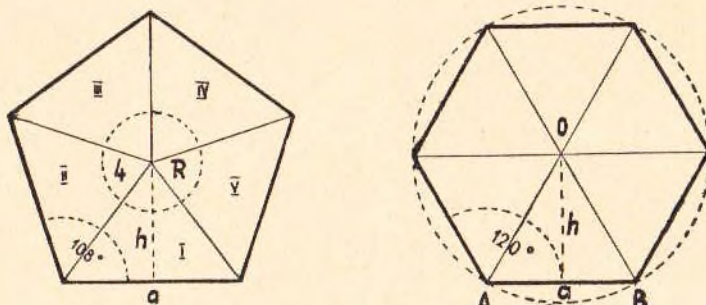
Das unregelmäßige Vieleck



Die Berechnung des Inhalts

Das unregelmäßige Vieleck wird in berechenbare Flächen (Dreiecke — Rechtecke — Trapeze) aufgeteilt; die einzelnen Teilflächen werden berechnet und ihre Ergebnisse addiert.

Das regelmäßige Vieleck



$$F = \frac{a \cdot h}{2} \cdot n$$

Die Berechnung des Inhalts

Verbindet man im regelmäßigen Vieleck den Mittelpunkt mit den Ecken, so entstehen soviele **Dreiecke**, als das Vieleck **Seiten** hat.

Da diese Dreiecke alle gleich groß sind, brauchen wir nur **ein** Dreieck, das sog. **Bestimmungsdreieck**, zu berechnen und den **Inhalt dieses Dreiecks** mit der **Seitenzahl** zu vervielfachen.

Die **Grundlinie** des Bestimmungsdreiecks nennen wir **a**.

Die **Höhe** des Bestimmungsdreiecks nennen wir **h**.

Die **Anzahl der Seiten** des Vielecks nennen wir **n**.

Wir berechnen also den Inhalt des regelmäßigen Vielecks:

$$\text{Bestimmungsdreieck mal Seitenzahl: } \frac{a \cdot h}{2} \cdot n$$

Da **Seitenlänge mal Seitenzahl** ($a \cdot n$) gleich **Umfang des Vielecks** (U) ist, heißt die Kurzformel:

$$\text{Flächeninhalt} = \text{Umfang} \cdot \text{Höhe} : 2 \quad F = \frac{U \cdot h}{2}$$

Die Höhe des Bestimmungsdreiecks (Seitenstrahl)

Im regelmäßigen Vieleck steht die **Höhe des Bestimmungsdreiecks** in einem bestimmten Verhältnis zur **Seite**. Nimmt man die **Seite des Vielecks** mit 1 an, dann beträgt die **Höhe des Bestimmungsdreiecks**

beim regelmäßigen Fünfeck	0,688
beim regelmäßigen Sechseck	0,866
beim regelmäßigen Achteck	1,207
beim regelmäßigen Zehneck	1,538
beim regelmäßigen Zwölfeck	1,866

Bei der Inhaltsberechnung eines regelmäßigen Vielecks braucht also nur die **Seite des Bestimmungsdreiecks** gegeben zu sein; die **Höhe des Bestimmungsdreiecks**, der **Seitenstrahl**, kann dann berechnet werden.

Beispiel:

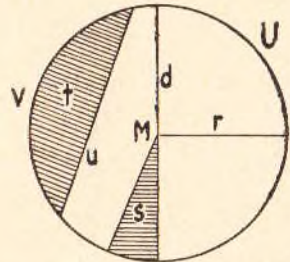
Wir suchen die unbekannte Höhe eines regelmäßigen Fünfecks, dessen Seitenlänge 3,25 m beträgt.

Wenn die **Seite 1 m** lang ist, so ist die **Höhe 0,688 m**;

wenn die **Seite 3,25 m** lang ist, so ist die **Höhe** $3,25 \cdot 0,688 = 2,236 \text{ m}$.

Angewandte Aufgaben

322. Berechne den Inhalt eines regelmäßigen Fünfecks (Sechsecks, Achtecks), dessen Seitenlänge 6,5 m beträgt!
323. Die Seitenlänge eines Blumenbeetes, das die Gestalt eines regelmäßigen Achtecks hat, beträgt 5 m. Berechne den Flächeninhalt!
324. Ein Schloßhof, der die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat, soll mit Steinplatten belegt werden. Die Seitenlänge des Hofes beträgt 3,50 m. 1 m² verlegter Platten wird mit 6,50 DM berechnet. a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Hofes? b) Was kostet das Belegen des Hofes mit Steinplatten?

5. Der Kreis

- U = Kreisumfang (Peripherie)
 F = Kreisinhalt
 M = Kreismittelpunkt
 d = Durchmesser
 r = Halbmesser (Radius)
 u = Sehne
 v = Kreishbogen
 s = Kreisausschnitt (Sektor)
 t = Kreisabschnitt (Segment)

Der **Kreisumfang** (die **Kreislinie** oder **Peripherie**) ist eine geschlossene, gleichmäßig gekrümmte Linie, deren sämtliche Punkte gleich weit von einem Punkt, dem **Kreismittelpunkt**, entfernt sind.

Der **Kreisinhalt** (die **Kreisfläche**) ist die Fläche, die von der Kreislinie (vom Kreisumfang) eingeschlossen wird.

Der **Durchmesser** ist eine gerade Linie, die von einem Punkt der Kreislinie durch den Kreismittelpunkt zum gegenüberliegenden Punkt der Kreislinie führt.

Das **Zeichen für Durchmesser** ist Ø.

Der **Halbmesser (Radius)** ist die kürzeste Entfernung von einem Punkt der Kreislinie zum Kreismittelpunkt.

Die **Sehne** ist eine gerade Linie, die von einem Punkt der Kreislinie zu einem anderen Punkt der Kreislinie führt, ohne den Kreismittelpunkt zu berühren.

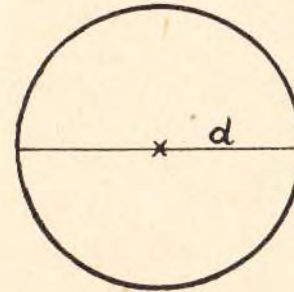
Der **Kreishbogen** ist ein Teil der Kreislinie.

Der **Kreisausschnitt (Sektor)** ist der Teil einer Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und einem Bogen begrenzt wird.

Der **Kreisabschnitt (Segment)** ist der Teil einer Kreisfläche, der von Sehne und Bogen begrenzt wird.

Ein **Kreis** wird in **360 Grad (360°)** eingeteilt.

1 Grad (1°) = 60 Minuten (60'), 1 Minute = 60 Sekunden (60'').

a) Die Umfangsberechnung des Kreises

$$U = d \cdot \pi \quad \text{oder} \quad U = 2r \cdot \pi$$

$$d = \frac{U}{\pi} \quad \text{oder} \quad r = \frac{U}{2\pi}$$

Wir messen mit einer Schnur den **Umfang** und den **Durchmesser** eines Wagenrades und teilen den Umfang durch den Durchmesser.

Wir wiederholen diese Übung an mehreren größeren und kleineren Kreisen.

Das Ergebnis ist bei genauer Messung immer das gleiche:

Kreisumfang geteilt durch Durchmesser ist **3,14159** (gekürzt: 3,14 oder $3\frac{1}{7}$).

In der Formel drückt man 3,14 oder $3\frac{1}{7}$ durch den griech. Buchstaben **pi** aus.

Das **Zeichen für pi** ist: π .

Wenn nun **Kreisumfang geteilt durch Durchmesser 3,14** oder π ist, dann ist **Durchmesser mal 3,14** oder π gleich dem **Kreisumfang**; also:

$$\text{Kreisumfang} = \text{Durchmesser} \cdot 3,14 \quad U = d \cdot \pi$$

Da der Durchmesser doppelt so groß ist wie der Halbmesser, heißt die Formel auch:

$$U = 2r \cdot \pi$$

Die **Umkehrungen** lauten:

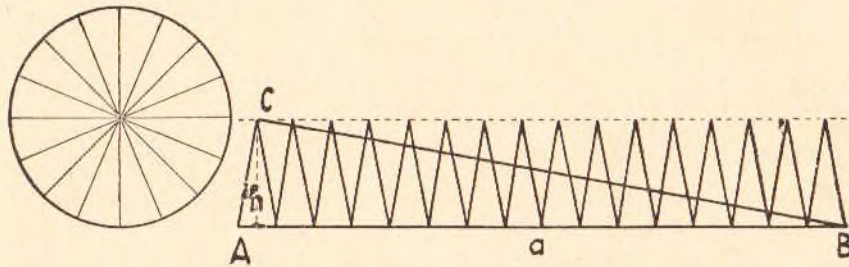
$$d = \frac{U}{\pi} \quad \text{oder} \quad r = \frac{U}{2\pi}$$

Angewandte Aufgaben

325. Der Durchmesser eines Kreises ist 2,70 m lang. Berechne den Umfang! ($\pi = 3,14$)
326. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, wenn der Radius 35 cm beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$)
327. Der Umfang eines kreisförmigen Wasserbeckens ist 37,68 m. Berechne den Durchmesser! ($\pi = 3,14$)
328. Wie lang ist der Radius eines runden Blumenbeetes, dessen Umfang 17,16 m beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$)
329. Der Umfang eines Baumes mißt 2,041 m. Berechne die Dicke des Baumes!

330. Die runde Kochstelle eines Küchenherdes, deren 3 Ringe je 2,1 cm breit sind, hat einen Durchmesser von 26 cm. Berechne den Umfang der 3 Ringe und des kreisförmigen Mittelstückes!
331. Wieviel m Bandeisen benötigt ein Schmied zum Beschlagen der 4 Räder eines Wagens, wenn die Vorderräder 68 cm und die Hinterräder 96 cm hoch sind?
332. Um einen runden Teich, der einen Durchmesser von $36\frac{1}{2}$ m hat, soll ein Geländer angebracht werden. Wieviel kostet das Geländer, wenn das laufende Meter mit 12,75 DM berechnet wird?

b) Die Inhaltsberechnung des Kreises



Wir zerlegen die **Kreisfläche** in **16 gleiche Kreisausschnitte** (linkes Bild) und ziehen die Kreisfläche auseinander (rechtes Bild).

Die 16 Kreisausschnitte bilden nun **16 gleiche Dreiecke** mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Diese **16 Dreiecke**, die zusammengefaßt den **Inhalt des Kreises** bilden, sind ebenfalls inhaltsgleich dem großen **Dreieck ABC**, da Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe inhaltsgleich sind.

Wenn also die **Kreisfläche** und die **16 Dreiecke** inhaltsgleich und die **16 Dreiecke** dem **Dreieck ABC** inhaltsgleich sind, dann ist auch das **Dreieck ABC** gleich dem **Inhalt des Kreises**.

Man berechnet also den **Inhalt des Kreises**:

$$F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{U \cdot r}{2} = \frac{d \cdot \pi \cdot r}{2} = \frac{2r \cdot \pi \cdot r}{2} = r \cdot r \cdot \pi = \underline{\underline{r^2 \cdot \pi}}$$

Erklärung:

Nach vorstehender Darlegung wird der **Inhalt des Kreises** so berechnet wie der

Inhalt des Dreiecks ABC, also:

$$\frac{a \cdot h}{2}$$

Da die **Grundlinie des Dreiecks ABC** (= a) zusammengefaßt gleich dem **Umfang des Kreises** und die **Höhe des Dreiecks** (= h) gleich dem **Radius** ist, kann man für Grundlinie (a) **Umfang (U)** und für Höhe (h) **Radius (r)** einsetzen, also:

$$\frac{U \cdot r}{2}$$

Da der **Umfang des Kreises** $d \cdot \pi$ berechnet wird, kann man für Umfang (U) $d \cdot \pi$ einsetzen, also:

$$\frac{d \cdot \pi \cdot r}{2}$$

Für **Durchmesser (d)** kann man **2 Radius (2r)** einsetzen, also:

$$\frac{2r \cdot \pi \cdot r}{2}$$

Wir kürzen die 2 und stellen um, also: $r \cdot r \cdot \pi$ oder

$$\underline{\underline{r^2 \cdot \pi}}$$

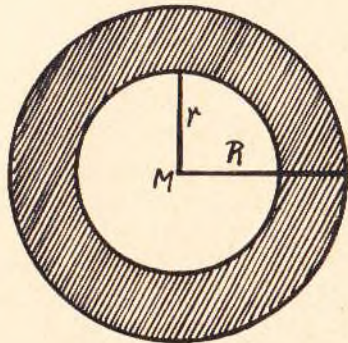
Kreisinhalt = Radius · Radius · 3,14 $F = r^2 \cdot \pi$

Angewandte Aufgaben

333. Der Halbmesser eines Kreises ist 1,35 m. Berechne den Inhalt!
334. Der Umfang eines Baumstammes mißt 1,8212 m. Berechne den Inhalt des Querschnitts!
335. Der Umfang einer kreisrunden Rasenfläche ist 72,22 m. Wie groß ist die Rasenfläche?
336. Der Durchmesser eines Kreises und die Länge eines inhaltsgleichen Rechtecks betragen beide 26 cm. Berechne die Breite des Rechtecks!
337. Der Halbmesser eines Kreises ist 12 cm, die Grundlinie eines inhaltsgleichen Dreiecks 36 cm lang. Berechne die Höhe des Dreiecks!
338. Der äußere Umfang einer kreisrunden Waschmaschine, deren Dauben (Seitenwandbretter) 2,2 cm dick sind, mißt 188,4 cm. Berechne die Bodenfläche!
339. Sechs Rundfenster mit einem Durchmesser von 1,25 m werden verglast. Wieviel m² Glas sind erforderlich, wenn für Verschnitt 15 % gerechnet werden?
340. In einer kreisrunden Grünfläche von 78,50 m Umfang werden jeweils 4 kreisförmige Blumenbeete mit einem Durchmesser von 2,60 m angelegt. Wieviel m² Rasen bleiben übrig?
341. Der Grundriß einer Kirche besteht aus einem Rechteck von 32,60 m Länge und 24,80 m Breite. Der angefügte Chor ist ein Halbkreis mit einem Durchmesser von 16,40 m. Wie groß ist die gesamte Bodenfläche?
342. Für einen runden Tisch, der einen Durchmesser von 1,16 m hat, soll eine Decke gefertigt werden, die überall 25 cm überhängt. a) Wieviel m² Stoff hat die Tischdecke? b) Die Decke bekommt am äußeren Rand noch eine Borte, die je Meter 1,30 DM kostet. Wieviel kostet die Borte?

c) Der Kreisring

Der **Kreisring** ist eine Fläche, die von zwei **konzentrischen Kreisen** (das sind Kreise mit **gemeinsamem Mittelpunkt**) mit **verschiedenen Halbmessern** begrenzt wird.



Den **großen Radius** bezeichnen wir mit **R**.

Den **kleinen Radius** bezeichnen wir mit **r**.

Die **große Kreisfläche** berechnen wir: $R^2 \cdot \pi$.

Die **kleine Kreisfläche** berechnen wir: $r^2 \cdot \pi$.

Wenn wir die kleine Kreisfläche von der großen Kreisfläche subtrahieren, erhalten wir den **Kreisring**.

Große Kreisfläche	$F = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi$
— kleine Kreisfläche	oder einfacher
= Kreisring	$F = (R^2 - r^2) \cdot \pi$

Angewandte Aufgaben

343. Der große Radius eines Kreises ist 12 cm, der kleine ist 8 cm lang. Berechne den Flächeninhalt des Kreisrings!
344. Eine kreisförmige Rasenfläche mit 32,50 m Durchmesser ist von einem 2,50 m breiten Weg umgeben, der zu beiden Seiten mit Draht abgegrenzt werden soll. Wieviel laufende Meter Draht werden benötigt?
345. Der Umfang des großen Kreises beträgt 219,8 cm, der Umfang des kleinen Kreises 175,84 cm. Wie groß ist der Kreisring?
346. In der Mitte eines runden Teiches von 471 m Umfang liegt eine runde Insel, die einen Durchmesser ($\varnothing$) von 36,40 m hat. Berechne die Wasserfläche des Teiches!
347. Der äußere Umfang eines runden Turmes ist 26,69 m, der innere Durchmesser 7,24 m. Wieviel m^2 Grundfläche hat die Mauer?
348. Ein Teich mit einem Durchmesser von 24 m ist von einem 2 m breiten Weg umgeben, der zu beiden Seiten mit Randsteinen eingefasst und mit Kies bestreut werden soll. a) Wieviel Randsteine von 45 cm Länge werden benötigt? b) Wieviel Karren Kies sind erforderlich, wenn man auf 1 m^2 1 Karre rechnet?

6. Das Quadratwurzelnziehen

Wenn wir aus dem **Inhalt eines Quadrates** die **Seite** oder aus dem **Inhalt eines Kreises** den **Halbmesser (Radius)** berechnen wollen, müssen wir die **Quadratwurzel** ziehen.

$$9 \cdot 9 \text{ oder } 9^2 \text{ (lies: 9 hoch 2 oder 9 zum Quadrat)} = 81$$

Multipliziert man eine Zahl (9) mit sich selbst ($9 \cdot 9$), dann nennt man das Produkt (81) die **Quadratzahl**.

Umgekehrt kann man aus einer Quadratzahl die Wurzel ziehen.

Die **Quadratwurzel** aus der Quadratzahl 81 ist **9**; denn $9 \cdot 9$ oder $9^2 = 81$.

Merke:

Die **Quadratwurzel ziehen** heißt, eine Zahl suchen, die, mit sich selbst multipliziert, die gegebene Quadratzahl ergibt.

Die Wurzel aus 36 stellt man dar: $\sqrt{36}$

Das **Wurzelzeichen** $\sqrt{\quad}$ bedeutet r (Anfangsbuchstabe von radix = Wurzel).

Bilde folgende Quadratzahlen:

$$8^2 \quad 12^2 \quad 20^2 \quad 60^2 \quad 100^2 \quad 700^2 \quad 1000^2 \quad 9000^2$$

Wir stellen dabei fest:

Die Quadratzahl von **1stelligen Zahlen** ist **1- oder 2stellig**.

Die Quadratzahl von **2stelligen Zahlen** ist **3- oder 4stellig**.

Die Quadratzahl von **3stelligen Zahlen** ist **5- oder 6stellig**.

Ziehe folgende Quadratwurzeln:

$$\sqrt{36} \quad \sqrt{64} \quad \sqrt{169} \quad \sqrt{625} \quad \sqrt{4900} \quad \sqrt{8100} \quad \sqrt{10000} \quad \sqrt{250000}$$

Wir stellen fest:

Die **Quadratwurzel** aus **1- oder 2stelligen Zahlen** ist **1stellig**.

Die **Quadratwurzel** aus **3- oder 4stelligen Zahlen** ist **2stellig**.

Die **Quadratwurzel** aus **5- oder 6stelligen Zahlen** ist **3stellig**.

Das Quadrat einer zweistelligen Zahl

Das Quadrat von 23

$a \cdot b$	b^2
a^2	$a \cdot b$
a	b
20 Z	$+ 3$ E

Z = Zehner

E = Einer

Die Bestandteile des Quadrates von 23 sind:

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 23 = 20 \cdot 20 + 20 \cdot 3 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 3 = \\ \underline{69} \quad \underline{400} \quad \underline{60} \quad \underline{60} \quad \underline{9} \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$(Z+E)^2 = Z^2 + 2 \cdot Z \cdot E + E^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Erklärung:

Das vorstehende Quadrat hat eine Seitenlänge von 23 cm, das sind 2 Zehner (Z) und 3 Einer (E). Die Zehner bezeichnen wir mit a, die Einer mit b.

Die Bestandteile des Quadrates sind:

- das Zehnerquadrat ($20 \cdot 20 = 400$) = Z^2 oder a^2 ,
- das 2fache Produkt der Zehner und Einer als 2 Rechtecke ($20 \cdot 3 + 3 \cdot 20 = 120$) = $2 \cdot Z \cdot E$ oder $2 \cdot a \cdot b$, kurz: $2ab$,
- das Einerquadrat ($3 \cdot 3 = 9$) = E^2 oder b^2 .

Das Quadrat $(a+b)^2$ besteht also aus $a^2 + 2ab + b^2$.

Das Quadratwurzelnziehen aus 3- oder 4stelligen Zahlen

Zieht man aus einer 3- oder 4stelligen Zahl die Quadratwurzel, dann müssen sich die im Quadrat enthaltenen 3 Bestandteile: das Zehnerquadrat (a^2), die 2 Rechtecke ($2ab$) und das Einerquadrat (b^2) abziehen lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5/29} = 23 \\ a^2 = 4 \quad 2a \\ 129 : 40 \\ 2ab = 120 \\ \underline{9} \\ b^2 = 9 \\ \underline{0} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 23 \\ \underline{69} \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

Die Quadratwurzel aus 529 wird also wie folgt errechnet:

a) Wir setzen vor die Zahl 529 das Wurzelzeichen: $\sqrt{529}$.

b) Wir teilen die Zahl 529 von rechts nach links in 2stellige Gruppen ein: $\sqrt{5/29}$. Die Anzahl der Gruppen gibt die Stellenzahl des Ergebnisses an.

c) Wir rechnen:

Die Wurzel aus 5 ist 2; denn $2 \cdot 2 = 4$. (Wir müßten eigentlich sagen: Die Wurzel aus 529 ist 20; denn $20 \cdot 20 = 400$. Die 2 Nullen werden nicht niedergeschrieben.)

Die 2 (2 Z oder 20 E) setzen wir als a in das Ergebnis ein und ziehen die 4 (400) als a^2 von 5 (529) ab; es bleibt ein Rest von 1 (100). Wir holen die 29 herunter; der Rest ist nun 129.

Diesen Rest 129 teilen wir durch 2a ($a = 20$, $2a = 40$), dann erhalten wir die nächste Stelle des Ergebnisses = b (3).

Nun vervielfachen wir b mit 2a ($3 \cdot 40$), dann erhalten wir 2ab (120). Wir ziehen 2ab (120) von 129 ab; es bleibt ein Rest von 9.

Von diesem Rest 9 ziehen wir b^2 ($3 \cdot 3 = 9$) ab; es bleibt 0 übrig. Die Quadratwurzel aus 529 ist also 23; denn $23 \cdot 23 = 529$.

Das Quadrat einer dreistelligen Zahl

Das Quadrat von 423

$(a+b) \cdot c$	c^2
$a \cdot b$	b^2
a^2	$a \cdot b$
a	b
400	$+ 20 \cdot 3$

Die Bestandteile des Quadrates von 423 sind:

$$\begin{array}{r} 423 \cdot 423 = \frac{400 \cdot 400}{160000} + \frac{400 \cdot 20}{8000} + \frac{20 \cdot 400}{8000} + \frac{20 \cdot 20}{400} + \frac{420 \cdot 3}{1260} + \frac{3 \cdot 420}{1260} + \frac{3 \cdot 3}{9} = \frac{160000}{160000} + \frac{8000}{8000} + \frac{8000}{8000} + \frac{400}{400} + \frac{2520}{2520} + \frac{2520}{2520} + \frac{9}{9} = \frac{178929}{178929} \end{array}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2$$

Erklärung:

Das vorstehende Quadrat hat eine Seitenlänge von 423 cm, das sind **4 Hunderter**, **2 Zehner** und **3 Einer**. Die **Hunderter** bezeichnen wir mit **a**, die **Zehner** mit **b**, die **Einer** mit **c**.

Die Bestandteile des Quadrates sind:

- a) das **Hunderterquadrat** ($400 \cdot 400 = 160000$) = a^2 ,
 - b) das 2fache Produkt der Hunderter und Zehner als **2 Rechtecke** ($400 \cdot 20 + 20 \cdot 400 = 16000$) = $2ab$,
 - c) das **Zehnerquadrat** ($20 \cdot 20 = 400$) = b^2 ,
 - d) das 2fache Produkt der Hunderter plus Zehner ($a + b$) und Einer (c) als weitere **2 Rechtecke** ($420 \cdot 3 + 3 \cdot 420 = 2520$) = $2(a + b) \cdot c$,
 - e) das **Einerquadrat** ($3 \cdot 3 = 9$) = c^2 .
- $(a + b + c)^2$ besteht also aus $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2$.

Das Quadratwurzelziehen aus 5- oder 6stelligen Zahlen

Zieht man aus einer 5- oder 6stelligen Zahl die Quadratwurzel, dann müssen sich die im Quadrat enthaltenen 5 Bestandteile:
das Hunderterquadrat (a^2),
die 2 großen Rechtecke ($2ab$), das Zehnerquadrat (b^2),
die 2 kleinen Rechtecke ($2(a + b) \cdot c$) und das Einerquadrat (c^2) abziehen lassen.

Beispiel:

	a b c	Probe:	423 · 423
$a^2 =$	$\sqrt{178929} = 423$ 16		1269
$2ab =$	189 : 80 160		846
	29		1692
$b^2 =$	4 2 (a+b) 2529 : 840		178929
$2(a+b) \cdot c =$	2520		
	9		
$c^2 =$	9		
	0		

Die Quadratwurzel aus 178 929 wird also wie folgt errechnet:

a) Wir setzen vor die Zahl 178 929 das **Wurzelzeichen**: $\sqrt{178929}$

b) Wir teilen die Zahl 178 929 von rechts nach links in **2stellige Gruppen** ein:
 $\sqrt{17/89/29}$

Die Anzahl der Gruppen gibt die Stellenzahl des Ergebnisses an.

c) Wir rechnen:

Die Wurzel aus 17 ist 4; denn $4 \cdot 4 = 16$. (Wir müßten eigentlich sagen: Die Wurzel aus 178 929 ist 400; denn $400 \cdot 400 = 160 000$. Die Nullen werden hier und in der Folge nicht niedergeschrieben, so daß die Kurzform des Quadratwurzelziehens lautet: Die Wurzel aus 17 ist 4; denn $4 \cdot 4 = 16$.)

Die 4 setzen wir als **a** in das Ergebnis ein und **ziehen** 16 als a^2 von 17 **ab**; es bleibt ein Rest von 1.

Wir holen die 89 herunter; der Rest ist nun 189.

Diesen Rest 189 **teilen** wir **durch 2a**, dann erhalten wir die nächste Stelle des Ergebnisses = **b**.

Nun **vervielfachen** wir **b mit 2a** ($2 \cdot 80$) und erhalten $2ab$ (160).

Wir **ziehen 2ab** (160) von 189 **ab**; es bleibt ein Rest von 29.

Von diesem Rest 29 **ziehen** wir b^2 (**4**) **ab**; es bleibt ein Rest von 25.

Wir holen die 29 herunter; der Rest ist nun 2 529.

Diesen Rest 2 529 **teilen** wir **durch 2 (a + b)**, dann erhalten wir die nächste Stelle des Ergebnisses = **c**.

Nun **vervielfachen** wir **c mit 2 (a + b)** = $3 \cdot 840$, dann erhalten wir $2(a + b) \cdot c = 2520$.

Wir **ziehen 2 (a + b) · c** = 2 520 von 2 529 **ab**; es bleibt ein Rest von 9.

Von diesem Rest 9 **ziehen** wir c^2 (9) **ab**; es bleibt 0 übrig.

Die Quadratwurzel aus 178 929 ist also 423; denn $423 \cdot 423 = 178 929$.

Praktische Übungen

Der Rechenvorgang beim Quadratwurzelziehen wurde vorstehend erläutert.

Das praktische Rechnen geschieht nun nach folgendem Verfahren:

Wir ziehen die Wurzel aus drei- und vierstelligen Zahlen

$$\sqrt{53/29} = 73$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{429 : 140} \\ 420 \\ \underline{9} \\ 9 \\ \underline{0} \end{array}$$

Rechne:

Die Wurzel aus 53 ist 7; denn $7 \cdot 7 = 49$; Rest 4. $429 : 140$ ($140 = 2 \cdot 7$ mit angehängter 0) = 3. $429 - 420$ ($420 = 3 \cdot 140$) = 9. $9 - 9$ ($9 = 3 \cdot 3$) = 0.Probe: $73 \cdot 73 = 5329$

Übungsaufgabe 349

Ziehe die Wurzel aus: 484, 676, 729, 841, 1 024, 1 444, 3 136, 6 889, 8 836, 9 409!

Wir ziehen die Wurzel aus vielstelligen Zahlen

$$\sqrt{7/52/95/36} = 2744$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{352 : 40} \\ 280 \\ \underline{72} \\ 49 \\ \underline{2395 : 540} \\ 2160 \\ \underline{235} \\ 16 \\ \underline{21936 : 5480} \\ 21920 \\ \underline{16} \\ 16 \\ \underline{0} \end{array}$$

Rechne:

Die Wurzel aus 7 ist 2; denn $2 \cdot 2 = 4$; Rest 3. $352 : 40$ ($40 = 2 \cdot 2$ mit angehängter 0) = 7. $352 - 280$ ($280 = 7 \cdot 40$) = 72. $72 - 49$ ($49 = 7 \cdot 7$) = 23. $2\,395 : 540$ ($540 = 2 \cdot 27$ mit angehängter 0) = 4. $2\,395 - 2\,160$ ($2\,160 = 4 \cdot 540$) = 235. $235 - 16$ ($16 = 4 \cdot 4$) = 219. $21\,936 : 5\,480$ ($5\,480 = 2 \cdot 274$ mit angehängter 0) = 4. $21\,936 - 21\,920$ ($21\,920 = 4 \cdot 5\,480$) = 16. $16 - 16$ ($16 = 4 \cdot 4$) = 0.Probe: $2744 \cdot 2744 = 7\,529\,536$

Übungsaufgabe 350

Ziehe die Wurzel aus folgenden Zahlen:

a) 32 041, 152 881, 207 936, 695 556, 956 484, 4 032 064, 7 529 536, 7 907 344!

b) 10 278 436, 36 216 324, 57 274 624, 65 448 100, 780 811 249, 150 229 108 836!

Wir ziehen die Wurzel aus Dezimalzahlen (die Rechnung geht auf)

$$\sqrt{41/47,36} = 64,4$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{547 : 120} \\ 480 \\ \underline{67} \\ 16 \\ \underline{5136 : 1280} \\ 5120 \\ \underline{16} \\ 16 \\ \underline{0} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 64,4 \cdot 64,4 \\ \underline{2576} \\ 3864 \\ \underline{4147,36} \end{array}$$

$$\sqrt{0,42/64/09} = 0,653$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{664 : 120} \\ 600 \\ \underline{64} \\ 25 \\ \underline{3909 : 1300} \\ 3900 \\ \underline{9} \\ 9 \\ \underline{0} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 0,653 \cdot 0,653 \\ \underline{1959} \\ 3265 \\ \underline{3918} \\ 0,426409 \end{array}$$

Dezimalzahlen teilen wir vom Komma aus nach rechts und links in zweistellige Gruppen ein und ziehen die Wurzel wie bei ganzen Zahlen.

Übungsaufgabe 351

Ziehe die Wurzel aus folgenden Zahlen:

a) 3 696,64	81,7216	457,96	76,5625	9 733,7956!
b) 0,205209	0,837225	0,015129		0,002079360!

Wir ziehen die Wurzel aus Dezimalzahlen (die Rechnung geht nicht auf)

$$\sqrt{12} =$$

$$\sqrt{12,00/00/00} = 3,464$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \underline{300 : 60} \\ 240 \\ \underline{60} \\ 16 \\ \underline{4400 : 680} \\ 4080 \\ \underline{320} \\ 36 \\ \underline{28400 : 6920} \\ 27680 \\ \underline{720} \\ 16 \\ \underline{704} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 3,464 \cdot 3,464 \\ \underline{13856} \\ 20784 \\ \underline{13856} \\ 10392 \\ \underline{11,999296} \\ + \quad 704 \\ \underline{12,000000} \end{array}$$

$$\sqrt{3,14} =$$

$$\sqrt{3,14/00/00/00} = 1,772$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{214 : 20} \\ 140 \\ \underline{74} \\ 49 \\ \underline{2500 : 340} \\ 2380 \\ \underline{120} \\ 49 \\ \underline{7100 : 3540} \\ 7080 \\ \underline{20} \\ 4 \\ \underline{16} \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 1,772 \cdot 1,772 \\ \underline{3544} \\ 12404 \\ \underline{12404} \\ 1772 \\ \underline{3,139984} \\ + \quad 16 \\ \underline{3,140000} \end{array}$$

Der Rechenvorgang ist der gleiche wie bei Aufgaben, die aufgehen. Bei der Probe addieren wir den Rest zum Produkt, so erhalten wir die Quadratzahl.

Übungsaufgabe 352

Ziehe die Wurzel aus folgenden Zahlen:

(rechne auf 3 und kürze auf 2 Stellen!)

a) 5	8	23	39	89	136	3 456	4 538	6 475!
b) 8,2536	726,18	0,0024		4,006				0,2080!

Wir ziehen die Wurzel aus gewöhnlichen Brüchen

$$2\frac{1}{2} = 2,5 \quad \sqrt{2,50/00/00} = 1,581$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 150 : 20 \\ 100 \\ \hline 50 \\ 25 \\ \hline 2500 : 300 \\ 2400 \\ \hline 100 \\ 64 \\ \hline 3600 : 3160 \\ 3160 \\ \hline 440 \\ 1 \\ \hline 439 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Probe:} \quad 1,581 \cdot 1,581 \\ \hline 1581 \\ 12648 \\ 7905 \\ \hline 1581 \\ 2,499561 \\ + \quad 439 \\ \hline \hline 2,500000 \end{array}$$

Wir verwandeln die gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche und ziehen dann die Quadratwurzel.

Übungsaufgabe 353

Ziehe die Wurzel aus folgenden Brüchen:

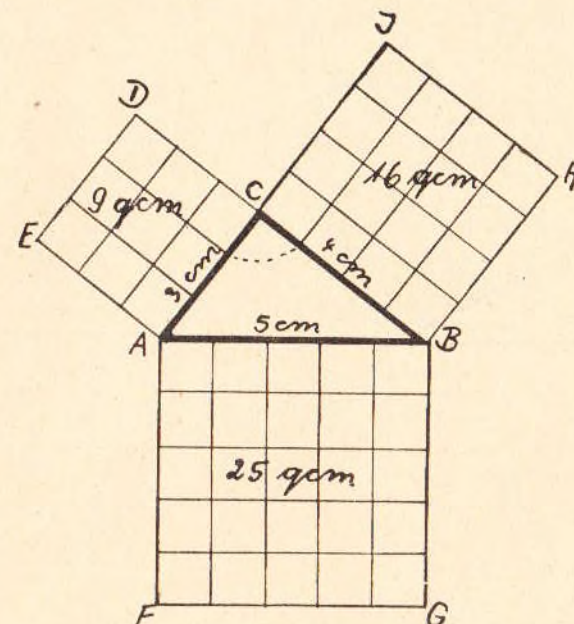
(rechne auf 3 und kürze auf 2 Stellen!)

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad 3\frac{1}{2} \quad 3\frac{3}{4} \quad 4\frac{2}{5} \quad 3\frac{1}{3} \quad 5\frac{5}{8} \quad 23\frac{3}{10}$$

Angewandte Aufgaben

354. Ein quadratförmiger Garten ist 841 m² groß. Berechne die Länge der Seite!
355. Eine quadratförmige Wiese, die 11,56 a groß ist, soll mit einem Zaun umgeben werden. Wieviel m Zaun müssen gesetzt werden?
356. Ein rechteckiger Garten von 36 m Länge und 20,25 m Breite wird gegen einen gleich großen quadratischen Garten ausgetauscht. Wie lang ist dessen Seite?
357. Der Umfang eines kreisförmigen Gartenbeetes beträgt 10,99 m. Wie lang ist die Seite eines inhaltsgleichen quadratischen Beetes?
358. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 113,04 cm². Wie groß ist der Radius? ($\pi = 3,14$)
359. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 616 cm². Wie groß ist der Durchmesser? ($\pi = 3\frac{1}{7}$)
360. Der Wasserspiegel eines runden Teiches beträgt 1 017,36 m². Wie groß ist der Umfang? ($\pi = 3,14$)

7. Der pythagoreische Lehrsatz



Merke:

Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die beiden den rechten Winkel einschließenden **Lotseiten** oder **Katheten** 3 cm und 4 cm lang. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende **Spannseite** oder **Hypotenuse** ist 5 cm lang.

Die über den drei Seiten errichteten Quadrate nennt man **Kathetenquadrate** und **Hypotenusenquadrat**.

Das kleine Kathetenquadrat ist 3 cm · 3 cm = 9 cm² groß.

Das große Kathetenquadrat ist 4 cm · 4 cm = 16 cm² groß.

Das Hypotenusenquadrat ist 5 cm · 5 cm = 25 cm² groß.

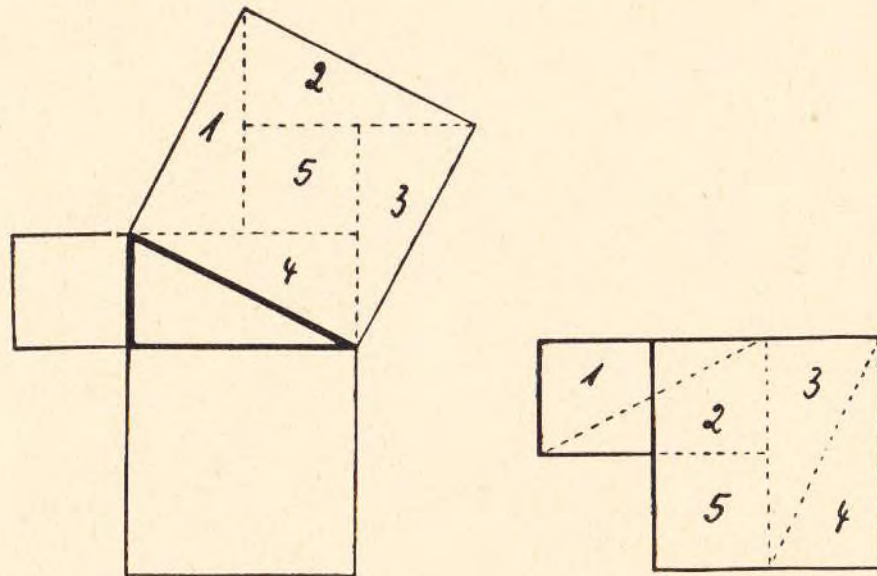
Die Summe der beiden Kathetenquadrate (9 cm² + 16 cm²) ist gleich dem Hypotenusenquadrat (25 cm²).

Dieser Lehrsatz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat

wird dem griechischen Philosophen **Pythagoras**, der um 500 v. Chr. lebte, zugeschrieben.

Zur Veranschaulichung:



Erklärung:

In der ersten Zeichnung haben wir über dem Dreieck ein großes Kathetenquadrat, ein kleines Kathetenquadrat und das Hypotenusenquadrat errichtet.

Das Hypotenusenquadrat zerlegen wir in 4 Dreiecke und 1 Quadrat.

In der zweiten Zeichnung haben wir das kleine Kathetenquadrat nach unten geklappt.

Wir legen die 5 Teile des Hypotenusenquadrates auf die beiden nebeneinandergelegten Kathetenquadrate: die Flächen decken sich.

Das Hypotenusenquadrat ist also gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Angewandte Aufgaben

361. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 35 cm und 12 cm. Berechne die Hypotenuse!
362. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Hypotenuse 17 cm und eine Kathete 8 cm. Berechne die andere Kathete!
363. Die Grundlinie eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist 8,4 cm, die Höhe 4,3 cm. Berechne die Länge der beiden Schenkel!
366. Die Seitenlänge eines Quadrates beträgt 8,2 cm. Berechne die Diagonale!
365. Ein Rechteck ist 10,6 cm lang und 8,4 cm breit. Berechne die Diagonale!

366. Der Umfang eines quadratischen Zimmers ist 36,40 m. Wie lang ist die Diagonale?
367. Die Diagonale eines quadratischen Posthofes ist 64 m lang. a) Wie lang ist eine Seite? b) Wie groß ist der Flächeninhalt?
368. Ein rechteckiger Garten ist 28 m lang. Der Inhalt beträgt 420 m². Wie lang ist die Diagonale?
369. Eine Leiter ist schräg an eine Wand gelehnt. Der Abstand vom Fußende der Leiter bis zur Wand beträgt 1,80 m, der Abstand von der Erde bis zur Leiter Spitze beträgt 7,20 m. Berechne die Länge der Leiter!
370. Die Vorderseite eines Dienstgebäudes hat eine Länge von 18,75 m; die Höhe bis zur Dachrinne beträgt 14,50 m. Die Giebelseite hat eine Länge von 12 m; die Höhe bis zum Dachfirst beträgt 17,70 m. Wieviel m² Flächeninhalt hat a) die Vorderseite, b) die Giebelseite, c) eine Dachfläche?

II. Körperberechnung

Von Flächen begrenzte Teile des Raumes nennt man **Körper**.

Die Körper haben drei Ausdehnungen: eine **Länge**, eine **Breite** und eine **Höhe**.

Es gibt folgende Arten der Körper:

Würfel, Prisma, Pyramide, Walze, Kegel und Kugel.

Die Körper werden von **Flächen** umgeben.

Man unterscheidet, **Grund-**, **Kopf-** und **Seitenflächen**.

Die Gesamtheit der Flächen eines Körpers nennt man **Oberfläche**.

Die Summe der Seitenflächen nennt man **Mantel**.

Flächen, die aneinanderstoßen, bilden eine **Kante**.

Punkte, in denen mehrere Kanten zusammenstoßen, nennt man **Ecken**.

Die Raumgröße der Körper nennt man **Inhalt** oder **Volumen**.

1. Der Würfel

Der einfachste Körper ist der **Würfel**, auch **Kubus** genannt.

Der Würfel hat **6 gleiche quadratische Flächen**, **8 Ecken** und **12 Kanten**.

Beim Würfel und bei allen übrigen Körpern berechnen wir:

- a) den **Mantel (M)**,
- b) die **Oberfläche (O)**,
- c) den **Inhalt** (Rauminhalt, Kubikinhalt), den wir mit **Volumen (V)** bezeichnen.

Das **Einheitsmaß** für die Berechnung des Volumens ist das **Kubikmeter**.

Ein **Kubikmeter** ($\text{cbm} = \text{m}^3$) ist ein Würfel mit 1 m Kantenlänge.

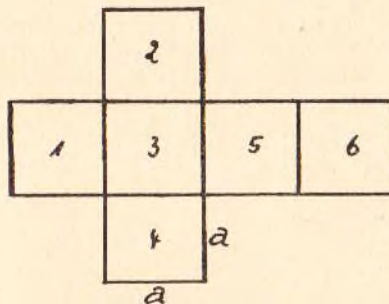
Ein **Kubikdezimeter** ($\text{cdm} = \text{dm}^3$) ist ein Würfel mit 1 dm Kantenlänge.

Ein **Kubikzentimeter** ($\text{ccm} = \text{cm}^3$) ist ein Würfel mit 1 cm Kantenlänge.

Ein **Kubikmillimeter** ($\text{cmm} = \text{mm}^3$) ist ein Würfel mit 1 mm Kantenlänge.

Wir bezeichnen die **Kantenlänge** mit a .

a) Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche



Mantel = Seitenfläche $\times 4$

$$M = 4 \cdot (a \cdot a) = 4a^2$$

$$O = 6 \cdot (a \cdot a) = 6a^2$$

Oberfläche = Grundfläche $\times 6$

Erklärung:

Da der **Mantel** des Würfels aus 4 gleich großen quadratischen Flächen besteht, berechnen wir eine **Seitenfläche** und **vervielfachen** das Ergebnis mit 4;

$$\text{Mantel} = \text{Seite} \cdot \text{Seite} \cdot 4$$

$$M = 4 \cdot (a \cdot a) = 4a^2$$

Da die **Oberfläche** des Würfels aus 6 gleich großen quadratischen Flächen besteht, berechnen wir die **Grundfläche** und **vervielfachen** das Ergebnis mit 6;

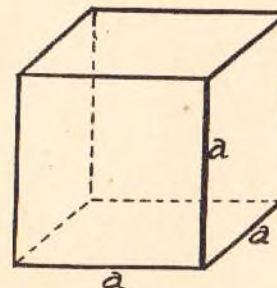
$$\text{Oberfläche} = \text{Seite} \cdot \text{Seite} \cdot 6$$

$$O = 6 \cdot (a \cdot a) = 6a^2$$

Angewandte Aufgaben

371. Die Kantenlänge eines Würfels ist 6,8 cm. Berechne a) den Mantel, b) die Oberfläche!
372. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 9 126 cm^2 . Wie lang ist die Kante?
373. Wieviel m^2 Weißblech benötigt man zu einem würfelförmigen Kasten (ohne Deckel) von 92 cm Kantenlänge?
374. Ein würfelförmiger Marmorblock von 85 cm Kantenlänge soll an 5 Seiten geschliffen und poliert werden. Wieviel ist dafür zu zahlen, wenn 1 m^2 17,50 DM kostet?
375. Ein würfelförmiger Kasten mit Deckel, Kantenlänge im Lichten 1,50 m, soll mit Blech ausgeschlagen werden. Wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn das m^2 mit 9,80 DM berechnet wird?

b) Die Berechnung des Rauminhalts



Volumen = Länge $\times$ Breite $\times$ Höhe

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$\text{oder } G \cdot h$$

G = Grundfläche

h = Höhe

Erklärung:

Die Kantenlänge eines Würfels beträgt 10 cm; dann berechnen wir die **Grundfläche** (G): $a \cdot a$ oder $10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$.

Auf die Grundfläche können wir 100 cm^2 setzen.

Die so entstandene Schicht ist 1 cm hoch.

Bei einer Höhe von 10 cm können wir 10 solcher Schichten aufeinandersetzen, also: $100 \text{ cm}^2 \cdot 10 = 1000 \text{ cm}^3$.

Wir berechnen also den **Rauminhalt** (das **Volumen**) des Würfels:

Kante $\cdot$ Kante $\cdot$ Kante

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

oder Grundfläche $\cdot$ Höhe

$$V = G \cdot h$$

Angewandte Aufgaben

376. Wie groß ist der Inhalt eines Würfels, dessen Kantenlänge 24 cm (12,5 cm; 0,09 cm) beträgt?
377. Berechne das Volumen eines Würfels von 2,45 m Kantenlänge!
378. Die Kante eines würfelförmigen Kastens ist 2,65 m lang. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?
379. Wieviel Würfel von 4 cm Kantenlänge lassen sich aus einem kubischen (würfelförmigen) Holzblock von 32 cm Kantenlänge schneiden?
380. Ein würfelförmiges Zimmer hat eine Seitenlänge von 4,35 m. Wieviel m^3 Luft enthält das Zimmer?
381. Zu beiden Seiten einer Straße sollen je 24 Bäume angepflanzt werden. Die würfelförmigen Pflanzlöcher sind 75 cm tief. Wieviel m^3 Erde müssen ausgehoben werden?
382. Die Oberfläche eines Würfels ist 4 374 cm^2 groß. Wie groß ist a) die Kantenlänge, b) der Rauminhalt?

c) Die Körpermaße

Unsere Körpermaße heißen:

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$1 m^3 =$	$1000 dm^3$	$= 1000000 cm^3$	$= 1000000000 mm^3$
	$1 dm^3 =$	$1000 cm^3$	$= 1000000 mm^3$
		$1 cm^3 =$	$1000 mm^3$

Die Verwandlungszahl der Körpermaße ist 1000,

d. h., ein Stellenwert ist immer das Tausendfache des nächstkleineren Stellenwertes.

d) Zusammenhang zwischen Körpermaßen, Hohlmaßen und Gewichten

Die Einheit der Körper- und Hohlmaße ist das Kubikmeter.

Wir schütten in einen würfelförmigen Blechkasten von 1 dm Kantenlänge Wasser und messen die Wassermenge; $1 dm^3$ faßt 1 l

Wir wiegen dieses 1 Wasser bei $+4^\circ$ Celsius;

1 l wiegt 1 kg

Unsere Körper-, Hohl- und Gewichtsmaße stehen also in einem engen Verhältnis:

$$1 dm^3 = 1 l = 1 kg$$

Körpermaße	Hohlmaße		Gewichtsmaße
$1 cm^3$		Wasser bei $+4^\circ$ Celsius	1 g
$1 dm^3$	1 l	Wasser bei $+4^\circ$ Celsius	1 kg
$1 m^3$	$1000 l = 10 hl$	Wasser bei $+4^\circ$ Celsius	$1 t = 1000 kg$
	1 hl	Wasser bei $+4^\circ$ Celsius	$1 dz = 100 kg$

Angewandte Aufgaben

383. Ein Wasserhahn tropft. In der Minute zählen wir 25 Tropfen. Wieviel Liter Wasser tropfen in 1 Monat (30 Tage) weg, wenn man auf $1 cm^3$ 20 Tropfen rechnet?
384. Ein würfelförmiges Gefäß mit einer inneren Kantenlänge von 45 cm wird mit Wasser gefüllt. Wieviel Liter faßt das Gefäß?
385. Ein würfelförmiges Gefäß mit einer inneren Kantenlänge von 72 cm wird mit Wasser gefüllt. Wieviel kg wiegt das Wasser?
386. Ein leeres Faß wiegt 8,250 kg, mit Wasser gefüllt wiegt es 63,500 kg. Wieviel Liter Wasser enthält das Faß?

e) Spezifische Gewichte

Jeder Körper hat ein seiner Art entsprechendes Gewicht.

Dieses arteilene Gewicht eines Körpers nennt man **Artgewicht**, neuerdings kurz **Wichte** genannt, oder **spezifisches Gewicht**.

Das **spezifische Gewicht** eines Körpers gibt an, wievielmal schwerer bzw. leichter ein Körper ist als die gleiche Menge Wasser.

Beispiel:

Das spezifische Gewicht von Sandstein ist 2,5;

denn $1 mm^3$ Sandstein wiegt 2,5 mg,

$1 cm^3$ Sandstein wiegt 2,5 g,

$1 dm^3$ Sandstein wiegt 2,5 kg,

$1 m^3$ Sandstein wiegt 2,5 t.

Man berechnet das **Gewicht eines Körpers**, indem man den **Rauminhalt** (das **Volumen**) mit dem **spezifischen Gewicht** multipliziert.

Beispiel:

$$32,5 cm^3 \text{ Sandstein (Volumen)} \cdot 2,5 \text{ (spez. Gewicht)} = 81,25 \text{ g (Körpergewicht)}$$

$$6,4 dm^3 \text{ Marmor (Volumen)} \cdot 2,7 \text{ (spez. Gewicht)} = 17,280 kg \text{ (Körpergewicht)}$$

$$\text{Volumen} \cdot \text{spezifisches Gewicht} = \text{Körpergewicht}$$

$$\frac{\text{Körpergewicht}}{\text{spez. Gewicht}} = \text{Volumen}$$

$$\frac{\text{Körpergewicht}}{\text{Volumen}} = \text{spez. Gewicht}$$

Tabelle wichtiger spezifischer Gewichte

Platin	21,4	Granit	2,8	Meerwasser	1,03
Gold	19,3	Marmor	2,7	Wasser	1,00
Quecksilber	13,5	Glas	2,6	Wein	0,99
Blei	11,3	Sandstein	2,5	Eis	0,92
Silber	10,5	Ziegelstein	1,5	Alkohol	0,80
Kupfer	8,9	Ebenholz	1,2	Petroleum	0,78
Nickel	8,9	Eichenholz	0,7	Benzin	0,71
Eisen	7,8	Buchenholz	0,7	Luft	0,00129
Zinn	7,3	Tannenholz	0,5	Leuchtgas	0,00082
Aluminium	2,7	Kork	0,2	Helium	0,00018

Angewandte Aufgaben

387. Wieviel wiegt 1 l Wasser, Quecksilber, Wein, Benzin?
388. Wieviel wiegt 1 hl Wein, Meerwasser, Petroleum, Alkohol?
389. Wieviel wiegt 1 m³ Eichen-, Buchen-, Tannenholz?
390. Wieviel wiegt ein 8 cm hoher Würfel aus Marmor (aus Eisen)?
391. Wieviel wiegt ein Bleiwürfel von 25 cm Seitenlänge?
392. Ein würfelförmiger Granitblock hat eine Kantenlänge von 48 cm. Wie schwer ist er?
393. Wie schwer ist die Luft in einem würfelförmigen Zimmer von 4,50 m Seitenlänge?
394. Wieviel Marmorwürfel von 50 cm Seitenlänge kann man auf einen Doppelwagen (20 t) laden?
395. Ein Stück Eisen wiegt 88,140 g. Wie groß ist der Rauminhalt?
396. Die Kantenlänge eines Bleiwürfels, der 19,5264 kg wiegt, beträgt 12 cm. Berechne das spezifische Gewicht von Blei!

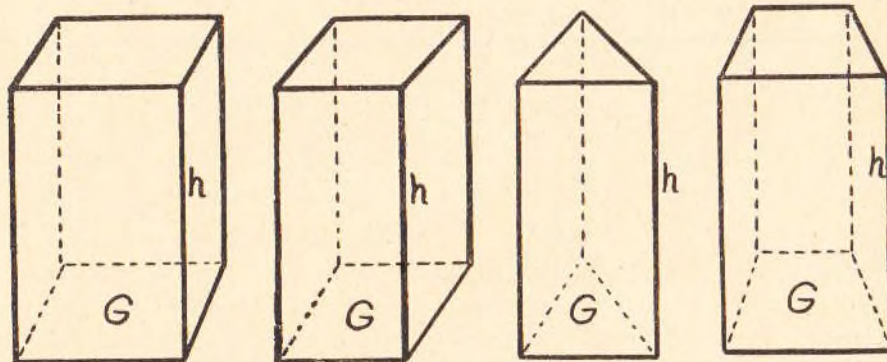
2. Das Prisma

Das **Prisma**, auch **Säule** oder **Quader** genannt, ist ein Körper mit **zwei deckungsgleichen (kongruenten) Grundflächen** und **rechteckigen Seitenflächen**.

Die **Grundfläche** kann ein **Drei-, Vier- oder Vieleck** sein.

Die **Anzahl der Seitenflächen** richtet sich nach der **Seitenzahl der Grundfläche**.

Arten der Prismen

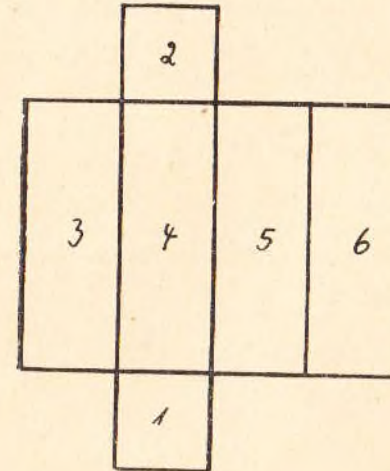


Die Gestalt eines Prismas wird durch die **Grundfläche (G)** bestimmt.

Die Grundfläche kann ein **Quadrat**, ein **Rechteck**, ein **Dreieck**, ein **Trapez** oder jedes **Vieleck** sein; infolgedessen unterscheidet man **drei-, vier- und vielseitige Prismen**.

Der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Kopffläche ist die **Höhe**.

a) Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche



M (Mantel)

= Summe aller Seitenflächen

$$M = U \cdot h$$

O (Oberfläche)

= Summe aller Flächen

$$O = M + 2G$$

$$O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

Erklärung:

Die Zeichnung stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) einer **quadratischen Säule** dar.

Die **Oberfläche** des Prismas besteht aus **2 Grundflächen** (Quadraten) und **4 Seitenflächen** (Rechtecken).

Die **4 Seitenflächen** allein bilden den **Mantel**.

Die Berechnung des Mantels

Die 4 Flächen des Mantels bilden insgesamt ein **Rechteck**.

Die **Grundseite des Rechtecks** ist gleich dem **Umfang der Grundfläche**, die **Höhe des Rechtecks** ist gleich der **Höhe des Prismas**.

Man berechnet also den **Mantel des Prismas**:

Umfang der Grundfläche · Höhe

$$M = U \cdot h$$

Die Berechnung der Oberfläche

Zum **Mantel** zählen wir die beiden **Grundflächen** (2 G), dann erhalten wir die **Oberfläche** des Prismas.

Man berechnet also die **Oberfläche des Prismas**:

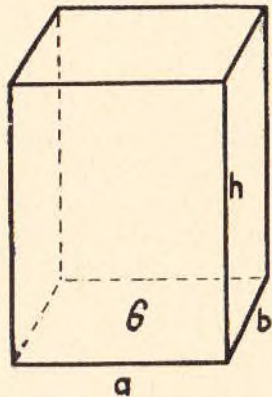
Mantel + Grundfläche · 2

$$O = M + 2G$$

Bei der Rechtecksäule sind die Grundflächen Rechtecke, bei der Dreiecksäule Dreiecke usw.

Die **Berechnung der Oberfläche** ist bei allen Prismen die gleiche: $O = M + 2 G$.

b) Die Berechnung des Rauminhalts



Volumen = Länge $\times$ Breite $\times$ Höhe

$$V = a \cdot b \cdot h$$

$$\text{oder } G \cdot h$$

Wir berechnen das **Volumen des Prismas** wie das Volumen des Würfels:

Grundfläche $\cdot$ Höhe
oder Länge $\cdot$ Breite $\cdot$ Höhe

$$V = G \cdot h$$

$$V = a \cdot b \cdot h$$

Umkehrungen:

Wenn $G \cdot h = V$ ist, dann ist $\frac{V}{h} = G$ und $\frac{V}{G} = h$

Angewandte Aufgaben

397. Normalgröße eines Ziegelsteines: Länge 25 cm, Breite 12 cm, Dicke $6\frac{1}{2}$ cm. Berechne a) die Oberfläche, b) den Inhalt, c) das Gewicht eines Steines! d) Wieviel Ziegelsteine gehen auf 1 m³?
398. Ein Dienstraum ist 28,60 m lang, 15,20 m breit und 7,50 m hoch. Berechne a) die Summe der 6 Innenflächen, b) den Rauminhalt des Saales!
399. Eine Baugrube von 15,75 m Länge und 10,50 m Breite soll 2,50 m tief ausgeschachtet werden. Wieviel m³ Erde sind wegzuschaffen?
400. Ein Haus ist 14,20 m lang und 9,60 m breit. Die Höhe bis zum Dach beträgt 12,80 m, bis zum First 15,30 m. Berechne den Rauminhalt des Hauses!
401. Eine 6,50 m breite Straße wird in 5 km Länge 12 cm hoch mit Kies bestreut. Wieviel Fuhren zu 4 m³ werden benötigt?

402. Eine Firma läßt einen Kabelgraben auswerfen, der 860 m lang und 75 cm tief ist, oben ist er 1,25 m und unten 0,65 m breit. Wieviel kostet das Auswerfen der Erde, wenn das m³ mit 2,90 DM berechnet wird?
403. Ein Grabstein aus Granit, der die Form eines rechteckigen Prismas hat, wiegt 614,250 kg. Die Länge der Grundfläche ist 0,65 m, die Breite 0,45 m. Berechne die Höhe des Grabsteins!

3. Die Walze

Die **Walze**, auch **Rundsäule** genannt, ist ein Körper mit zwei deckungsgleichen (kongruenten) Kreisflächen und einer gekrümmten Seitenfläche.

Die Gestalt der Walze wird durch die **Grundfläche (G)** bestimmt.

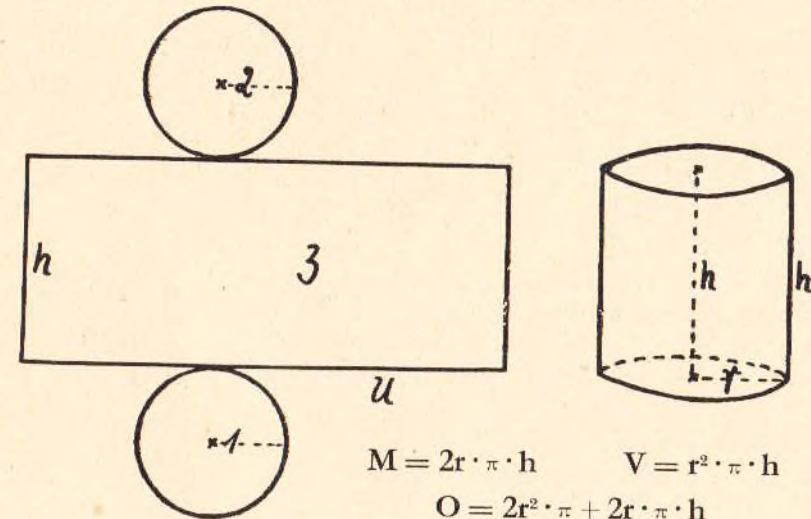
Die **Grundfläche** ist immer eine **Kreisfläche**.

Der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Kopffläche ist die **Höhe** oder **Achse**.

Eine Rundsäule, die innen hohl ist, nennt man **Hohlsäule** oder **Zylinder**.

Die **Grundfläche der Hohlsäule** ist ein **Kreisring**.

Berechnung von Mantel, Oberfläche und Inhalt



Erklärung:

Die Zeichnung links stellt die **Oberfläche** (das Netz) der Walze dar.

Die **Oberfläche** der Walze besteht aus 2 **Grundflächen** (Kreisflächen) und 1 **Seitenfläche** (Rechteck).

Die **Seitenfläche** allein bildet den **Mantel**.

a) Die Berechnung des Mantels

Der Mantel ist ein **Rechteck**.

Die **Grundseite des Rechtecks** ist gleich dem **Umfang der Grundfläche**, die **Höhe des Rechtecks** ist gleich der **Höhe der Walze**.

Man berechnet also den **Mantel der Walze**:

$$\text{Umfang der Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \quad M = 2r \cdot \pi \cdot h$$

b) Die Berechnung der Oberfläche

Zum **Mantel** zählen wir die beiden **Grundflächen** (2 G), dann erhalten wir die **Oberfläche** der Walze.

Man berechnet also die **Oberfläche der Walze**:

$$\text{Mantel} + \text{Grundfläche} \cdot 2 \quad O = 2r \cdot \pi \cdot h + 2r^2 \cdot \pi$$

c) Die Berechnung des Rauminhalts

Wir berechnen das **Volumen der Walze** wie das **Volumen des Prismas**:

$$\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = G \cdot h$$

Da die **Grundfläche** eine **Kreisfläche** ist, heißt die Formel:

$$\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \quad V = G \cdot h \text{ oder } r^2 \cdot \pi \cdot h$$

d) Die Berechnung der Hohl säule (Zylinder)

Die **Grundfläche** der Hohl säule ist ein **Kreisring**.

Das **Volumen der Hohl säule** wird berechnet:

$$\text{Vollzylinder} - \text{Hohlraum} = \text{Zylinderring} \\ R^2 \cdot \pi \cdot h - r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Angewandte Aufgaben

404. Eine Walze (Rundsäule) hat einen Durchmesser von 14 cm und eine Höhe von 42 cm. Berechne a) den Mantel, b) die Oberfläche, c) den Inhalt!
405. Die 8 runden Säulen einer Kirche sollen gestrichen werden. Die Säulen sind 4,35 m hoch und haben einen Durchmesser von 76 cm. 1 m² Ölanstrich kostet 3,60 DM. Wieviel kostet der Ölanstrich?
406. Wieviel kostet ein 4,80 m langer walzenförmiger Baumstamm mit einem Umfang von 1,32 m, wenn für 1 m² 310 DM gezahlt werden?
407. Ein Mühlstein (Sandstein) mit einem Durchmesser von 1,60 m und einer Dicke von 24 cm hat in der Mitte eine quadratische Öffnung von 18 cm Seitenlänge. Berechne das Gewicht des Mühlsteines!
408. Wie schwer ist eine Rundsäule aus Marmor, deren Umfang 3,8936 m und deren Höhe 12 m beträgt?

409. Ein rundes Feuerlöschbecken von 4 m Durchmesser und 1,50 m Tiefe soll durch eine Röhre gefüllt werden, die in der Minute 80 l Wasser liefert. In wieviel Stunden ist das Becken gefüllt?
410. Ein Brunnenschacht von 1,40 m Durchmesser und 6,75 m Tiefe soll ausgehoben werden. a) Was kostet das Ausschachten, wenn 1 m³ mit 8,20 DM berechnet wird? b) Wieviel m³ Mauerwerk hat der Brunnen, wenn die Mauer 25 cm dick ist? c) Wieviel kostet die Mauer, wenn 1 m³ mit 92 DM berechnet wird?
411. Wie schwer ist ein 12 m langes Bleirohr, wenn der innere Durchmesser 6 cm und die Wandstärke 1 cm beträgt?
412. Ein zylinderförmiger Benzintank hat einen Umfang von 3,768 m und faßt 20,3472 hl Benzin. Wie lang ist der Tank?
413. In einem Brunnen, in dem das Wasser 1,75 m hoch steht, befinden sich 3 090,9375 l Wasser. Berechne den Durchmesser des Brunnens!

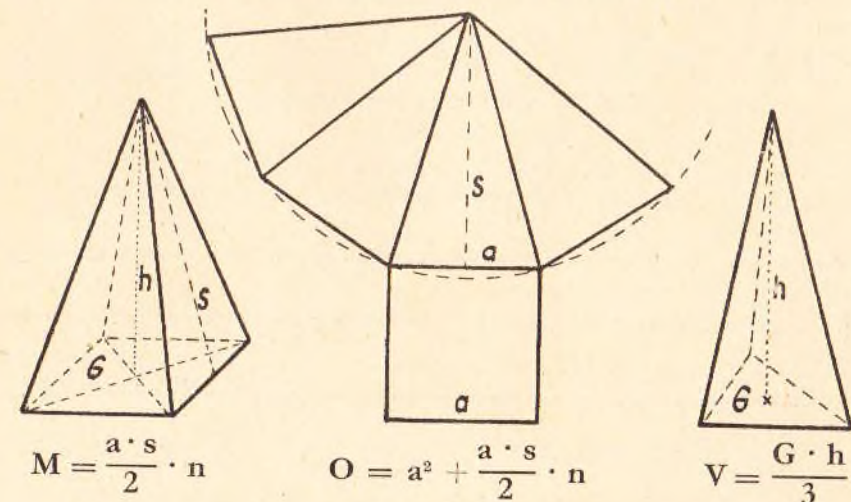
4. Die Pyramide

Die **Pyramide** ist ein Körper mit einer **geradlinigen Grundfläche** und **dreieckigen Seitenflächen**, die in einer **Spitze** zusammenstoßen.

Die **Grundfläche** der Pyramide kann ein gleichseitiges **Dreieck**, ein **Quadrat** oder ein regelmäßiges **Vieleck** sein; infolgedessen gibt es **drei-, vier- und vielseitige Pyramiden**. Die **Seitenflächen** der Pyramide sind **deckungsgleiche (kongruente) gleichschenkelige Dreiecke**. Die **Anzahl der Seitenflächen**, die man mit **n** bezeichnet, hängt von der **Seitenzahl der Grundfläche** ab.

Den senkrechten Abstand von der Mitte der **Grundfläche** zur **Spitze** nennt man **Höhe (h)**, den senkrechten Abstand von der Mitte der **Grundkante** zur **Spitze** nennt man **Seitenhöhe (s)**.

Berechnung von Mantel, Oberfläche und Inhalt



Erklärung:

Die Zeichnung in der Mitte stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) einer **Pyramide** mit **quadratischer Grundfläche** dar.

Die **Oberfläche** dieser Pyramide besteht aus einer **quadratischen Grundfläche** und **vier inhaltsgleichen dreieckigen Seitenflächen**.

Die **Seitenflächen** allein bilden den **Mantel**.

a) Die Berechnung des Mantels

Eine **Seitenfläche** der Pyramide (ein Dreieck) wird berechnet:

Grundkante (a) mal Seitenhöhe (s) geteilt durch 2.

Da die 4 Seitenflächen inhaltsgleich sind, wird mit 4 malgenommen.

Man berechnet also den **Mantel der Pyramide**:

$$\frac{\text{Grundkante} \cdot \text{Seitenhöhe}}{2} \cdot 4 \quad M = \frac{a \cdot s}{2} \cdot 4$$

b) Die Berechnung der Oberfläche

Zum Mantel zählen wir die Grundfläche (a^2), dann erhalten wir die Oberfläche der Pyramide.

Man berechnet also die **Oberfläche der quadratischen Pyramide**:

$$\text{Grundfläche} + \text{Mantel} \quad O = a^2 + \frac{a \cdot s}{2} \cdot 4$$

Die **Oberfläche** der **drei- und vielseitigen Pyramiden** wird berechnet:

Grundfläche + **Seitenfläche** · **Flächenanzahl (n)**, also: $a^2 + \frac{a \cdot s}{2} \cdot n$

c) Die Berechnung des Rauminhalts

Fülle ein **Prisma** mit feinem Sand!

Schütte den Sand in eine **dazugehörige Pyramide**,

d. h., in eine Pyramide, die die **gleiche Grundlinie** und die **gleiche Höhe** hat!

Wir stellen fest:

Die **Pyramide** läßt sich mit dem Sand des zugehörigen Prismas **3 mal** füllen.

Merke:

Das **Volumen der Pyramide** ist $\frac{1}{3}$ vom **Volumen des dazugehörigen Prismas**.

Man berechnet also das **Volumen der Pyramide**:

$$\frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3} \quad V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Angewandte Aufgaben

414. Berechne den Mantel einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundkante 16 cm und deren Seitenhöhe 24 cm beträgt!
415. Berechne die Oberfläche einer quadratischen Pyramide, deren Grundkante 24 cm und deren Seitenhöhe 36 cm mißt!
416. Berechne den Rauminhalt einer quadratischen Pyramide, deren Grundkante 42 cm und deren Höhe 1,40 m lang ist!
417. Berechne das Volumen einer 36 cm hohen Pyramide mit trapezförmiger Grundfläche, deren große Grundlinie 24 cm, deren kleine Grundlinie 18 cm und deren Höhe 12 cm beträgt!
418. Ein sechseckiges Kirchturmdach, das die Form einer Pyramide hat, wird mit Schiefer gedeckt. Die Grundkante ist 1,60 m, die Seitenhöhe 8,50 m. Der Schieferbelag kostet je m^2 15,80 DM. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?
419. Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat eine Höhe von 137 m; die quadratische Grundfläche hat eine Seitenlänge von 222 m. Berechne den Rauminhalt!
420. Eine Pyramide aus Sandstein (spez. Gewicht 2,5) hat als Grundfläche ein Rechteck von 1,20 m Länge und 0,85 m Breite. Die Höhe mißt 2,30 m. Wie schwer ist die Pyramide?
421. Eine quadratische Pyramide mit einer Grundkante von 25 cm hat einen Rauminhalt von 7500 cm^3 . Berechne die Höhe!
422. Die Höhe einer Pyramide beträgt 45 cm, das Volumen 8640 cm^3 . Berechne die Grundfläche!
423. Eine 2,40 m hohe Pyramide aus Granit (spez. Gewicht 2,8), deren Grundfläche quadratisch ist, hat ein Gewicht von 1,6184 t. Wie lang ist die Grundkante?

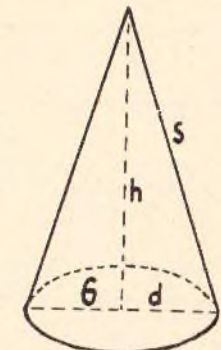
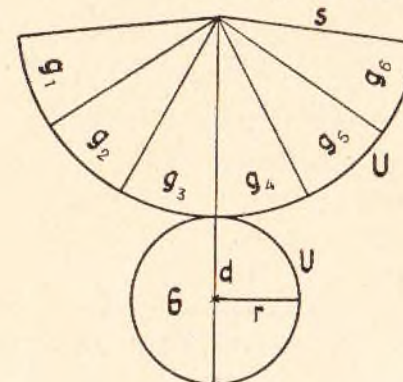
5. Der Kegel

Der **Kegel** ist ein spitz zulaufender Körper mit einer **kreisförmigen Grundfläche (G)** und einer **gekrümmten Mantelfläche (M)**.

Der senkrechte Abstand von der Grundfläche zur Spitze heißt **Höhe (h)**.

Der Abstand vom Umfang der Grundfläche zur Spitze heißt **Seitenhöhe (s)**.

Berechnung von Mantel, Oberfläche und Inhalt



Erklärung:

Die Zeichnung links stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) eines **Kegels** dar.

Die **Oberfläche** des Kegels besteht aus einer **kreisförmigen Grundfläche** und aus einem **Kreisausschnitt**, der den **Mantel** bildet.

a) Die Berechnung des Mantels

Der **Mantel** des **Kegels** besteht aus einer **Summe von Dreiecken**:

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + \dots + g_n$$

(Wir denken uns den Kreisausschnitt in so viele winzige Dreiecke zerlegt, daß die Grundseiten der einzelnen Dreiecke gerade Linien bilden.)

Der **Kreisausschnitt** bildet nun als Summe der vielen Dreiecke ein **großes Dreieck**, dessen **Grundlinie** gleich dem **Umfang (U)** der Grundfläche und dessen **Höhe** gleich der **Seitenhöhe (s)** des Kegels ist.

Wir berechnen nun den **Mantel** als Dreieck:

$$M = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{U \cdot s}{2} = \frac{2r \cdot \pi \cdot s}{2} = r \cdot \pi \cdot s$$

Das Dreieck wird berechnet:

$$\frac{g \cdot h}{2}$$

Für die **Grundlinie (g)** setzen wir den **Umfang (U)**, und für die **Höhe (h)** setzen wir die **Seitenhöhe (s)** ein:

$$\frac{U \cdot s}{2}$$

Für U setzen wir dann $2r \cdot \pi$ ein, also:

$$\frac{2r \cdot \pi \cdot s}{2}$$

Die gekürzte Formel heißt nun:

$$r \cdot \pi \cdot s$$

Man berechnet also den **Mantel des Kegels**:

$$\text{Radius} \cdot 3,14 \cdot \text{Seitenhöhe}$$

$$M = r \cdot \pi \cdot s$$

b) Die Berechnung der Oberfläche

Zum **Mantel** zählen wir die **Grundfläche** ($r^2 \cdot \pi$), dann erhalten wir die **Oberfläche** des Kegels:

Man berechnet also die **Oberfläche des Kegels**:

$$\text{Grundfläche} + \text{Mantel}$$

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot s \cdot \pi$$

c) Die Berechnung des Rauminhalts

Fülle einen **Kegel** mit feinem Sand!

Schütte den Sand in eine **dazugehörige Walze**,

d. i. eine Walze, die die **gleiche Grundlinie** und die **gleiche Höhe** hat!

Wir stellen fest:

Der **Kegel** läßt sich mit dem Sand der dazugehörigen Walze $3 \times$ füllen.

Merke:

Das Volumen des **Kegels** ist $\frac{1}{3}$ vom Volumen der dazugehörigen Walze

Man berechnet das **Volumen der Walze**:

$$\frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3}$$

$$V =$$

$$\frac{G \cdot h}{3}$$

oder

$$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Angewandte Aufgaben

424. Berechne den Mantel und die Oberfläche eines Kegels:

a) Radius 8 cm, Seitenhöhe 24 cm;

b) Umfang 37,68 cm, Seitenhöhe 25 cm!

425. Berechne den Rauminhalt eines Kegels, dessen Radius 12 cm und dessen Höhe 48 cm beträgt!

426. Der Durchmesser der Grundfläche eines kegelförmigen Zeltes beträgt 26,40 m, die Höhe 12,60 m, die Seitenhöhe 18,40 m. a) Berechne den Luftraum des Zeltes! b) Wieviel m^3 Zelttuch werden benötigt, wenn für Verschnitt und Nähte 12% gerechnet werden?

427. Das kegelförmige Dach eines Turmes soll mit Zinkblech belegt werden. Der Umfang der Grundfläche mißt 15,072 m, die Seitenhöhe 8,50 m. Was kostet das Belegen mit Zinkblech, wenn für Verschnitt 10% und für 1 m^2 33,50 DM gerechnet werden?

428. Ein kegelförmiger Fichtenstamm von 12,60 m Länge hat an der Erde einen Umfang von 81,64 cm. Der Preis für 1 m^3 Fichtenholz beträgt 154 DM; das spez. Gewicht ist 0,45. Berechne a) den Rauminhalt, b) den Preis, c) das Gewicht des Stammes!

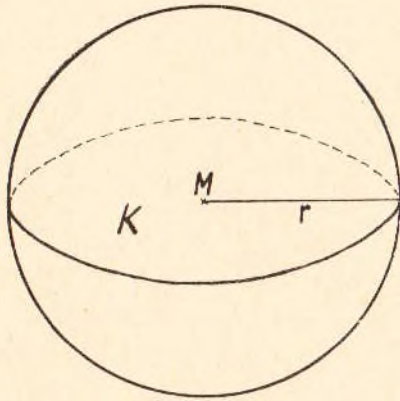
429. Ein 7,50 m hoher Kegel hat einen Rauminhalt von 15,386 m^3 . Berechne den Radius des Kegels!

430. Ein kegelförmiger Sandhaufen von 53,851 m^3 Rauminhalt hat an der Grundfläche einen Umfang von 21,98 m. Berechne die Höhe des Sandhaufens!

431. Welches Volumen hat ein Kegel, dessen Höhe 20 cm und dessen Seitenhöhe 29 cm beträgt?

6. Die Kugel

Eine **Kugel** ist ein **runder Körper** mit einer **gleichmäßig gekrümmten Oberfläche**.



- M = Kugelmittelpunkt
- r = Kugelhalbmesser
- K = größte Kugelkreisfläche
- O = Kugeloberfläche
- V = Kugelinhalt

Der Punkt im Innern der Kugel, der von allen Punkten der **Kugeloberfläche (O)** gleich weit entfernt ist, heißt **Kugelmittelpunkt (M)**.

Die Entfernung von der Kugeloberfläche zum Kugelmittelpunkt ist der **Kugelhalbmesser (r)**.

Jeder Schnitt durch eine Kugel ergibt eine Kreisfläche; je weiter der Schnitt vom Kugelmittelpunkt entfernt ist, desto kleiner ist die Kreisfläche. Der Schnitt durch den Kugelmittelpunkt bildet die **größte Kugelkreisfläche (K)**.

Den Rauminhalt einer Kugel nennen wir **Kugelinhalt (V)**.

a) Die Berechnung der Oberfläche

Wir teilen eine **Kugel** in zwei **Halbkugeln**.

Im Mittelpunkt der größten **Kugelkreisfläche** befestigen wir das Ende einer Schnur und bedecken mit dieser in spiralförmigen Windungen die ganze Kreisfläche.

Wir stellen fest:

Um die **Oberfläche der Halbkugel** zu bedecken, benötigen wir die **doppelte Länge** der Schnur,

um die ganze **Kugeloberfläche** zu bedecken **das Vierfache**.

Merke:

Die **Kugeloberfläche** ist **4 ×** so groß wie die **größte Kugelkreisfläche**.
Wir berechnen also die **Oberfläche der Kugel**:

$$\text{Größte Kugelkreisfläche} \cdot 4 \quad O = K \cdot 4 \text{ oder } 4r^2 \cdot \pi$$

b) Die Berechnung des Rauminhalts

Eine **Kugel** besteht aus vielen gleich großen **Pyramiden**, deren **Spitzen** im **Kugelmittelpunkt** liegen.

Die **Summe** der winzig klein gedachten **Grundflächen** der **Pyramiden** ist **gleich** der **Kugeloberfläche**, der **Kugelradius** ist **gleich** der **Pyramidenhöhe**.

Demnach berechnet man den **Inhalt der Kugel** als **Pyramide**:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4r^2 \cdot \pi \cdot r}{3} = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

Erklärung:

Die **Pyramide** wird berechnet:

$$\frac{G \cdot h}{3}$$

Die **Grundfläche** der **Pyramide (G)** ist **gleich** der **Kugeloberfläche (O)**, die **Höhe** der **Pyramide (h)** ist **gleich** dem **Kugelradius (r)**.

Für die **Grundfläche (G)** setzen wir die **Kugeloberfläche (O)** und für die **Höhe (h)** den **Kugelradius (r)** ein:

$$\frac{O \cdot r}{3}$$

Für die **Kugeloberfläche (O)** setzen wir nun **4 r² · π** ein:

$$\frac{4r^2 \cdot \pi \cdot r}{3}$$

Sodann stellen wir die Faktoren der Formel um:

$\frac{4 r^2 \cdot r \cdot \pi}{3}$ und setzen **r³** für **r² · r**, also:

$$\frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

Wir berechnen also das **Volumen der Kugel**:

$$\text{Kugeloberfläche} \cdot \text{Radius} : 3 \quad V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

Angewandte Aufgaben

432. Berechne a) die Oberfläche, b) den Inhalt folgender Kugeln:

1. Radius 14 cm, 2. Durchmesser 36 cm, 3. Umfang 50,24 cm!

433. Wieviel g wiegen diese 3 Kugeln, wenn die erste aus Ebenholz, die zweite aus Glas und die dritte aus Blei ist?

434. Der Umfang einer Halbkugel ist 113,04 cm. Wie groß ist die Oberfläche?

435. Eine hohle Halbkugel hat einen Umfang von 288,88 cm. Wieviel Liter faßt die Halbkugel?
436. Der Durchmesser einer Billardkugel ist 6 cm. Wie schwer sind 3 Billardkugeln, wenn das spezifische Gewicht des Elfenbeins 1,9 beträgt?
437. Eine halbkugelförmige Kuppel mit einem Durchmesser von 6,40 m soll mit Zinkblech belegt werden. Für Verschnitt werden 10% gerechnet. Wieviel kostet das Belegen der Kuppel, wenn 1 m² mit 32,50 DM berechnet wird?
438. Eine Kugel aus Eichenholz, die einen Durchmesser von 22 cm hat, wird 2 cm abgeschliffen. Wieviel verliert die Kugel an Gewicht?

C. DIE SORTENVERWANDLUNG

I. Maße, Gewichte und Münzen

Maße und Gewichte, die auf dem **Meter** als **Einheit** beruhen, bilden das **metrische Maß- und Gewichtssystem**.

Zum **metrischen Maß- und Gewichtssystem** gehören:

Längenmaße, Flächenmaße, Körpermaße, Hohlmaße und Gewichte.

Maße, die nicht auf dem **Meter** als **Einheit** beruhen, sind:

Zählmaße, Papiermaße, Zeitmaße und Technische Maße.

1. Längenmaße

Die **Einheit der Längenmaße** ist das **Meter**.

1 **Meter** (1 m) = $\frac{1}{40\,000\,000}$ des Erdumfangs (40 000 km);
es hat nur **eine Ausdehnung**: die **Länge**.

Unsere **Längenmaße** heißen:

Kilometer km	Meter m	Dezimeter dm	Zentimeter cm	Millimeter mm
1 km	= 1000 m	= 10 000 dm	= 100 000 cm	= 1 000 000 mm
	1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1 000 mm
		1 dm	= 10 cm	= 100 mm
			1 cm	= 10 mm

Die **Verwandlungszahl** bei Längenmaßen ist **10**;

d. h., ein Stellenwert ist immer **das Zehnfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

Außer den vorstehend genannten Längenmaßen ist noch die **Meile** gebräuchlich.

1 **Landmeile** (deutsche Meile) = 7500 m

1 **Seemeile** (international gebräuchlich) = 1 852 m = 1 **Knoten**

Alte Längenmaße: Zoll, Spanne, Elle, Fuß, Schritt, Faden (Klafter).

2. Flächenmaße

Die **Einheit der Flächenmaße** ist das **Quadratmeter**.

1 **Quadratmeter** (1 qm = m²) = ein rechtwinkliges Viereck mit 1 m Seitenlänge;
es hat **zwei Ausdehnungen**: **Länge** und **Breite**.

Unsere **Flächenmaße** heißen:

Quadratkilometer km ²	Hektar ha	Ar a	Quadratmeter m ²
Quadratdezimeter dm ²	Quadratzentimeter cm ²	Quadratmillimeter mm ²	
1 km ²	= 100 ha	= 10 000 a	= 1 000 000 m ²
	1 ha	= 100 a	= 10 000 m ²
		1 a	= 100 m ²
1 m ²	= 100 dm ²	= 10 000 cm ²	= 1 000 000 mm ²
	1 dm ²	= 100 cm ²	= 10 000 mm ²
		1 cm ²	= 100 mm ²

Die **Verwandlungszahl** bei Flächenmaßen ist **100**;

d. h., ein Stellenwert ist immer **das Hundertfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

In der Landwirtschaft ist noch ein altes Flächenmaß gebräuchlich: der **Morgen**.

1 **Morgen** = ca. 25 a, also 1 ha = 4 **Morgen**.

3. Körpermaße

Die **Einheit der Körpermaße** ist das **Kubikmeter**.

1 **Kubikmeter** (1 cbm = m³) = ein Würfel (Kubus) mit 1 m Kantenlänge;
es hat **drei Ausdehnungen**: **Länge**, **Breite** und **Höhe**.

Unsere **Körpermaße** heißen:

Kubikmeter m ³	Kubikdezimeter dm ³	Kubikzentimeter cm ³	Kubikmillimeter mm ³
1 m ³	= 1 000 dm ³	= 1 000 000 cm ³	= 1 000 000 000 mm ³
	1 dm ³	= 1 000 cm ³	= 1 000 000 mm ³
		1 cm ³	= 1 000 mm ³

Die **Verwandlungszahl** bei Körpermaßen ist **1000**;

d. h., ein Stellenwert ist immer **das Tausendfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

In der Forstwirtschaft sind folgende **Raummaße** gebräuchlich:

1 **Festmeter** (fm), = Raummaß für **Langholz**

1 fm = 1 m³ feste, lückenlose Holzmasse

1 **Raummeter** (rm), = Raummaß für **Stapelholz**

1 rm = 1 m³ geschichtetes Holz mit Zwischenräumen

4. Hohlmaße

Die Einheit der Hohlmaße ist das Liter.

Hektoliter	Liter	
hl	l	1 hl = 100 l

Die Verwandlungszahl bei Hohlmaßen ist 100.

Das Raummaß für Schiffe heißt Registertonne.

1 Registertonne (1 RT) = 2,832 m³.

Brutto-Registertonne (BRT) = gesamter Vermessungsraum des Schiffes

Netto-Registertonne (NRT) = Nutzraum für die Ladung

5. Gewichte

Die Einheit der Gewichte ist das Kilogramm.

1 Kilogramm (1 kg) = Gewicht von 1 l destilliertem Wasser bei + 4° Celsius.

Tonne	Kilogramm	Gramm	Milligramm
t	kg	g	mg
1 t	= 1000 kg	= 1 000 000 g	= 1 000 000 000 mg
	1 kg	= 1000 g	= 1 000 000 mg
		1 g	= 1000 mg

Die Verwandlungszahl bei Gewichten ist 1000;

d. h., ein Stellenwert ist immer das Tausendfache des nächstkleineren Stellenwertes.

1 t	=	10 dz	=	20 Ztr.
1 dz	=	100 kg	=	200 Pfd.
1 Ztr.	=	50 kg	=	100 Pfd.
1 Pfd	=	$\frac{1}{2}$ kg	=	500 g

Merke:

■ Zentner und Pfund sind amtlich nicht mehr gebräuchlich.

Zusammenhang zwischen Körpermaßen, Hohlmaßen und Gewichten

1 dm³ faßt 1 l Wasser, und dieses wiegt (bei + 4° Celsius) 1 kg.

Merke:

■ 1 dm³ = 1 l = 1 kg.

6. Zählmaße

Die im Handel gebräuchlichen Zählmaße sind:

Gros, Dutzend, Stück, Schock und Mandel.

Schreibfedern z. B. werden im Gros und Dutzend verkauft, Eier werden mit Schock und Mandel gehandelt.

1 Dutzend (Dtzd.)	=	12 Stück (St.),
1 Gros	= 12 Dutzend	= 144 Stück,
1 Schock	= 4 Mandel	= 60 Stück,
1 Mandel		= 15 Stück.

7. Papiermaße

Die in der Papierindustrie gebräuchlichen Papiermaße sind:

Buch, Heft und Bogen.

1 Buch	=	10 Hefte	=	100 Bogen,
		1 Heft	=	10 Bogen.

Die deutsche Papierindustrie stellt Briefbogen von einheitlicher (genormter) Größe her, die das Kennzeichen DIN tragen.

DIN hieß ursprünglich: Deutsche Industrie Norm; heute gedeutet als: Das ist Norm.

Die gebräuchlichsten Papiergrößen im DIN-Format sind:

DIN A 4 = 210 × 297 mm = Briefblatt (Aktenbogen),

DIN A 5 = 148 × 210 mm = Halbbriefblatt (für kurze Mitteilungen),

DIN A 6 = 105 × 148 mm = Kleinbriefblatt (Postkarte).

8. Zeitmaße

1 Sonnenjahr = $365\frac{1}{4}$ Tage (genau: 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 48 Sekunden), d. i. der Zeitabschnitt, in dem die Erde einmal die Sonne umkreist.

1 Schaltjahr = 366 Tage; der überschießende Vierteltag wird in jedem 4. Jahr am 29. Februar als Schalttag angefügt. Schaltjahre sind die Jahre, deren Jahreszahl durch 4 teilbar ist.

1 Kalenderjahr = 365 Tage = 12 Monate = 52 Wochen

1 Vierteljahr = 3 Monate = 13 Wochen

1 Monat = 30, 31 oder 28 Tage

1 Woche = 7 Tage

1 Tag	= 24 Stunden
1 Stunde (Std.)	= (Std. auch h = hora = Stunde) 60 Minuten
1 Minute (Min.)	= (Min. auch min) 60 Sekunden
1 Sekunde (Sek.)	= (Sek. auch sec, sek) kleinste Zeiteinheit

9. Technische Maße

1 Meter in der Sekunde	= 1 m/s
1 Kilometer in der Stunde	= 1 km/h (von hora = Stunde)
1 Watt	= 1 W = Einheit der elektrischen Leistung
1 Volt	= 1 V = Einheit der elektrischen Spannung
1 Ampere	= 1 A = Einheit der elektrischen Stromstärke
1 Ohm	= 1 Ω = Einheit des elektrischen Widerstandes
1 Kilowatt	= 1 kW = 1 000 Watt
1 Kilowattstunde	= 1 kWh = Einheit für elektrische Arbeit
1 Kilokalorie	= 1 kcal = 1 Wärmeeinheit
1 Wärmeeinheit	= 1 WE = eine Wärmemenge, die 1 kg Wasser um 1° Celsius (1° C) erwärmt
1 Atmosphäre	= 1 at = der Druck, den 1 kg auf 1 cm ² ausübt atü = Atmosphärenüberdruck
1 Pferdestärke	= 1 PS = 736 Watt bzw. die Kraft, die 75 kg in der Sekunde 1 m hoch hebt

10. Münzen (Währungen)

Deutschland	1 DM	= 100 Pfennige
Belgien	1 belg. Franc	= 100 Centimes
Dänemark	1 dän. Krone	= 100 Öre
Frankreich	1 Franc	= 100 Centimes
Griechenland	1 Drachme	= 100 Lepta
Großbritannien	1 Pfund Sterling	= 20 Schilling = 240 Pence
Italien	1 Lira	= 100 Centesimi
Jugoslawien	1 Dinar	= 100 Para
Luxemburg	1 lux. Franc	= 100 Centimes
Niederlande	1 holl. Gulden	= 100 Cents
Norwegen	1 norw. Krone	= 100 Öre

Polen	1 Zloty	= 100 Groczy (Groschen)
Portugal	1 Escudo	= 100 Centavos
Rumänien	1 Lei	= 100 Bani
Schweden	1 schwed. Krone	= 100 Öre
Schweiz	1 schw. Franken	= 100 Rappen
Sowjetunion	1 Rubel	= 100 Kopeken
Spanien	1 Peseta	= 100 Centimos
Tschechoslowakei	1 tschech. Krone	= 100 Heller
Türkei	1 türk. Pfund	= 100 Piaster
Ungarn	1 Pengö	= 100 Filler
USA	1 Dollar	= 100 Cents

II. Das Verwandeln der Maße und Gewichte

Bei **Längen-, Flächen-, Hohl- und Körpermaßen** sowie bei **Gewichten** kann man **größere Einheiten in kleinere** und umgekehrt **kleinere in größere** verwandeln, z. B.

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1000 \text{ kg} = 1 \text{ t.}$$

Man verwandelt eine **größere Einheit** in eine **kleinere Einheit** (z. B. m in dm.) indem man bei ganzen Zahlen **Nullen anhängt** oder bei Dezimalzahlen das **Komma nach rechts** setzt, und zwar

bei **Längenmaßen**

1, 2 oder 3 Stellen,

$$\begin{aligned} \text{(z. B. } 1 \text{ m} &= 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} \\ 1,234 \text{ m} &= 12,34 \text{ dm} = 123,4 \text{ cm} = 1234 \text{ mm}) \end{aligned}$$

bei **Flächen- und Hohlmaßen**

2, 4 oder 6 Stellen,

bei **Körpermaßen und Gewichten**

3, 6 oder 9 Stellen

Man verwandelt eine **kleinere Einheit** in eine **größere Einheit** (z. B. dm in m), indem man bei ganzen Zahlen **Nullen abstreicht**

oder bei Dezimalzahlen das **Komma nach links** setzt, und zwar

bei **Längenmaßen**

1, 2 oder 3 Stellen,

$$\begin{aligned} \text{(z. B. } 1000 \text{ mm} &= 100 \text{ cm} = 10 \text{ dm} = 1 \text{ m} \\ 1234 \text{ mm} &= 123,4 \text{ cm} = 12,34 \text{ dm} = 1,234 \text{ m}) \end{aligned}$$

bei **Flächen- und Hohlmaßen**

2, 4 oder 6 Stellen,

bei **Körpermaßen und Gewichten**

3, 6 oder 9 Stellen,

III. Übersicht über das metrische Maß- und Gewichtssystem

Die folgenden Tabellen geben eine Übersicht über die gebräuchlichen **Längenmaße, Flächenmaße, Raum- und Hohlmaße** und **Gewichte** und ihre **Verwandlung**

Längenmaße (Verwandlungszahl 10)

Kilometer km	Hektometer hm	Dekameter dm	Meter m	Dezimeter dm	Zentimeter cm	Millimeter mm
1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000
100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
0,1	1	10	100	1 000	10 000	100 000
0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100
0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10
0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1

Flächenmaße (Verwandlungszahl 100)

Quadrat- kilometer km ²	Hektar ha	Ar a	Quadratmeter m ²	Quadrat- dezimeter dm ²	Quadrat- zentimeter cm ²	Quadrat- millimeter mm ²
1	100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000	1 000 000 000 000
0,1	10	1 000	100 000	10 000 000	1 000 000 000	100 000 000 000
0,01	1	100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000
0,001	0,1	10	1 000	100 000	10 000 000	1 000 000 000
0,0001	0,01	1	100	10 000	1 000 000	100 000 000
0,00001	0,001	0,1	10	1 000	100 000	10 000 000
0,000001	0,0001	0,01	1	100	10 000	1 000 000
0,0000001	0,00001	0,001	0,1	10	1 000	100 000
0,00000001	0,000001	0,0001	0,01	1	100	10 000
0,000000001	0,0000001	0,00001	0,001	0,1	10	1 000
0,0000000001	0,00000001	0,000001	0,0001	0,01	1	100

Raum- und Hohlmaße

(Verwandlungszahl 1 000)

unter Angabe des Gewichts für Wasser bei + 4° Celsius

Kubikmeter m ³ (t)	Hektoliter hl (dz)	Liter / Kubikdezimeter l / dm ³ (kg)	Kubikzentimeter cm ³ (g)	Kubikmillimeter mm ³ (mg)
1	10	1 000	1 000 000	1 000 000 000
0,1	1	100	100 000	100 000 000
0,01	0,1	10	10 000	10 000 000
0,001	0,01	1	1 000	1 000 000
0,0001	0,001	0,1	100	100 000
0,00001	0,0001	0,01	10	10 000
0,000001	0,00001	0,001	1	1 000
0,0000001	0,0000001	0,0001	0,1	100
0,00000001	0,00000001	0,00001	0,01	10
0,000000001	0,000000001	0,0000001	0,001	1

Gewichte

(Verwandlungszahl 1 000)

Tonnen t	Doppelzentner dz	Kilogramm kg	Gramm g	Milligramm mg
1	10	1 000	1 000 000	1 000 000 000
0,1	1	100	1 00 000	100 000 000
0,01	0,1	10	10 000	10 000 000
0,001	0,01	1	1 000	1 000 000
0,0001	0,001	0,1	100	100 000
0,00001	0,0001	0,01	10	10 000
0,000001	0,00001	0,001	1	1 000
0,0000001	0,0000001	0,0001	0,1	100
0,00000001	0,00000001	0,000001	0,01	10
0,000000001	0,000000001	0,0000001	0,001	1

Übungsaufgabe 439

a) Verwandle in cm:

17,63 m	0,4 m	6,97 dm	23 km	0,7 mm
---------	-------	---------	-------	--------

X b) Verwandle in dm:

19 m	4,8 m	0,8 m	4,21 m	27 km
0,3 km	24 km 800 m	6 m 5 dm	8 cm	65 cm

c) Verwandle in km:

9 000 m	675 m	80,3 m	1 km 50 m	3 km 7 m
16 km 407 m	53 m	408 m	4 m	1 km 1 m

d) Verwandle in dm² (cm², mm²):

4,5 m ²	32 m ²	7,25 m ²	18,04 m ²	0,05 m ²
--------------------	-------------------	---------------------	----------------------	---------------------

e) Verwandle in m² (a, ha):

23 km ²	18 ha	4,7 km ²	900 a	715,6 a
--------------------	-------	---------------------	-------	---------

f) Verwandle in dm³:

18 m ³	5,450 m ³	4,085 m ³	0,056 m ³	1,001 m ³
-------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

g) Verwandle in kg:

8,975 t	41,6 t	0,045 t	29,035 t	0,600 t
---------	--------	---------	----------	---------

h) Verwandle in kg:

648 g	6 g	27 g	3725 g	25 kg 886 g
-------	-----	------	--------	-------------

i) Verwandle in t:

19 t 465 kg	805 kg	5 kg	17 Ztr.	8 dz
-------------	--------	------	---------	------

k) Verwandle in hl:

6,24 m ³	516 l	5 l	808 dm ³	56 000 cm ³
---------------------	-------	-----	---------------------	------------------------

l) Verwandle in cm³:

5 l	0,6 l	3,4 l	$\frac{4}{5}$ l	$3\frac{1}{2}$ l
-----	-------	-------	-----------------	------------------

m) Verwandle in l:

24 500 cm ³	8 750 cm ³	840 cm ³	76 cm ³	4 cm ³
------------------------	-----------------------	---------------------	--------------------	-------------------

n) Verwandle in m³:

75 hl	125 hl	230 hl	9 hl	$15\frac{3}{4}$ hl
-------	--------	--------	------	--------------------

o) Verwandle in m³:

2 500 l	6 470 l	780 l	56 l	8 l
---------	---------	-------	------	-----

p) Verwandle in hl:

8 m ³	3,875 m ³	0,825 m ³	$\frac{3}{4}$ m ³	$3\frac{1}{2}$ m ³
------------------	----------------------	----------------------	------------------------------	-------------------------------

q) Verwandle in kg:

9 hl	3,75 hl	0,6 hl	$\frac{3}{4}$ hl	$\frac{4}{5}$ hl
------	---------	--------	------------------	------------------

r) Verwandle in kg:

5 m ³	850 m ³	2,3 m ³	0,7 m ³	$\frac{1}{2}$ m ³
------------------	--------------------	--------------------	--------------------	------------------------------

Angewandte Aufgaben

X 440. Ein Kraftwagen fährt mit einer Geschwindigkeit von 85 km/h. Wieviel m in der Sekunde sind das?

441. Der Seeweg Hamburg—New York beträgt 3050 Seemeilen. Wieviel km sind das?

442. Bei Windstärke 12 (Orkan) beträgt die Geschwindigkeit des Windes in der Sekunde ungefähr 30 m. Wieviel km/h sind das?

X 443. Ein Eisenbahnwagen ist mit 15 t Kohle beladen. Wieviel kg sind das?

444. Die Bundesrepublik hat eine Größe von 24 800 000 ha. Wieviel km² sind das?

445. Ein Bauerngut hat 583 ha Ackerland, 123 a Gartenland, 215,7 ha Wiesen, 675,5 ha Wald und 86 a Heide. Berechne die Gesamtfläche!

446. Von einem 42 a großen Acker wurden 1344 kg Kartoffeln geerntet. Wieviel dz erntet man bei gleichem Ertrag von $72\frac{1}{2}$ a?

447. Ein Weizenfeld hat eine Länge von 185 m und eine Breite von 130 m. Wieviel dz Weizen erntet man, wenn 1 ha 1500 kg bringt?

448. Eine Wiese hat die Gestalt eines Dreiecks. Die Grundlinie beträgt 225 m, die Höhe 165 m. Wieviel dz Heu werden geerntet, wenn man von 1 ha durchschnittlich 2 500 kg rechnet?

X 449. Eine Wäscherei verbraucht monatlich 425 000 l Wasser. Wieviel kostet das Wasser, wenn 1 hl mit 1,8 Pf berechnet wird?

450. Ein Benzintank faßt 50 000 l. Wie groß ist der Rauminhalt?

451. Ein Kessel wird mit 300 hl Wasser gefüllt. Wieviel t wiegt das Wasser?

X 452. Ein Faß Bier mit 0,99 hl Inhalt wird auf Flaschen ($\frac{3}{4}$ l) gefüllt. Wieviel Flaschen werden benötigt?

453. Ein $2\frac{1}{2}$ -t-Lieferwagen hat bereits 10 dz geladen. Wieviel Sack zu 75 kg können noch dazugeladen werden?

454. Ein LKW hat 3,6 t Brikett geladen. Wieviel Stück zu 600 g sind das?

Handbuch für den mittleren Postdienst

(zur Vorbereitung auf die Prüfung für den mittleren Postdienst)

12 wichtige und preiswerte Lehr- und Lernwerke für PassAw(n) und PIAw(n) sowie zur Vorbereitung auf den Aufstieg BP

Bände 1 a, — **Allgemeine Berufskunde**

1 b und 1 c Ausbildung und Prüfungen im mittleren Dienst; Formblattsammlung; Grundzüge des Postgesetzes und des Weltpostvertrags; Aufbau und Aufgaben der DBP; Dienst bei PÄ (V) und Amtsstellen; Dienst bei Ä des Fernmeldewesens; Grundzüge des Staatsaufbaus; Dienst- und Arbeitsverhältnisse der Ang und Arb; Sozialeinrichtungen der DBP; Bundesbeamtenrecht; PersVG; Dienstverhältnis der Beamten; Auszug aus dem Bundesbeamtengesetz; Brief-, Post- und Fernmeldegeheimnis; Wesentliches aus der allgemeinen Erdkunde

Bände 2, — **Annahme- und Ausgabedienst (mit Beiheften)**

3 und 4 Versandvorschriften; Annahmedienst; Postsparkassen-, Postscheck-, Auslands- und Interzonendienst; Gebührenzettelverfahren; Fernmelde-
dienst; Kassendienst; Ausgabedienst; Dienst mit und bei Amtsstellen

Band 5 — **Besondere Betriebsvorschriften und Sonderdienste (mit Beiheft)**

Nach- und Rücksendung von Postsendungen; unzustellbare und unanbringliche Sendungen; beschädigte Sendungen und Fundsachen; Nachforschungsverfahren und Haftung; Postreisedienst; das Wichtigste über den Zeitungs-, Renten- und Rundfunkdienst

Band 6 — **Zustelldienst (mit Beiheft)**

Der gesamte Zustelldienst; Aushändigungsvorschriften; Briefe mit ZU; Postauftragsdienst

Band 7 — **Postabgangs- und Posteingangsdienst (mit Beiheft)**

Postabgangsdienst; Postbeförderungsdienst; Leitsystem und Leitbehelfe; Postumschlag; Posteingangsdienst

Band 8 — **Gebührenvorschriften (mit 2 Beiheften)**

Allgemeines; Inlandsdienst; Auslandsdienst; Fernmeldegebühren; Praktische Übungen zu den Gebührenvorschriften; Lösungsheft; Gebührenheft

Bände 9 a — **Wie fertige ich meine Prüfungsarbeiten?**

und 9 b Das Wichtigste über den Bürodienst; Amtlicher Schriftwechsel; Prüfungsarbeiten; Musterausarbeitungen

Umfang je Band etwa 144 Seiten

Preis je Band 4,50 DM

— Weitere Lehr- und Lernwerke siehe 2. und 3. Umschlagseite —

Handbuch

für den Fernmeldehandwerker der DBP

- Bände A 1 und A 2** — **Allgemeine Berufskunde**
Weg und Ziel der Ausbildung; Der Lehrvertrag; Die Fernmeldehandwerkerprüfung; Die Tätigkeitsgebiete des Fernmeldehandwerkers, sein beruflicher Werdegang und seine Aufstiegsmöglichkeiten; Der Tarifvertrag; Gesetze und Verordnungen des Fernmeldewesens; Vorschriften zum Schutz gegen Starkstrom und Unfallschäden - Allgemeines über den Staatsaufbau; Aufgaben und Gliederung der DBP; Die Sozialeinrichtungen bei der DBP; Allgemeines über Dienst- und Arbeitsunfälle; Allgemeines aus der Geschichte des Post- und Fernmeldewesens; Wie fertige ich meine schriftlichen Prüfungsarbeiten?; Musterausarbeitungen und Musterthemen
- Band B 1** — **Die Fachkunde**
Einführung in die Mathematik; Grundgesetze der Physik
- Band B 2** — **Die Fachkunde**
Fachzeichnen; Technisches Zeichnen; Stromlaufzeichnen
- Band B 3** — **Die Fachkunde**
Die Gleichstromlehre
- Band B 4** — **Die Fachkunde**
Die Wechselstromlehre
- Band B 5** — **Die Fachkunde**
Elektrische Meßgeräte und Meßschaltungen
- Band C 1** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Werkstoffe der Fernmeldetechnik und ihre Bearbeitung; Werkzeuge und Werkzeugmaschinen
- Band C 2** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Der oberirdische Linienbau
- Band C 3** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Der unterirdische Linienbau
- Band C 4** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Fernsehapparate und Zusatzeinrichtungen
- Band C 5** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Grundzüge der Wählvermittlungstechnik
- Band C 6** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Einführung in die Technik der Nebenstellenanlagen
- Band C 7** — **Die handwerkliche Ausbildung**
Sprechstellenbau

Umfang je Band etwa 140 Seiten

Preis je Band 4,50 DM

Sämtliche Lehrwerke können bestellt werden bei
Deutsche Postgewerkschaft, Verlag GmbH.
6 Frankfurt - Savignystraße 29