FSch der OPD Nürnberg	Rechnen	Lehrbehelf
TPAm Bohlmann		32 Blätter /143 Seiten

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1. Addition und Subtraktion

Wir lernen Rechnen nicht nur mit <u>bestimmten Zahlen</u>
(1, 5, 37, 137 usw.)
sondern auch mit sog. <u>unbestimmten Zahlen</u>
(a, b, c, x, usw.)
deren Wert wir nicht kennen.

Es gibt auch Zahlen, die sich aus bestimmten Werten und unbestimmten Werten zusammensetzen. Diese Zahlen nennt man <u>gemischte Zahlen</u>, z.B.

3a , 5b , 125xy , 30xyz

Zum Beispiel ist bei der Zahl

3a

Beizahl — unbestimmte Zahl

die 3 Beizahl oder Koeffizient der unbestimmten Zahl a.
Die Beizahl 1 läßt man immer weg.

$$\underline{1\,a = a}$$

Die Zahl 3a bedeutet in Wirklichkeit, daß die unbestimmte Zahl a mit 3 zu multiplizieren ist, d. h.

<u>3a heißt eigentlich 3 · a.</u>

Doch kann man hier das Malzeichen einfach fallenlassen und schreiben

$$\underline{3 \cdot a = 3a}$$

1.1 <u>Vertauschbarkeit:</u>

Es ist gleichgültig, ob man bei einer Addition schreibt

$3 + 5 = 8$ oder
$5 + 3 = 8$!

Das Ergebnis ist das gleiche.

> <u>Merke:</u>
> Bei der Addition sind die einzelnen Summanden vertauschbar!

1. Addition und Subtraktion

z.B. $5a + 6a = 6a + 5a$

$12a + 3b + 6a + 12b = 12a + 6a + 3b + 12b$

Beim Abziehen (Subtraktion) ist das nicht so einfach.
Hier kann man zwar sagen

$5 - 3 = 2$, aber nicht

$3 - 5 = 2$, weil $3-5 = -2$ ist.

> Merke:
> Bei der Subtraktion sind die einzelnen Glieder nicht vertauschbar.

Wenn man jedoch statt
$5 - 3 = 2$ sagt $- 3 + 5 = 2$ sind die Ergebnisse gleich.

Demnach kann man auch bei der Subtraktion vertauschen.

> Merke:
> Die einzelnen Glieder beim Abziehen (Subtraktion) sind vertauschbar, wenn man das zu den Zahlengrößen gehörende Vorzeichen mit vertauscht.

1.2 Addition und Subtraktion unbestimmter Zahlen

Unbestimmte Zahlen können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleiche Größen haben.

z.B. $a + a =$
Die beiden Werte a haben die gleiche Größe.
Unbestimmte Zahlen ungleicher Größe kann man nicht addieren oder subtrahieren

z.B. $a + b =$

Diese beiden Werte haben ungleiche Größen

> Merke: Unbestimmte Zahlen gleicher Größe werden addiert oder subtrahiert, indem man die Beizahlen addiert oder subtrahiert und die unbestimmte Zahl übernimmt.

z.B. $3a + 4a = 7a$
$a + a = 1a + 1a = 2a$
$5b + b = 5b + 1b = 6b$

Unbestimmte Zahlen ohne Beizahl (z.B. a) haben immer die Beizahl 1 ($a = 1a$)

Summen oder Differenzen von unbestimmten Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man die einzelnen Größen ordnet und dann nur gleiche Größen addiert oder subtrahiert.

z.B. a) $3a + b - 2a + 2b - c - b + 6c$
Zunächst ordnen!
$3a - 2a + b + 2b - b - c + 6c$
dann gleiche Größen addieren und subtrahieren.
$\underline{1a + 2b + 5c}$

b) $2x - y + z + 5x + 6y - z - x + 5y + 6z$
$2x + 5x - x - y + 6y + 5y + z - z + 6z$
$\underline{6x + 10y + 6z}$

1.3 Das Vorzeichen beim Addieren und Subtrahieren

> Merke : Gleiche Zeichen ergeben immer +
> Ungleiche Zeichen ergeben immer -

Stehen in einer Aufgabe mehrere Zeichen unmittelbar hintereinander, so sind sie durch Klammern zu trennen.

z.B. Aus 6a + +2a wird 6a + (+2a)
Die beiden Zeichen sind wie folgt zu erklären.

$6a \quad + \quad (+2a)$

Rechenzeichen der Aufgabe

Vorzeichen der Größe 2a

Bei der Lösung solcher Aufgaben ist zunächst aus beiden Zeichen ein gemeinsames Zeichen zu bestimmen. Erst dann kann man die Glieder zusammenfassen. Man geht dabei nach der oben eingerahmten Regel vor

z.B.	$6a + (+2a) = 6a + 2a = 8a$	gleiche Zeichen
	$6a + (-2a) = 6a - 2a = 4a$	ungleiche Zeichen
	$6a - (+2a) = 6a - 2a = 4a$	ungleiche Zeichen
	$6a - (-2a) = 6a + 2a = 8a$	gleiche Zeichen

1. Addition und Subtraktion

1.4 Klammerausdrücke bei Addition und Subtraktion

Soll angedeutet werden, daß bestimmte Größen einer Summe oder Differenz zusammengehören, so setzt man sie in eine Klammer.

z.B. $3a + 5 - 2b + 6c$

Will man andeuten, daß $5 - 2b + 6c$ zusammengehören, schreibt man also

$$3a + (5-2b+6c)$$

Gehören jedoch nur $2b + 6c$ zusammen, ist die Klammer anders zu setzen. Es wird dann

$$3a + 5 - (2b+6c)$$

Betrachtet man nun beide Aufgaben, stellt man fest, daß vor der Klammer

1) ein + Zeichen,
2) ein - Zeichen stehen kann.

Für die Ausrechnung selbst muß nun jedoch die Klammer aufgelöst werden. Für die Auflösung aber ist das vor der Klammer stehende + oder - Zeichen von Bedeutung.

Hierbei sind zwei Regeln unbedingt anzuwenden:

Merke: Steht vor der Klammerein + Zeichen, so kann die Klammer einfach weggelassen werden. Die Vorzeichen der Zahlengrößen in der Klammer ändern sich beim Auflösen nicht.

z.B. 1) $3a + (5-2b + 6c)$
Die Klammer wird weggelassen, die Vorzeichen der einzelnen Größen ändern sich nicht.

Also: $3a + 5 - 2b + 6c$

2) 5 + (-2a+5-6b)
   5- 2a + 5 - 6b

> Merke: Steht vor der Klammer ein - Zeichen
> so kann man die Klammer weglassen, wenn man die
> Vorzeichen der Zahlengrößen in der Klammer umkehrt.

z.B. 1) 3a + 5 -(2b-6c)
Die Klammer darf weggelassen werden, wenn die Vorzeichen von 2b und 6c geändert werden.

Also:
3a + 5 - 2b + 6c
aus + 2b wurde - 2b
aus - 6c wurde + 6c

2) 5 - (-2a+5-6b)
   5 +2a-5+6b

Sind in einem Ausdruck mit vielen Zahlengrößen kleine Klammern von großen umschlossen, so löst man zunächst die innerste Klammer unter Beachtung des Vorzeichens auf, und dann erst die äußere Klammer.

z. B.1) a - [b+(c-d+e)]
+ vor der inneren Klammer
a - [b+ c-d+e]
- vor der äußeren Klammer
a - b - c + d - e

2) 2a - [4b - (2a - 3b) - 4a] - 6b =
2a - [4b - 2a + 3b - 4a] - 6b =
2a -4b + 2a - 3b + 4a - 6b =
2a + 2a + 4a - 4b - 3b - 6b =
8a - 13b

2. Multiplikation

2.1 Allgemeine Regeln der Multiplikation

Die Multiplikation ist eine Vereinfachung der Addition.

Besteht nämlich eine Summe aus lauter gleichen Summanden, so kann man sie verkürzt als Produkt ausdrücken.

z.B. $7 + 7 + 7 + 7 = 4 \cdot 7 = 28$

Die Multiplikation ist also eine wiederholte Addition.

Sollen zwei bestimmte Zahlen miteinander mal genommen werden, drückt man das durch den Punkt als Rechenzeichen aus.

z.B. $3 \cdot 4 = 12$

Hier muß der Punkt als Rechenzeichen unbedingt gesetzt werden.

Soll eine bestimmte Zahl mit einer unbestimmten Zahl multipliziert werden

z.B. $3 \cdot a$

so kann man das Malzeichen fallen lassen. Es wird also

$3 \cdot a = 3a$.

Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die einzel_nen Faktoren schreibt, denn

$3 \cdot 5 = 15$ genau so wie

$5 \cdot 3 = 15$ ist.

> Merke: Bei der Multiplikation sind die einzelnen Zahlengrößen vertauschbar.

Für die Vorzeichen bei der Multiplikation gilt das gleiche, wie für die Addition und Subtraktion.

2. Multiplikation

Merke: Gleiche Vorzeichen ergeben immer (+)
Ungleiche Vorzeichen ergeben immer (-)

z.B.

$(+3) \cdot (+4) = +12$

$(-3) \cdot (+4) = -12$

$(+3) \cdot (-4) = -12$

$(-3) \cdot (-4) = +12$

2. Multiplikation

2.2 Multiplikation von Produkten

$\underline{4 \cdot a = 4a.}$

4a nennt man ein Produkt. Es besteht aus dem Faktor 4 und dem Faktor a

Bei der Multiplikation mehrerer Produkte muß beachtet werden, daß z.B. Äpfel und Birnen nicht multiplizierbar sind.

Soll z.B.

$4a \cdot 5b$ multipliziert werden, vertauscht man zunächst die Zahlengrößen.

Es ist dann

$4 \cdot 5 \cdot a \cdot b$ zu schreiben.

Die bestimmten Zahlen 4 und 5 kann man jedoch multiplizieren.

Demnach wird:

$$4a \cdot 5b = 4 \cdot 5 \cdot a \cdot b = \underline{20ab}$$

Merke:	Produkte aus bestimmten und unbestimmten Zahlen werden multipliziert, indem man die Beizahlen multipliziert und zu dem Produkt die unbestimmten Werte (Buchstaben) zufügt.

z.B. 1) $3x \cdot 4y =$

$3 \cdot 4 \cdot x \cdot y =$

$\underline{12xy}$ oder

2) $3a \cdot 4b \cdot 5c \cdot d =$

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d =$

$\underline{60\ abcd}$

2.3 Multiplikation von Faktor und Summe

Soll eine Summe

z.B. $7 + 5$

mit einer bestimmten oder unbestimmten Zahl multipliziert werden, so muß man die Summe <u>in Klammern setzen.</u>

z.B. $3 \cdot (7 + 5)$

<u>Die Klammer gibt an, daß beide Glieder der Summe mit der Zahl vor der Klammer zu multiplizieren sind.</u>

Läßt man die Klammer fort, ergibt sich eine völlig andere Rechenoperation

z.B. $3 \cdot 7 + 5 =$

$21 + 5 = 26$

Es wird demnach folgende Regel angewandt.

> <u>Merke:</u> Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Bei der Multiplikation einer Summe (7 + 5) mit einer Zahl (3) verfahre ich jedoch wie folgt:

$3 \cdot (7 + 5)$

$3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$

$21 + 15 = 36$

Hier gilt demnach folgende Regel

> <u>Merke:</u> Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der in der Klammer stehenden Summe mit der vor der Klammer stehenden Zahl multipliziert. Dabei sind stets die Vorzeichen der Größen zu berücksichtigen.+

z.B. $3 \cdot (7 - 5)$

$(+3) \cdot (+7) - (+3) \cdot (+5)$

$+21 - 15$

$\underline{6}$

2.4 Multiplikation von Summen

Sollen **zwei Summen multipliziert** werden, sind **beide Summen in Klammern zu schreiben.** Hier gilt die gleiche Regel, wie in Punkt 2.3

Läßt man die Klammern fort, ist die Rechenoperation eine andere.
Dann wird aus

$$3 + 4 \cdot 5 + 2 =$$
$$3 + 4 \cdot 5 \quad + 2 =$$
$$3 + \quad 20 \quad + 2 = \underline{25}$$

Hier sind also Klammern zu machen.
Man schreibt dann

$$(3 + 4) \cdot (5 + 2)$$

Die Multiplikation wird dann nach folgender Regel vorgenommen:

Merke :	Summen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der ersten Summe mit jedem Glied der zweiten Summe malnimmt.

z.B.

$$(3 + 4) \cdot (5 + 2)$$

In unserem Beispiel nimmt man also erst die 3 mit jedem Glied der zweiten Klammer, und dann die 4 mit jedem Glied der zweiten Klammer mal.

Es wird

$$(3 + 4) \cdot (5 + 2) =$$
$$3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 =$$
$$15 + 6 + 20 + 8 = \underline{49}$$

Dabei muß immerauf das Vorzeichen der einzelnen Glieder geachtet werden.

2. Multiplikation

z.B.

1) $(3 + 4) \cdot (-5 + 2) =$

$3 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 4 \cdot 2 =$

$-15 + 6 - 20 + 8 = \underline{21}$

2) $(3 - 4) \cdot (5 - 2) =$

$3 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 - 4 \cdot (-2)$

$15 - 6 - 20 + 8 = \underline{-3}$

2.5 Zerlegen in Faktoren (Ausklammern)

Haben mehrere Glieder einer Summe oder Differenz einen gemeinsamen Faktor, so kann man ihn ausklammern.

z.B. $5 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4$

Alle drei Glieder dieser Summe sollen mit der gleichen Zahl 5 multipliziert werden. Hier braucht die 5 nur einmal geschrieben werden. Man setzt sie vor eine Klammer, in der dann die Summe, nämlich 12 + 3 + 4 Platz finden muß.

Aus $5 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4$ wird dann

$5 \cdot (12 + 3 + 4)$

Dies ist möglich, weil nach der Regel in Pkt 2.4 jedes Glied in der Klammer mit der vor der Klammer stehenden Zahl zu multiplizieren ist.

Beispiel:

$5a + 12ab - 4abc$ gemeinsam mit a

$a \cdot (5 + 12b - 4bc)$

Löst man die Klammer wieder auf, ergibt sich wieder

$a \cdot (5 + 12b - 4bc) =$

$5 \cdot a + 12b \cdot a - 4bc \cdot a =$

$5a + 12ab - 4abc$

Das Ergebnis der Aufgabe hat sich durch das Ausklammern also keinesfalls geändert.

Enthält die Summe mehrere gemeinsame Glieder, kann man mehrere Glieder ausklammern.

z.B. 1) $3ab + 3ac - 3ad$; 3a ist gemeinsam

also $3a\,(b+c-d)$

2. Multiplikation

2) 12ab + 14abc + 11abcd; ab ist gemeinsam

also ab (12 + 14c + 11cd)

Erkennt man bei einer Summe, daß in den einzelnen Gliedern gemeinsame Zahlen enthalten sind (zum Beispiel die 5 in den Werten 15 und 30), so kann man diese gemeinsamen Werte ebenfalls ausklammern.

z.B. 15ab + 25a - 30ac, <u>a</u> ist gemeinsam, in 15, 25 und 30 steckt die Zahl <u>5</u>

also wird <u>5a</u> ausgeklammert. Dann heißt es:

15ab + 25a - 30 ac =
<u>5a (3b + 5 - 6c)</u>

Der Wert der Aufgabe hat sich dabei nicht verändert,

denn 5a·3b = 15ab und
5a·5 = 25a und
5a·(-6c= -30ac
15ab + 25a - 30ac ist also erhalten geblieben.

<u>Merke:</u> Enthalten die einzelnen Glieder einer Summe oder Differenz gleiche Zahlenwerte, oder kann man alle Glieder durch ein und dieselbe Zahl teilen, so können die gleichen Zahlenwerte oder die Zahl, durch die gemeinsam zu teilen ist , ausklammern.

3. Division (Bruchrechnen)

3.1 Allgemeine Regeln der Division

Die Division ist eine Umkehrung der Multiplikation.

Grundsätzlich gibt es zwei Darstellungen:

1) 6:2 , die Darstellung mit Doppelpunkt
2) $\frac{6}{2}$, die Darstellung durch Bruchstrich.

Hierbei ersetzt der Bruchstrich den Doppelpunkt. Diese Form der Schreibweise nennt man Bruch.

Die Zahl, die über dem Bruchstrich steht, ist der Zähler
Die Zahl, die unter dem Bruchstrich steht, ist der Nenner.

> Merke: Zähler und Nenner dürfen nie vertauscht werden.

z.B. ist $\frac{6}{2} = 3$. vertausche ich beide

ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Die Ergebnisse sind nicht gleich. Vertausche ich Zähler und Nenner, erhalte ich den Kehrwert des ursprünglichen Bruches.

Interessant sind Brüche, in denen der Wert Null erscheint.

z.B. $\frac{0}{2} = 0$

> Merke: Ist der Zähler eines Bruches Null, wird auch das Ergebnis Null

Ist jedoch der Nenner 0 ergibt sich folgende Betrachtung:

Nimmt man an, daß der Nenner zunächst 1 ist, so wird bei folgendem Bruch das Ergebnis gleich dem Zähler werden:

$$\frac{5}{1} = 5$$

3. Division (Bruchrechnen)

Läßt man nun den Nenner immer kleiner werden, also

$$\frac{5}{0{,}1} = 50$$, so wird das

Ergebnis immer größer. Es ist dann:

$$\frac{5}{0{,}01} = 500$$

$$\frac{5}{0{,}001} = 5000$$

$$\frac{5}{0{,}0001} = 50.000$$ und

$$\boxed{\frac{5}{0} = \text{Unendlich groß}}$$

> Merke: Teilt man eine beliebige Zahl durch 0 ist das Ergebnis immer "Unendlich"!

Für die Vorzeichen beim Teilen und der Bruchrechnung gilt die schon bekannte Regel:

> Merke: Gleiche Vorzeichen ergeben immer +
> ungleiche Vorzeichen ergeben immer −

z.B.

$$\frac{+10}{+5} = +\frac{10}{5} = +2$$; gleiche Vorzeichen

$$\frac{+10}{-5} = -\frac{10}{5} = -2$$; ungleiche Vorzeichen

$$\frac{-10}{+5} = -\frac{10}{5} = -2$$; ungleiche Vorzeichen

$$\frac{-10}{-5} = +\frac{10}{5} = +2$$; gleiche Vorzeichen

3. Division (Bruchrechnung)

3.2 Kürzen von Brüchen

Für das Kürzen einfacher Zahlenwerte gilt folgende Regel:

> Merke: Kürzen heißt Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen

z.B.

1) $\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \underline{\frac{2}{3}}$

2) $\frac{25a}{30ab} = \frac{25a : 5a}{30ab : 5a} = \underline{\frac{5}{6b}}$

Der Wert des Bruches kann sich dabei nicht ändern, weil ja der Zähler und der Nenner durch die gleiche Zahl geteilt wird.

Ist der Zähler oder der Nenner eine Summe, so muß man die in der Summe gemeinsamen Werte erst ausklammern. Dann erst kann gekürzt werden.

z.B.

$$\frac{25a + 25b}{5} = \frac{25\ (a+b)}{5} = \frac{25\ (a + b) : 5}{5 : 5} =$$

$$\frac{5\ (a + b)}{1} = \underline{5\ (a + b)}$$

Ebenso verfährt man, wenn die Summe oder Differenz ein Nenner ist.

$$\frac{5}{25a - 25b} = \frac{5}{25(a - b)} = \frac{5 : 5}{25(a - b) : 5} = \underline{\frac{1}{5(a + b)}}$$

Sind im Zähler und im Nenner Summen oder Differenzen, wird ebenso verfahren:

$$\frac{15a + 20b}{25a - 20b} = \frac{5(3a + 4b)}{5\ (5a - 4b)} = \frac{5(3a + 4b) : 5}{5(5a - 4b) : 5} =$$

$$\frac{3a + 4b}{5a - 4b}$$

3. Division (Bruchrechnung)

Merke: Summen und Differenzen werden gekürzt, indem man in Zähler und Nenner gleiche Werte ausklammert und dann durch die gleiche Zahl teilt.

3. Division (Bruchrechnen)

3.3 Erweitern von Brüchen

Das Erweitern von Brüchen ist das Gegenteil vom Kürzen.

Merke: Man erweitert Brüche, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert.

z.B. $\frac{3}{5}$ soll mit 10 erweitert werden.

es wird $\frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 10} = \frac{30}{50}$

Der Wert des Bruches ändert sich durch das Erweitern nicht

Sollen Brüche erweitert werden, deren Zähler oder Nenner aus einer Summe bestehen, muß wie beim Klammernauflösen jedes Glied multipliziert werden.

z.B. $\frac{2a + 5b}{b + c}$ soll mit 2 erweitert werden.

Es wird dann $\frac{(2a + 5b) \cdot 2}{(b + 2) \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2a + 2 \cdot 5b}{2 \cdot b + 2 \cdot 2} = \frac{4a + 10b}{2b + 4}$

Dabei ist wie beim Auflösen der Klammern auf die Vorzeichen zu achten.

3. Division (Bruchrechnen)

3.4 Addition und Subtraktion von Brüchen)

3.41 Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche.

Brüche sind gleichnamig, wenn ihr Nenner gleich ist. Die Addition gleichnamiger Brüche ist einfach.

> Merke: Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner unverändert übernimmt.

z.B. 1) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{6}{5} - \frac{7}{5} = \frac{1+3+6-7}{5} = \underline{\frac{3}{5}}$

2) $\frac{a}{4} + \frac{2a}{4} - \frac{6a}{4} + \frac{9a}{4} = \frac{a+2a-6a+9a}{4} = \underline{\frac{6a}{4}}$

3.42 Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche.

Ungleichnamige Brüche kann man erst dann addieren, wenn man für alle vorhandenen Nenner einen gemeinsamen Hauptnenner gefunden hat.

z.B. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ Die Zahl, in der diese beiden Nenner enthalten sind, findet man, indem man sie miteinander multipliziert.
Der gemeinsame Nenner wird also

$$7 \cdot 5 = \underline{35}$$

Um aus $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{7}$ Brüche mit dem Nenner 35 herauszubekommen, muß man sie erweitern. Und zwar $\frac{1}{5}$ mit 7, $\frac{1}{7}$ mit 5.

Es ist demnach

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{7}{35} + \frac{5}{35}$$

Nun kann addiert werden:

$$\frac{7}{35} + \frac{5}{35} = \underline{\frac{12}{35}}$$

3. Division (Bruchrechnen)

Sollen mehr Brüche addiert oder subtrahiert werden, wäre es ungünstig, alle Nenner bei der Suche nachdem gemeinsamen Hauptnenner zu multiplizieren. Hier wird der <u>kleinste</u> gemeinsame Nenner gesucht.

Man erhält ihn, indem man alle Nenner in sogenannte <u>Primzahlen</u> zerlegt.
(Primzahlen sind Zahlen, die nur noch durch sich selbst und 1 teilbar sind).

z.B. sind Primzahlen von

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ — <u>2</u> kenn nur durch 2 und 1 geteilt werden

$5 = 5$ — <u>5</u> desgleichen

$9 = 3 \cdot 3$

$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

Dazu macht man sich eine Tabelle nach folgendem Beispiel.

Zu errechnen ist das Ergebnis folgender Aufgabe:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{8} + \frac{2}{9} - \frac{1}{12}$$

Nenner	Primzahl	für den Hauptnenner werden benötigt
2	2	2
3	3	3
8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2$
9	$3 \cdot 3$	3
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	–

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

<u>Hauptnenner</u> = <u>72</u>

Erklärung: nächste Seite

3. Division (Bruchrechnen)

Erklärung:

In die Spalte 1 trägt man die Nenner aus der Aufgabe ein.

In der Spalte 2 zerlegt man sie in Primzahlen.

In die Spalte 3 werden nur die Primzahlen übernommen, die ich unbedingt für die in Spalte 1 dargestellte Nenner benötige.

Deshalb kann in Zeile 3 für Nenner 8 eine 2 fehlen, da sie in Zeile 1 bereits vorhanden ist. In Zeile 4 genügt zur Darstellung des Nenners 9 nur eine 3, weil die andere in Zeile 2 bereits vorhanden ist. Und in Zeile 5 kann alles fallen gelassen werden, weil in Zeile 3 bereits die 2 · 2 und z.B. in Zeile 4 die 3 vorhanden ist.

Diese übrig gebliebenen Primzahlen werden nun multipliziert und ergeben unbedingt den kleinsten gemeinsamen Nenner

Nunmehr müssen die Nenner der Aufgabe auf 72 erweitert werden. d.h.

$\frac{1}{2}$ ist mit 36 zu erweitern.

$\frac{2}{3}$ " " 24 zu "

$\frac{4}{8}$ " " 9 zu "

$\frac{2}{9}$ " " 8 zu "

$\frac{1}{12}$ " " 6 zu "

Es wird:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{8} + \frac{2}{a} - \frac{1}{12} \quad \text{zu}$$

$$\frac{1 \cdot 36}{2 \cdot 36} + \frac{2 \cdot 24}{3.24} - \frac{4 \cdot 9}{8 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 8}{9 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 6}{12 \cdot 6} =$$

3. Division (Bruchrechnen)

$$\frac{36}{72} + \frac{48}{72} - \frac{36}{72} + \frac{16}{72} - \frac{6}{72} =$$

$$\frac{36 + 48 - 36 + 16 - 6}{72} = \underline{\frac{58}{72}}$$

3. Division (Bruchrechnen)

3.5 Multiplikation von Brüchen

> **Merke:** Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert

z.B. 1) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \underline{\frac{2}{15}}$

2) $\frac{5}{a} \cdot \frac{b}{4} = \frac{5 \cdot b}{a \cdot 4} = \underline{\frac{5b}{4a}}$

Soll eine ganze Zahl mit einem Bruch multipliziert werden, so verwandelt man die ganze Zahl in einen Bruch mit dem Nenner 1 und multipliziert aus.

z.B. 1) $5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \underline{\frac{5}{4}}$

2) $a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot 2} = \underline{\frac{a}{2}}$

Bestehen Zähler oder Nenner aus einer Summe, wird diese in Klammern gesetzt und ausmultipliziert.

z.B. 1) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{4}{a} = \frac{(a+b) \cdot 4}{2 \cdot a} = \underline{\frac{4a+4b}{2a}}$

2) $\frac{3a}{2+b} \cdot \frac{3b+c}{2} = \frac{3a \cdot (3b+c)}{(2+b) \cdot 2} = \underline{\frac{9ab+3ac}{4+2b}}$

3. Division (Bruchrechnen)

3.6 Division von Brüchen

> Merke: Brüche werden dividiert, indem man vom 2. Bruch oder dem Nennerbruch den Kehrwert bildet und dann die beiden Brüche miteinander multipliziert.

z.B. 1) $\frac{1}{3} : \frac{5}{6} =$ Kehrwert von $\frac{5}{6}$ ist $\frac{6}{5}$

also $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \underline{\frac{2}{5}}$

2) $\frac{2}{7} : \frac{3}{10} = \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{3} = \frac{2 \cdot 10}{7 \cdot 3} = \underline{\frac{20}{21}}$

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch geteilt werden, verwandelt man die Zahl in einen Bruch und verfährt dann genauso.

z.B. 1) $2 : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} : \frac{1}{3} = \frac{2 . 3}{1 \cdot 1} = \frac{6}{1} = \underline{6}$

2) $5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{20}{3} = \underline{6\frac{2}{3}}$

Ist ein Bruch durch eine ganze Zahl zu teilen, wird der Bruch mit dem Kehrwert der Zahl multipliziert.

z.B. 1) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \underline{\frac{1}{12}}$

2) $\frac{5}{9} : 6 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 1}{9 \cdot 6} = \underline{\frac{5}{54}}$.

Besteht eine Aufgabe aus mehreren Brüchen, die multipliziert und dividiert werden sollen, so rechnet man sie von links nach rechts der Reihe nach aus.

z.B. 1) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} : \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} : \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} =$

3. Division (Bruchrechnen)

$$\frac{1\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1\cdot4\cdot6\cdot1}{3\cdot5\cdot2\cdot2} = \frac{6}{15} = \underline{\frac{2}{5}}$$

Ist ein Teil jedoch <u>in Klammern gesetzt,</u> wie bei der folgenden Aufgabe, <u>muß zunächst der Klammerausdruck errechnet werden.</u>

z.B. 1) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{5} : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4\cdot3}{5\cdot3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3\cdot12\cdot1}{4\cdot15\cdot2} = \frac{9}{30} = \underline{\frac{3}{10}}$$

2) $\frac{2}{5} : \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)$

$$\frac{2}{5} : \left(\frac{3\cdot1}{4\cdot5}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\right) = \frac{2}{5} : \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2\cdot20\cdot2\cdot3}{5\cdot3\cdot3\cdot4} = \frac{20}{15} = \underline{1\,\frac{1}{5}}$$

4. Potenzrechnung

4.1 Allgemeine Regeln zur Potenzrechnung

Besteht ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, z.B. $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$, so drückt man es als "Potenz" aus. Dazu verwendet man folgende Schreibweise:

$$\overset{1}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{3}{3}\cdot\overset{4}{3}\cdot\overset{5}{3} = 3^5$$

3^5 ist dabei die Potenz.
3 ist die Grundzahl (Basis)
5 ist die Hochzahl (Exponent).

Die Grundzahl (Basis) gibt immeran, welche Zahl zu multiplizieren ist.

Die Hochzahl (Exponent) gibtan, wie oft sie zu multiplizieren ist.

Eine Potenz mit beliebiger Basis und dem Exponenten 1 ergibt immer die Basis selbst.

z.B. $5^1 = 5$; $37^1 = 37$; $159^1 = 159$

Eine Potenz mit beliebiger Basis und dem Exponenten 0 ist immer gleich 1

z.B. $7^0 = 1$; $10^0 = 1$; $39^0 = 1$; $135^0 = 1$!

Auch beim Potenzieren ist streng auf das Vorzeichen der Basis zu achten. Hier gelten im Grunde zwei Regeln

1) Merke: Ist die Basis positiv, ist auch das Ergebnis positiv.

z.B. $(+3)^2 = 3\cdot3 = \underline{9}$
$(+5)^2 = 5\cdot5 = \underline{25}$

2) Merke: Ist die Basis dagegen negativ, wird das Ergebnis nur dann positiv, wenn der Exponent eine

4. Potenzrechnung

gerade Zahl ist

z.B. 1)
$$
\begin{aligned}
(-2)^2 &= (-2)\cdot(-2) = \underline{+4} \\
(-2)^3 &= (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +4\cdot(-2) = \underline{-8} \\
(-2)^4 &= (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +4\cdot(-2)\cdot(-2) = \\
&= -8\cdot(-2) = \underline{+16} \\
(-2)^5 &= (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +4\cdot(-2)\cdot(-2) = \\
&= -8\cdot(-2)\cdot(-2) = +16\cdot(-2) = \underline{-32}
\end{aligned}
$$

<u>Verwendet man Zehnerpotenzen, können Zahlen beliebig verändert werden, ohne daß sich der Zahlenwert verändert.</u>

z.B.
$$
\begin{aligned}
10000 &= 10\cdot10\cdot10\cdot10 = 10^4 \\
100 &= 10\cdot10 = 10^2 \\
\\
1600 &= 16\cdot10\cdot10 = 16\cdot10^2 \\
1.500000 &= 1,5\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 1,5\cdot10^6
\end{aligned}
$$

4. Potenzieren

4.2 Potenzieren von Zahlen, Produkten und Quotienten, Summen und Differenzen

Wie Zahlen potenziert werden geht aus dem Pkt 4.1 hervor. Wir wollen es hier nocheinmal wiederholen.

> **Merke:** Zahlen werden potenziert, indem man die Grundzahl (Basis) so oft mit sich selbst multipliziert, wie die Hochzahl (Exponent) angibt

z.B. $\underline{2^3} = 2\cdot2\cdot2$

$\underline{5^4} = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$

Steht vor der Potenz noch eine Beizahl, so darf sie keinesfalls mit potenziert werden.

z.B. $5\cdot2^3 = 5\cdot2\cdot2\cdot2 = 5\cdot8 = \underline{40}$

$3\cdot a^5 = 3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = \underline{3a^5}$

Soll die Beizahl 5 mit potenziert werden, d.h. soll ein Produkt potenziert werden, kennzeichnet man das durch Klammern.

z.B. $5\cdot2^3$ nur 2^3 wird potenziert

$(5\cdot2)^3$ $5\cdot2$ ist zu potenzieren

$(5\cdot2)^3 = 10^3 = 1000$ oder

$(5\cdot2)^3 = 5^3\cdot2^3 = 125\cdot8 = \underline{1000}$

> **Merke:** Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor des Produktes potenziert.

z.B. $(3\cdot2\cdot4)^3 = 3^3\cdot2^3\cdot4^3 = 27\cdot8\cdot64$

Ist ein Bruch zu potenzieren, verfährt man genauso. Gekennzeichnet wird das ebenfalls durch eine Klammer

4. Potenzieren

z.B. $\frac{3^2}{4}$ 3^2 ist zu potenzieren

$\left(\frac{3}{4}\right)^2$ der gesamte Bruch ist zu potenziern.

Merke: Brüche werden potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert

z.B. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\frac{8}{27}}$

Soll eine Summe oder Differenz mit einer Zahl multipliziert werden, setzt man sie in Klammern. Soll eine Summe oder Differenz potenziert werden, setzt man sie ebenfalls in Klammern

z.B. $(3+2)^2$
$(4-3)^2$

Merke: Summen oder Differenzen werden potenziert, indem man die Potenzaufgabe in eine Multiplikationsaufgabe verwandelt und die entstehenden Klammern ausmultipliziert

z.B. 1)
$$\begin{aligned}(3+2)^2 &= (3+2)\cdot(3+2)\\ &= 3\cdot3+3\cdot2+2\cdot3+2\cdot2\\ &= 9+6+6+4\\ &= \underline{25}\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}(4-3)^3 &= (4-3)\cdot(4-3)\cdot(4-3)\\ &= (4\cdot4-4\cdot3-3\cdot4+3\cdot3)\cdot(4-3)\\ &= 4\cdot4\cdot4-4\cdot3\cdot4-3\cdot4\cdot4+3\cdot3\cdot4-4\cdot4\cdot3+4\cdot3\cdot3+3\cdot4\cdot3\\ &\quad -3\cdot3\cdot3\\ &\quad 64-48-48+36-48+36+36-27\\ &= \underline{1}\end{aligned}$$

4.3 Addieren und subtrahieren von Potenzen.

Hierbei ist streng auf Grundzahl (Basis) und Hochzahl (Exponent) der einzelnen Potenzen zu achten.

> **Merke:** Potenzen mit gleicher Basis und ungelichen Exponenten oder Potenzen mit ungelicher Basis kann man nicht addieren oder subtrahieren.

z.B. $2^3+2^2 = 2\cdot2\cdot2+2\cdot2 = 8+4 = 12$

Hier muß also jede Potenz zunächst ermittelt werden, bevor addiert werden kann.

z.B. $3^2+2^2 = 3\cdot3+2\cdot2 = 9+4 = \underline{13}$

> **Merke:** Addiert und subtrahiert können nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten

z.B. 2^3+2^3 oder 5^4+5^4

> **Merke:** Potenzen mit gleicher Basis und gelichem Exponenten werden addiert oder subtrahiert, indem man die Beizahlen addiert oder subtrahiert und die Potenz unverändert übernimmt.

z.B. 1) $2^3+2^3 =$ Beizahlen sind 1

$1\cdot2^3+1\cdot2^3 = \underline{2\cdot2^3}$

2) $5\cdot3^2+3\cdot3^2 = \underline{8\cdot3^2}$

3) $3\cdot a^{12} + 7\cdot a^{12} = \underline{10\cdot a^{12}}$

4. Potenzieren

4.4 Multiplizieren von Potenzen

Man kann nur Potenzen mit gleicher Grundzahl (Basis) multiplizieren.

z.B. $2^3 \cdot 2^4$ oder $5^7 \cdot 5^3$

> Merke: Potenzen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert

z.B. 1) $2^3 \cdot 2^4 =$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \cdot \; 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{(3+4)} = \underline{2^7} \text{ oder}$$

2) $5^2 \cdot 5^4 =$

$$5 \cdot 5 \quad \cdot \; 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{(2+4)} = \underline{5^6}$$

4.5 Division von Potenzen

Es können nur Potenzen mit gleicher Basis dividiert werden.

z.B. $\frac{5^3}{5^2}$ oder $\frac{10^7}{10^5}$

> **Merke:** Potenzen mit gleicher Basis werden, dividiert, in dem man die Exponenten voneinander abzieht.

z.B. 1) $\frac{5^3}{5^2} = \frac{5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}$ also $\frac{5^3}{5^2} = 5^{(3-2)} = 5^1 = \underline{5}$

2) $\frac{5^3}{5^8} = 5^{(3-8)} = \underline{5^{-5}} = \underline{\frac{1}{5^5}}$

Ist der Exponent der Potenz im Nenner größer als der der Potenz im Zähler, wird beim Ergebnis der Exponent negativ. (siehe Beispiel)

$$\frac{3^2}{3^5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \underline{\frac{1}{3^3} \text{ oder } 3^{-3}}$$

> **Merke:** Hat ein Exponent einer Potenz im Nenner ein negatives Vorzeichen, so erscheint die Potenz mit einem positiven Vorzeichen des Exponenten im Zähler und umgekehrt.

4. Potenzieren

4.6 Potenzieren von Potenzen

Eine Potenz potenzieren heißt die Potenz so oft mit sich selbst malnehmen, wie der Exponent angibt; um Irrtümer in der Schreibweise auszuschließen, setzt man dabei die Potenz in Klammern.

z.B. $(3^2)^3$; $(2^5)^3$; $(a^n)^x$!

> Merke: Potenzen werden potenziert, in dem man die Exponenten miteinander multipliziert.

z.B. 1) $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{(2 \cdot 3)}$, denn
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{3^6}$

2) $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{(3 \cdot 2)}$, denn
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{2^6}$

4.7 Wurzelziehen aus Potenzen

Die Wurzel aus einer Potenz kann man auf zwei verschiedenen Wegen ziehen.

Merke: Man zieht die Wurzel aus der Basis und übernimmt den Exponenten unverändert

z.B. 1) $\sqrt{9^3} = \sqrt{9\cdot 9\cdot 9} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9} = 3\cdot 3\cdot 3 = 3^3$

$\sqrt{9^3} = \underline{3^3}$

2) $\sqrt{36^4} = \underline{6^4}$

Merke: Ist der Exponent der Potenz eine gerade Zahl, so kann aus der Potenz die Wurzel gezogen werden, indem man den Exponent der Potenz durch den Exponenten der Wurzel teilt.

z.B. 1) $\sqrt{4^{12}} = 4^{\frac{12}{2}} = \underline{4^6}$

2) $\sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = \underline{2}$

3) $\sqrt[25]{4^{50}} = 4^{\frac{50}{25}} = 4^2 = \underline{16}$

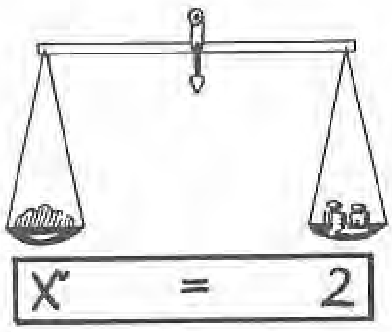
FSch der OPD Nürnberg	Rechnen	Rechenregeln
TFAm Bohlmann		Blatt 23

5. Gleichungen mit einer Unbekannten

5.1 Grundsätzliche Regeln

Für das Lösen von Gleichungen gibt es eine Reihe von Gesichtspunkten, die unbedingt eingehalten werden müssen.

Am besten bedient man sich des Vergleiches der Gleichung mit einer alten zweiarmigen Krämerwaage.



Diese Waage ist im Gleichgewicht, wenn beide Waagschalen gleich schwer sind.

Die genaue Größe des unbekannten Gewichtes jedoch kann man nur ermitteln, wenn das Unbekannte sich nicht auf beide Waagschalen verteilt, sondern nur auf eine beschränkt ist.

> Merke: Bei einer Gleichung kann man die unbekannte Größe nur dann ausrechnen, wenn sie allein auf ein einer Seite und im Zähler steht.

Ist eine Waage im Gleichgewicht und nimmt man von einer der Waagschalen ein Teil des Gewichtes weg(abziehen), so wird die andere Schale schwerer und sinkt herab. Die Waage ist nicht mehr im Gleichgewicht. Man erhält erst dann wieder Gleichgewicht, wenn von der anderen (der herabgesunkenen) Schale die gleiche Gewichtsmenge abgezogen wird.

> Merke: Zieht man auf einer Seite der Gleichung eine Zahl ab, so muß man auch auf der anderen Seite die gleiche Zahl abziehen.

z.B.

$$
\begin{aligned}
x+5 &= 12+5 \\
-5 &= -5 \\
x+5-5 &= 12+5-5 \\
\underline{x} &\underline{= 12}
\end{aligned}
$$

5. Gleichungen mit einer Unbekannten

Die gleiche Erscheinung tritt auf, wenn das Gewicht der einen Schale vergrößert wird. Auch hier muß der anderen Schale dann die gleiche Gewichtsmenge zugeführt werden, wenn das Gleichgewicht erhalten bleiben soll.

> Merke: Zählt man auf einer Seite der Gleichung eine Zahl zu, so ist die gleiche Zahl auch auf der zweiten Seite der Gleichung zuzuzählen.

z.B.

$$x-5 = 12-5$$
$$+5 \qquad +5$$
$$x-5+5 = 12-5+5$$
$$\underline{x = 12}$$

Auch beim Multiplizieren und Dividieren tritt diese Erscheinung auf. In jedem Fall muß also auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche getan werden.

> Merke: Wird eine Seite der Gleichung mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert, so muß auch die andere Seite mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert werden.

z.B. 1)

$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\cdot 3 = \cdot 3$$
$$\frac{3 \cdot x}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3}$$
$$\underline{x = 4}$$

oder

2)

$$4x = 16$$
$$:4 = :4$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$$
$$\underline{x = 4}$$

Bei der Lösung von Gleichungen ist also stets auf beiden Seiten die gleiche Rechenoperation durchzuführen.

5.2 Das Lösen von Gleichungen

Im Pkt 5.1 haben wir geübt, wie man bei Gleichungen Zahlenwerte addieren, subtrahieren, multiplizieren und teilen kann. Alle diese Rechenoperationen brauchen wir, wenn wir Gleichungen lösen wollen.

Am besten übt man das Lösen von Gleichungen anhand von Aufgaben.

z.B. 1) $\frac{2x-4}{3} = 6$

Alle Rechenoperationen, die für die Lösung dieser Gleichung durchzuführen sind, dienen nur dazu, die unbekannte Größe x allein auf eine Seite der Gleichung zu bringen.

Zunächst wird die 3 weggestellt, denn an die -4 oder die 2 vor dem x kann man noch nicht heran. Um 3 wegzuschaffen, wird mit 3 multipliziert.

Es wird

$$\frac{3(2x-4)}{3} = 6 \cdot 3 \quad \text{/ kürzen durch 3}$$

$$\frac{1(2x-4)}{1} = 6 \cdot 3 \quad \text{/ 1 fällt weg}$$

$$2x-4 = 6 \cdot 3$$

Nun kann die -4 weggeschafft werden. Dazu zählt man +4 zu.

$$2x-4+4 = 6 \cdot 3+4 \quad \text{/ } -4+4 = 0$$

$$2x-0 = 18+4$$

$$2x = 22$$

Um die 2 wegzuschaffen, muß durch 2 geteilt werden.

$$\frac{2x}{2} = \frac{22}{2}$$

$$\frac{1x}{1} = 11$$

$$\underline{x = 11}$$

2) $10x-74 = 46+6x$

5. Gleichungen mit einer Unbekannten

x soll allein auf einer Seite stehen. Man schafft also den kleineren x-Wert, in unserem Beispiel 6x, von der rechten Seite weg. Da er in der Aufgabe als +6x erscheint, zieht man ihn ab.

Es wird:

$10x-74-6x = 46+6x-6x$
$10x-6x-74 = 46+0$

Nunmehr muß der Zahlenwert 74 weggeschafft werden.

Da er in der Aufgabe als -74 steht, zählt man ihn zu.

$10x-6x-74+74 = 46+74$
$4x-0 = 120$
$4x = 120$

Um die 4, die mit x multipliziert ist fortzuschaffen, teilt man durch 4

$\frac{4 \cdot x}{4} = \frac{120}{4}$ / kürzen

$\frac{1x}{1} = \frac{120}{4}$ / 1 fällt weg

$x = 30$

6. Formeln umstellen

Beim Formeln umstellen verfährt man genauso, wie beim Lösen der Gleichungen. Die unbekannte Größe ist immer der in der Aufgabenstellung angegebene Wert.

Die Regeln für das Formelumstellen sind demnach ebenfalls die Gleichen.
Hauptregel ist auch hier:

> Merke: Was man auf der einen Seite einer Formel an Rechenoperationen durchführt, muß man auch auf der anderen Seite tun.

Anhand von Beispielen soll versucht werden, das Formelumstellen zu erläutern.

1) $I = \frac{U}{R}$; U soll errechnet werden

$I = \frac{U}{R}$ / mit R malnehmen

$I \cdot R = \frac{U \cdot R}{R}$ / $\frac{R}{R} = 1$

$I \cdot R = U \cdot 1$

$U = I \cdot R$

2) $I = \frac{U}{R}$; R soll errechnet werden

$I = \frac{U}{R}$ / mit R malnehmen

$I \cdot R = \frac{U \cdot R}{R}$ / $\frac{R}{R} = 1$

$I \cdot R = U \cdot 1$ / durch I teilen

$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U \cdot 1}{I}$ / $\frac{I}{I} = 1$

$R = \frac{U \cdot 1}{I}$

$R = \frac{U}{I}$

3) $A = \frac{a \cdot b}{2}$; b soll errechnet werden

$A = \frac{a \cdot b}{2}$ / mit 2 malnehmen

$2 \cdot A = \frac{2 \cdot a \cdot b}{2}$ / $\frac{2}{2} = 1$

$2 \cdot A = a \cdot b$ / durch a teilen

$\frac{2A}{a} = \frac{a \cdot b}{a}$ / $\frac{a}{a} = 1$

6. Formeln umstellen

$$\frac{2A}{a} = b$$

4) $A = \frac{d^2\pi}{4}$; d soll errechnet werden

$A = \frac{d^2\pi}{4}$ / mit 4 malnehmen

$4 \cdot A = \frac{4 \cdot d^2}{4}$ / $\frac{4}{4} = 1$

$4A = d^2\pi$ / durch π teilen

$\frac{4A}{\pi} = \frac{d^2\pi}{\pi}$ / $\frac{}{} = 1$

$\frac{4A}{\pi} = d^2$ / Wurzelziehen

$\sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{d^2}$ / $\sqrt{d^2} = d$

$$\sqrt{\frac{4A}{\pi}} = d$$

5) $Rg = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; R_1 soll errechnet werden

$Rg = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ / mit Nenner (R_1+R_2) malnehmen

$Rg\ (R_1+R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot (R_1+R_2)}{R_1+R_2}$ / $\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2} = 1$

$Rg(R_1+R_2) = R_1 \cdot R_2$ / Klammern auflösen

$Rg \cdot R_1 + Rg \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2$ / $Rg \cdot R_1$ abziehen

$Rg \cdot R_1 - Rg \cdot R_1 + Rg \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2 - Rg \cdot R_1$ / $Rg \cdot R_1 - Rg \cdot R_1 = 0$

$Rg \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot Rg$ / R_1 ausklammern

$Rg \cdot R_2 = R_1(R_2 - Rg)$ / durch (R_2-Rg) teilen

$\frac{Rg \cdot R_2}{R_2 - Rg} = \frac{R_1(R_2-Rg)}{R_2-Rg}$ / $\frac{R_2-Rg}{R_2-Rg} = 1$

$\frac{Rg \cdot R_2}{R_2 - Rg} = R_1$

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot Rg}{R_2 - Rg}$$

7. Dreisatzrechnung

7.1 Der einfache Dreisatz

Zur Lösung einer Dreisatzaufgabe wird in jedem Fall ein Ansatz benötigt.

Der Ansatz besteht aus zwei Sätzen.
Der erste Satz enthält alle Zahlenanbaben der bekannten Verhältnisse (Feststellungssatz),
der zweite Satz alle Zahlenangaben, die auf die neuen Verhältnisse ausgerichtet sind.(Fragesatz)
Beide Sätze müssen zur Lösung der Dreisatzaufgabe einander gegenübergestellt werden.

Wir wollen das anhand der folgenden Aufgabe durchexerzieren.

z.B. Ein Bautrupp mit 10 Kräften hebt an 1 Tag 500 m Kabelgraben aus. 2 Kräfte erkranken jedoch und 2 weitere werden zu Lehrgängen abgeordnet. Mit wieviel m fertiggestelltem Kabelgraben kann der Bautruppführer für den nächsten Tag rechnen, wenn nur 6 Kräfte zum Dienst erscheinen?

Lesen wir den ersten Satz der Aufgabe, bemerken wir, daß in ihm festgestellt wird, daß 10 Kräfte in 1 Tag 500 m Graben ausheben. Dies ist also der sog. Feststellungssatz.

Durch Ausscheiden der ang. 4 Kräfte ergeben sich für den nächsten Tag völlig neue Verhältnisse. Die Länge des durch die restlichen Kräfte ausgehobenen Kabelgrabens ist nun nicht mehr bekannt. Die Länge ist gefragt.

Hier handelt es sich also um den sog. Fragesatz.

Feststellungs und Fragesatz werden nun so untereinander gestellt, daß die gefragte Größe zum Schluß erscheint und jeweils gleiche Bezeichnungen untereinander stehen.

Also

10	Kräfte	heben an	1 Tag	500 m	Graben	aus
6	"	"	" 1 Tag	x m	"	" ?

7. Dreisatzrechnung

Ist das geschehen, kann man an die Aufstellung des Bruchstriches gehen und schreibt:

$$x = \overline{\qquad\qquad}$$

Dabei geht man wie folgt vor:

Merke: Der Ansatz einer Dreisatzaufgabe besteht immer aus dem "Feststellungssatz" und dem "Fragesatz".

Bei der Lösung einer Dreisatzaufgabe sind immer die im Ansatz untereinanderstehenden gleichen Bezeichnungen in ein Verhältnis zu bringen. Dabei wird immer auf die Einheit 1 geschlossen. Die Verhältnisse erscheinen auf einem gemeinsamen Bruchstrich.

Bei der Bildung der Verhältnisse sind stets 3 Sätze aufzustellen: (Hiernach hat die Rechenart ihren Namen)

1) 10 Kräfte heben an 1 Tag 500 m Graben aus
2) 1 Kraft schafft dann den 10. Teil der Arbeit
3) 6 Kräfte schaffen 6 x soviel

$$x = \frac{500 \cdot 6}{10}$$

Die vollständige Lösung der Aufgabe würde lauten

10 Kr.	–	1 Tag	–	500m
6 Kr.	–	1 Tag	–	(x) ? m

$$x = \frac{500 \cdot 6}{10} = 50 \cdot 6 = \underline{\underline{300m}}$$

Vergleicht man die Zahlenwerte des Bruchstriches mit den Zahlenwerten des Feststellungs- und Fragesatzes, erkennt man, daß alle Zahlenangaben außer der im Feststellungssatz am Ende stehenden Bezugsgröße (500)

1) vom Feststellungssatz in den Nenner des Bruches
2) " Fragesatz in den Zähler " "

aufgenommen worden sind.

7. Dreisatzrechnung

Hiernach hat der Dreisatz den Namen
"einfacher Dreisatz"

Im nächstfolgenden Blatt wird der umgekehrte Dreisatz beschri
ben. Bei ihm sind die Verhältnisse anders.

7. Dreisatzrechnung

7.2 Der umgekehrte Dreisatz

Einfacher und umgekehrter Dreisatz sind im Ansatz gleich.

Bei der Lösung ist jedoch darauf zu achten, daß die Verhältnisse richtig gebildet werden.
Auch hier soll das anhand einer Aufgabe geklärt werden.

z.B.

5 Arbeiter eines Bauunternehmens arbeiten am Aushub für ein Wohnhaus 9 Tage. An der gleich großen Grube des Nachbarhauses arbeitet eine andere Gruppe von Arbeitern. Sie schafft den Aushub in 3 Tagen. Wieviel Arbeiter hat diese Gruppe?

Der Feststellungssatz sagt aus, daß der Aushub für das erste Haus in 9 Tagen von 5 Arbeitern bewältigt wird.
Der Fragesatz fragt nach der Arbeiterzahl, wenn der gleiche Aushub in 3 Tagen bewältigt wird.

Es ist demnach folgender Ansatz zu stellen:

9 Tage benötigen 5 Arb.
3 Tage " x "

x = ――――

9 Tage benötigen 5 Arbeiter
Soll die Grube an einem Tage fertig werden, muß man 9 mal soviel Arbeiter einsetzen

$$x = \frac{5 \cdot 9}{3}$$

Hat man jedoch drei Tage Zeit, kann es der 3. Teil der Arbeiter sein, die es an einem Tage schaffen sollten

Unser Bruchstrich muß also wie folgt geschrieben werden.

$$x = \frac{5 \cdot 9}{3}$$

$$x = 5 \cdot 3$$

$$\underline{x = 15}$$

7. Dreisatzrechnung

<u>15 Arbeiter werden benötigt</u>

Hier wird deutlich, daß die Angaben aus dem Feststellungssatz nun <u>im Zähler</u> erscheinen müssen.

7.3 Der gemischte Dreisatz

Der gemischte Dreisatz enthält Elemente des einfachen und umgekehrten Dreisatzes.

Er wird genau wie die beiden anderen Formen gelöst.

Auch hier soll ein Beispiel zur Erklärung herangezogen werden:

z.B.

Ein Bergwerk beschäftigt 2000 Bergleute unter Tage. Diese Mannschaft fördert bei festgesetzter 6-Tagewoche und 9 stündiger täglicher Arbeitszeit in 52 Wochen 1.000.000 t Kohle.

Durch die Kohlenkrise bedingt muß die Zeche die Fördermenge drosseln und setzt sie auf 25 000 t in 4 Wochen fest. Gleichzeitig wird Kurzarbeit eingeführt damit möglichst wenig Arbeitskräfte entlassen werden brauchen. Die neue Arbeitszeit beträgt wöchentlich 4 Tage und täglich 5 Stunden.

Muß das werk außer diesen Maßnahmen noch Kräfte entlassen?

Lösung:

Zunächst stellt man den Feststellungssatz auf: Gefragt ist nach den Arbeitskräften, sie erscheinen also am Schluß des Satzes.

Er lautet.

1 000 000 t Kohle werden in 52 Wochen bei 6-Tagewoche und 9 stündiger Arbeitszeit von 2000 Bergleuten gefördert.

Die Kurzform für diesen Satz ist:

1.000.000 t - 52 Wo - 6 Tg - 9 Std - 2000 Arb.

Der Fragesatz lautet dementsprechend:

25 000 t Kohle werden dann in 4 Wochen bei 4-Tagewoche

-1-

und 5 stündiger täglicher Arbeitszeit von x Bergleuten gefördert.

Die Kurzform für diesen Satz ist:

25 000 t - 4 Wo - 4Tg - 5 Stdn - x Arb.

Nun stellen wir den Ansatz auf:

1.000.000 t - 52 Wo - 6 Tg - 9Std - 2000 Arb.
25.000 t - 4 Wo - 4 Tg - 5Std - x Arb.

$$x = \frac{\quad}{\quad}$$

Die Bezugsgröße, von der wir bei der Lösung ausgehen müssen, sind die 2000 Bergleute. Diese Angabe erscheint über dem Bruchstrich

Also:

$$x = \frac{2000}{\quad}$$

Nun wird Spalte für Spalte unseres Ansatzes durchgerechnet.

1) Die geförderte Kohlenmenge:

Soll statt 1000.000 t lediglich 1 t gefördert werden, braucht man auch nur den 1.000.000 Teil an Arbeitskräften. Die 1.000.000 erscheinen demnach im Nenner

$$x = \frac{2000}{1000.000}$$

Nun soll jedoch nicht 1t sondern 25.000t gefördert werden, man braucht also 25.000 mal so viel Arbeitskräfte, wie für die Förderung von 1t.

Die 25 000 erscheinen also im Zähler

$$x = \frac{2000 \cdot 25.000}{1.000.000}$$

2) Die Wochenzahl

Soll die Arbeit nicht in 52 Wo, sondern in 1 Wo erledigt werden, braucht man selbstverständlich 52 mal so viel Arbeitskräfte.

Die 52 erscheint im Zähler

$$x = \frac{2000 \cdot 25000 \cdot 52}{1.000.000}$$

Nun sind jedoch 4 Wo Zeit zugestanden, man benötigt also den 4. Teil der Kräfte, die es in 1 Wo schaffen sollten.

Die 4 erscheint im Nenner

$$x = \frac{2000 \cdot 25.000 \cdot 52}{1.000.000 \cdot 4}$$

3) Arbeitstage in der Woche:

Gearbeitet wird 6 Tg in der Woche. Würde nur 1 Tg in der Woche gearbeitet, benötigt man 6 mal so viel Arbeitskräfte um die Arbeit zu schaffen.
Die 6 erscheint also im Zähler

$$x = \frac{2000 \cdot 25000 \cdot 52 \cdot 6}{1.000.000 \cdot 4}$$

Nun wird nicht 1 Tag, sondern 4 Tage gearbeitet, man braucht demnach auch nur den 4. Teil der Kräfte. Die 4 erscheint im Nenner

$$x = \frac{2000 \cdot 25.000 \cdot 52 \cdot 6}{1.000.000 \cdot 4 \cdot 4}$$

4) Die tägliche Arbeitszeit:

Gearbeitet wird 9 Std täglich.
Würde nur 1 Std täglich gearbeitet , so braucht man 9 mal so viel Arbeitskräfte, um die Arbeit zu schaffen.
Die 9 erscheint im Zähler

$$x = \frac{2000 \cdot 25.000 \cdot 52 \cdot 6 \cdot 9}{1.000.000 \cdot 4 \cdot 4}$$

Da jedoch nicht 1 Std, sondern 5 Std täglich gearbeitet werden, braucht man auch nur den 5. Teil der Arbeitskräfte Die 5 erscheint im Nenner.

$$x = \frac{2000 \cdot 25.000 \cdot 52 \cdot 6 \cdot 9}{1.000.000 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5}$$

Damit ist der Bruchstrich fertig und kann gelöst werden

$$x = \frac{2000 \cdot 25000 \cdot 52 \cdot 6 \cdot 9}{1.000.000 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} \quad / \text{ kürzen}$$

$$x = \frac{2 \cdot 25 \cdot 52 \cdot 6 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} \quad / \text{ kürzen}$$

$$x = \frac{1 \cdot 5 \cdot 26 \cdot 6 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} \quad / \text{ kürzen}$$

$$x = \frac{5 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 9}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

x = 1755 Arbeiter

Die Zeche muß außerdem also 245 Arbeiter entlassen

8. Die Prozentrechnung

Prozent heißt eigentlich "von Hundert"
und wenn man 5 Prozent annimmt, weiß man, daß dies eigentlich 5 von 100 heißen soll. Also

5% = 5 von 100

Diese Angabe jedoch ist bereits ein Feststellungssatz unserer bekannten Dreisatzrechnung.

Wenn man nun noch sagt 5 Prozent von 2000, so beinhaltet diese Angabe neben dem Feststellungssatz auch den Fragesatz. Denn als Ansatz müßte man schreiben.

von 100 erhalte ich 5 / Feststellung
von2000 erhalte ich x / Frage
oder in der Kurzform

$$\begin{array}{l} 100 \text{ —— } 5 \\ \underline{2000 \text{ —— } x} \\ x = \text{———} \end{array}$$

Aufgaben der Prozent und Zinsrechnung können demnach wie Dreisatzaufgaben gelöst werden.

Um die ganze Sache zu vereinfachen, kann man jedoch eben aus der Dreisatzrechnung für die Prozent und Zinsrechnung allgemeingültige Formeln entwickeln.

Bleiben wir zunächst bei der Aufgabe, ihr Ansatz lautet

$$\begin{array}{l} 100 \text{ —— } 5 \\ \underline{2000 \text{ —— } x} \\ x = \text{———} \end{array}$$

Wenn wir die Zahlenwerte auf dem Bruchstrich bringen, wird

$$x = \frac{5 \cdot 2000}{100} \text{ sein}$$

8. Die Prozentrechnung

Diese Form wird bei jeder Aufgabe dieser Art wiederkehren. Man kann deshalb für die Zahlenwerte auch Buchstaben einsetzen.
Dabei bezeichnet man

1) die 5 als Prozentsatz mit dem Buchstaben p
2) die 100 bleibt als Bezugswert ohne Bezeichnung
3) die 2000 als Grundwert mit dem Buchstaben k
4) das x als Prozentwert mit dem Buchstaben Z

Stellt man nun Feststellungs - und Fragesatz des Dreisatzes nach den Buchstaben neu auf, muß geschrieben werden:

von 100 erhalte ich p
von K erhalte ich Z

oder in der Kurzform:

100 —— p
K —— Z

Der Bruchstrich lautet dann:

$$Z = \frac{p \cdot K}{100}$$

Damit hat man eine allgemein gültige Formel für den Prozentwert entwickelt.

Soll jedoch K errechnet werden, muß ich die Formel umstellen. Es wird dann

$$Z = \frac{p \cdot K}{100} \quad / \text{ mit 100 malnehmen}$$

$$Z \cdot 100 = \frac{p \cdot K \cdot 100}{100} \quad / \text{ kürzen}$$

$$Z \cdot 100 = p \cdot K \quad / \text{ durch p teilen}$$

$$\frac{Z \cdot 100}{p} = \frac{p \cdot K}{p} \quad / \text{ kürzen}$$

$$\frac{Z \cdot 100}{p} = K$$

8. Die Prozentrechnung

$$K = \frac{Z \cdot 100}{p}$$

Diese Formel kann allgemein für die Errechnung des Grundwertes dienen.

Bei der Errechnung von p wird genau so verfahren.

Aus $Z = \frac{p \cdot K}{100}$ wird

$$Z = \frac{p \cdot K}{100}$$

$$100 \cdot Z = p \cdot K$$

$$\frac{100 \cdot Z}{K} = p$$

$$p = \frac{100 \cdot Z}{K}$$

Womit auch eine allgemein geltende Form für die Bestimmung des Prozentsatzes gefunden ist.

9. Zinsrechnung

Bei der Zinsrechnung können die gleichen Formeln verwendet werden, wie bei der Prozentrechnung.

Allerdings gilt das Ergebnis dann immer für die Zeitdauer von 1 Jahr

Sollen die Zinsen (Prozentwert) für weniger Zeit oder mehr Zeit berechnet werden, muß mit der Zeit t multipliziert werden.
Die Buchstaben erhalten für die Zinsrechnung folgende Bedeutung

p: bleibt der Prozentsatz oder Zinssatz
K: wird zu Kapital
Z: wird zu Zinsen umbenannt.

Unsere Berechnungsformeln müßten jetzt also heißen

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$$

$$K = \frac{Z \cdot 100}{p \cdot t}$$

$$p = \frac{Z \cdot 100}{K \cdot t}$$

$$t = \frac{Z \cdot 100}{K \cdot p}$$

Wichtig ist beim Einsetzen der Zahlenwerte die Zeitangabe. Ist sie mit 5 Jahren angegeben, kann ohne Bedenken die 5 für t eingesetzt werden.

Sind jedoch z.B. 20 Monate angegeben, muß in Jahre umgerechnet werden. Da 1 Jahr = 12 Monate hat, sind

$$20 \text{ Monate} = \frac{20}{12} \text{ Jahre}$$

Dieser Wert muß für t in die Formel eingesetzt werden.

Werden z.B. 395 Tage angegeben, muß ebenfalls in Jahre umgerechnet werden.

Da unser "Zinsjahr" 360 Tage hat, sind

9. Zinsrechnung

$$\underline{395 \text{ Tage} = \frac{395}{360} \text{ Jahre}}$$

Dieser Wert wird für t eingesetzt.

Potenzen und Wurzeln der Zahlen 1 - 100

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1,0000	26	676	5,0990	51	2601	7,1414	76	5776	8,7178
2	4	1,4142	27	729	5,1962	52	2704	7,2111	77	5929	8,7750
3	9	1,7321	28	784	5,2915	53	2809	7,2801	78	6084	8,8318
4	16	2,0000	29	841	5,3852	54	2916	7,3485	79	6241	8,8882
5	25	2,2361	30	900	5,4772	55	3025	7,4162	80	6400	8,9443
6	36	2,4495	31	961	5,5678	56	3136	7,4833	81	6561	9,0000
7	49	2,6458	32	1024	5,6569	57	3249	7,5498	82	6724	9,0554
8	64	2,8284	33	1089	5,7446	58	3364	7,6158	83	6889	9,1104
9	81	3,0000	34	1156	5,8310	59	3481	7,6811	84	7056	9,1652
10	100	3,1623	35	1225	5,9161	60	3600	7,7460	85	7225	9,2195
11	121	3,3166	36	1296	6,0000	61	3721	7,8102	86	7396	9,2736
12	144	3,4641	37	1369	6,0828	62	3844	7,8740	87	7569	9,3274
13	169	3,6056	38	1444	6,1644	63	3969	7,9373	88	7744	9,3808
14	196	3,7417	39	1521	6,2450	64	4096	8,0000	89	7921	9,4340
15	225	3,8730	40	1600	6,3246	65	4225	8,0623	90	8100	9,4868
16	256	4,0000	41	1681	6,4031	66	4356	8,1240	91	8281	9,5394
17	289	4,1231	42	1764	6,4807	67	4489	8,1854	92	8464	9,5917
18	324	4,2426	43	1849	6,5574	68	4624	8,2462	93	8649	9,6437
19	361	4,3589	44	1936	6,6332	69	4761	8,3066	94	8836	9,6954
20	400	4,4721	45	2025	6,7082	70	4900	8,3666	95	9025	9,7468
21	441	4,5826	46	2116	6,7823	71	5041	8,4261	96	9216	9,7980
22	484	4,6904	47	2209	6,8557	72	5184	8,4853	97	9409	9,8489
23	529	4,7958	48	2304	6,9282	73	5329	8,5440	98	9604	9,8995
24	576	4,8990	49	2401	7,0000	74	5476	8,6023	99	9801	9,9499
25	625	5,0000	50	2500	7,0711	75	5625	8,6603	100	10000	10,0000

FSch der OPD Nürnberg